

УДК 532.517.3

© 1992 г.

П. А. КУЙБИН, В. Я. РУДЯК

РАЗВИТИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В СЛЕДЕ ЗА ПЛАСТИНОЙ, РАЗМЕЩЕННОЙ ПАРАЛЛЕЛЬНО ПОТОКУ

След за пластиной при ее обтекании под нулевым углом атаки является наименее изученным сдвиговым течением. Оно имеет симметричный профиль скорости и характеризуется двумя неустойчивыми модами: симметричной и антисимметричной. Результаты расчетов, выполненных в рамках линейной теории устойчивости, показывают, что это течение наиболее восприимчиво к антисимметричным (синусоидальным) возмущениям. Коэффициенты усиления синусоидальной моды примерно вдвое выше, чем у симметричной (варикозной). По этой причине симметричной модой вообще пренебрегали. Вместе с тем в экспериментах обычно возбуждается возмущение, являющееся суперпозицией двух мод. Лишь в последнее время появились работы [1, 2], в которых сделана попытка экспериментально генерировать отдельно каждую из мод.

С другой стороны, ясно, что если на линейной стадии обе моды развиваются независимо, то на нелинейной взаимодействие между ними будет существенно влиять на характер развития течения. Действительно, возмущение синусоидальной моды имеет антисимметричный профиль пульсаций продольной скорости u' и симметричные профили пульсаций поперечной скорости v' и пульсаций завихренности ω' . Поскольку же уравнения гидродинамики содержат квадратичную нелинейность, то ясно, что на нелинейной стадии будут генерироваться комбинационные возмущения разной четности и, следовательно, развитие возмущений на этой стадии определяется взаимодействием мод.

Основной механизм развития неустойчивости на нелинейной стадии в слое смешения (например, течение, реализуемое при обтекании пластины потоком, имеющим различные скорости над и под пластиной) — субгармонический [3–5]. Из общих соображений подобный механизм представляется возможным и для следа [6]. В работе [7] однако показано, что хотя для симметричного профиля принципиально и возможно резонансное взаимодействие нейтральных возмущений симметричной и антисимметричной мод, коэффициент связи мод, вычисленный в рамках слабонелинейной теории типа теории Стюарта — Ватсона, тождественно равен нулю. Полученный в [7] при многочисленных весьма сильных предположениях негативный результат вряд ли можно считать окончательным и, кроме того, он дает ответ на вопрос о том, как протекает нелинейная стадия развития неустойчивости в следе.

Развитие возмущений в течении типа следа за телом (точнее, в течении с профилем продольной скорости $u=1-0,7 \exp(-0,9y^2)$) изучалось численно в [8], где, в частности, установлено выделение длинноволновых составляющих спектра. Причем при нелинейном взаимодействии таких возмущений наибольшее нарастание наблюдается у их разностной составляющей. Важным представляется и обнаружение в [8] вторичной неустойчивости конечно-амплитудных волновых режимов к поперечным трехмерным возмущениям. Вместе с тем многие вопросы нелинейной эволюции возмущений в следе все еще остаются невыясненными. С точки зрения построения методов управления, рассматриваемым течением необходимо исследовать механизмы нелинейной стадии развития неустойчивости отдельно каждой из мод и при их взаимодействии. Принципиальным является и вопрос о возможности вторичной неустойчивости, связанной с резонансным усилением двумерных субгармонических возмущений.

В настоящей работе приводятся данные систематических расчетов развития неустойчивости в следе под действием заданных внешних возмущений. Изучаются эволюция (линейная и нелинейная) возмущения данной частоты f каждой из мод, а также их взаимодействия. Большое внимание уделено исследованию неустойчивости следа под действием пары возмущений; основного и субгармонического. В расчетах в широких пределах варьировались амплитуды возмущений и их фазы.

1. Рассмотрим плоский ламинарный след за пластиной, расположенной параллельно потоку несжимаемой жидкости. Скорость течения представим в виде $u=u_0+u'$, $v=v'$, где $u_0(x, y)$ — невозмущенная скорость установившегося течения. Эту скорость аппроксимируем функцией $u_0=U_\infty-\Delta u \exp(-0,6931y^2/b^2)$ [9], где U_∞ — скорость набегающего потока. Дефект скорости Δu убывает с расстоянием x от задней кромки пластины по закону $\Delta u=U_\infty(4x/l+1)^{-1/2}$, а полуширина следа $b=l[0,6931(4x/l+1)/\text{Re}]^{1/2}$, где l — длина пластины, $\text{Re}=U_\infty l/\nu$ — число Рейнольдса. Ось x направлена вниз по потоку, y — поперек, начало координат — на задней кромке пластины.

Будем предполагать, что источник возмущений находится в окрестности задней кромки пластины. Это позволяет задавать возмущения завихренности $\omega'(0, y, t)$ в сечении $x=0$. В такой постановке задача может быть решена методом дискретных вихревых частиц [10, 11]. После пульсаций завихренности моделируется тогда набором дискретных вихревых частиц, уравнения движения которых имеют вид [10]

$$\begin{aligned} \overset{(*)}{z}_k = u_0(x_k, y_k) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{N_f} \Gamma_n \left\{ \frac{1}{z_k - z_n} \left[1 - \exp\left(-\frac{|z_k - z_n|^2}{\sigma_k^2 + \sigma_n^2}\right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{z_k}} \left[\frac{1}{\sqrt{z_k} + \sqrt{z_n}} - \frac{1}{\sqrt{z_k} + \sqrt{\bar{z}_n}} \right] \right\}, \quad k=1, \dots, N_f \quad (1.1) \\ z_k = x_k + iy_k \end{aligned}$$

где x_k, y_k — координаты центра k -той вихревой частицы. Черта означает комплексное сопряжение; $N_f=2N_t$ — полное число сошедших с пластины вихрей, N_t — номер шага по времени. Циркуляции сходящих с пластины вихревых частиц определяются соотношением

$$\begin{aligned} \Gamma_n = \Delta x_n I_0^\pm, \quad \Delta x_n = \Delta t u_0(0, y_{n0}) \\ I_\gamma^\pm = \pm \int_0^{\pm\infty} y^\gamma \omega'(0, y, t) dy \quad (\gamma=0, 1, 2), \quad t=N_t \Delta t \end{aligned}$$

где Δt — длительность шага по времени, а знаки «плюс» и «минус» относятся к частицам над и под пластиной.

Начальное положение вихревой частицы задается координатами $x_{n0}=0$ и $y_{n0}=I_1^\pm/I_0^\pm$. Дисперсии частиц определяются из условия наилучшей аппроксимации сходящей на n -м шаге завихренности и равны $\sigma_n^2 = (\Delta x_n)^2/12 + I_2^\pm/I_0^\pm - y_{n0}^2$.

Функцию $\omega'(0, y, t)$ удобно выбрать таким образом, чтобы циркуляции вихревых частиц имели вид

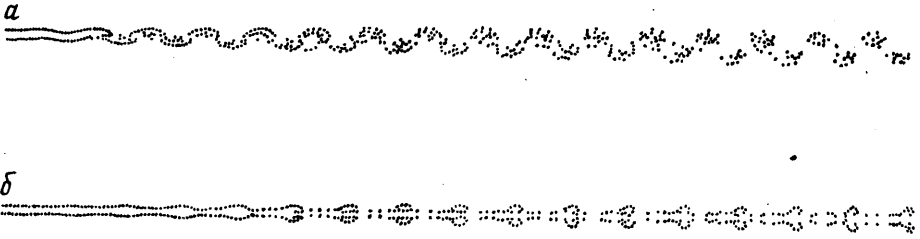
$$\Gamma_n^\pm = A_1^\pm \sin(2\pi f_1 t + \varphi_1^\pm) + A_2^\pm \sin(2\pi f_2 t + \varphi_2^\pm), \quad (1.2)$$

где f_i — частота вводимого возмущения.

Тогда, если $A_n^+ = A_n^-$ и $\varphi_n^+ = \varphi_n^-$, получаются возмущения симметричной моды, а при $A_n^+ = A_n^-$, но $\varphi_n^+ - \varphi_n^- = \pi$ — антисимметричной.

Таким образом, задача изучения развития неустойчивости в следе под действием заданных внешних возмущений сводится к решению системы нелинейных дифференциальных уравнений (1.1), (1.2). В данной работе эта система интегрировалась методом Рунге — Кутты второго порядка с равномерным шагом по времени $\Delta t = 0,0625$.

Расчеты соответствуют числу Рейнольдса $\text{Re} = 2,5 \cdot 10^5$ ($\text{Re}_0 = 443$, $\theta = 0,5l\sqrt{\pi/\text{Re}}$ — толщина вытеснения) и выполнялись при числах Струхала



Фиг. 1

$St_k = f_k \theta / U_\infty = 0,015/k$. Безразмерные амплитуды возмущений $a_k^\pm = A_k^\pm / \theta U_\infty$ варьировались в пределах от 0,281 до 2,81. Ниже верхние индексы опущены, а безразмерные амплитуды антисимметричной и симметричной мод обозначены соответственно a_k и s_k .

2. Результаты расчетов показали, что в случае, когда в течение вводятся малые возмущения частоты f какой-либо одной моды, первичная неустойчивость будет развиваться именно на этой частоте. Расчеты течения проводились вплоть до расстояний $x' = x/\theta = 600$. Типичные результаты приведены на фиг. 1.

При возбуждении антисимметричной моды наблюдается формирование синусоидального следа (фиг. 1, а, $a_1 = 2,81$). На начальной линейной стадии развития возмущения формы возмущения остается синусоидальной, увеличивается лишь его амплитуда. Затем начинают проявляться нелинейные эффекты, форма возмущения перестает быть синусоидальной и формируется вихревая дорожка типа дорожки Кармана. Если в течении возбуждается возмущение варикозной моды, то его развитие приводит к формированию симметричной относительно осевой линии следа вихревой дорожки (фиг. 1, б).

Характерной особенностью нелинейной стадии развития неустойчивости является генерация комбинационных частот различной четкости. Так, например, если в течении возбуждена частота f антисимметричной моды, то в процессе эволюции течения генерируются возмущения частот $2f$, $3f$, и т. д., причем возмущение на частоте $2f$ оказывается симметричным, а на частоте $3f$ — антисимметричным. Если же исходное возмущение частоты f симметрично, то оно порождает симметричные же возмущения комбинационных частот. Как уже отмечалось, связано это с тем, что нелинейная эволюция продольного возмущения скорости управляется нелинейным квадратичным членом уравнения переноса $v' \partial u' / \partial y$, имеющим для антисимметричной моды четность, противоположную u' .

Как и предсказывается линейной теорией, течение менее восприимчиво к симметричной моде. Это, в частности, объясняет то обстоятельство, что появление комбинационных частот в случае возбуждения симметричной моды наблюдается значительно дальше вниз по потоку, нежели в случае возбуждения антисимметричной моды.

Уменьшение начальной амплитуды вводимого возмущения приводит лишь к затягиванию линейной стадии развития возмущения и не меняет качественно характер эволюции течения.

Если при одновременном возбуждении обеих мод на заданной частоте амплитуда одной из них существенно больше, то так же, как в [8], такое соотношение сохраняется достаточно далеко вниз по потоку. Если же амплитуды вводимых возмущений одного порядка, то профиль средней скорости течения сглаживается, «наполняется», т. е. на оси скорость течения уменьшается, а вдали от оси увеличивается. При этом в зависимости от сдвига фаз между возмущениями симметричной и антисимметричной мод

может проявляться различная степень асимметрии профиля средней скорости течения. Нелинейная стадия развития неустойчивости оказывается чрезвычайно сложной. Наблюдается генерация возмущений комбинационных частот обеих мод, их взаимодействие друг с другом и с основными гармониками. Такое взаимодействие в зависимости от соотношения фаз может приводить как к подавлению возмущений, так и к их росту.

Общепринятой в настоящее время [12] является точка зрения, согласно которой в следе отсутствует субгармонический резонанс, тогда как в слое смещения он является стандартным каналом развития вторичной неустойчивости [5]. Возможность или невозможность реализации субгармонического резонанса при взаимодействии двух возмущений антисимметричной моды — основного и субгармонического — легко понять из простой кинематической модели, когда след моделируется двумя рядами вихрей с завихренностью разных знаков (дорожка Кармана, см. фиг. 2, а).

В результате первичной неустойчивости на частоте f (или с длиной волны λ) исходного основного возмущения образуется дорожка Кармана из вихрей, расположенных в шахматном порядке. Вторичная неустойчивость, следствием которой является спаривание вихрей в каждом из рядов, реализуется на длине волны 2λ . Возмущение, развивающееся на этой длине волны, выводит вихри из равновесия, образуя из них пары. Легко видеть, что наиболее благоприятный для этого — сдвиг фаз между гармоникой и субгармоникой $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 0, \pi/2, \pi, \dots$, а неблагоприятный — $\Delta\varphi = -\pi/4 + n\pi$ ($n=1, 2, \dots$).

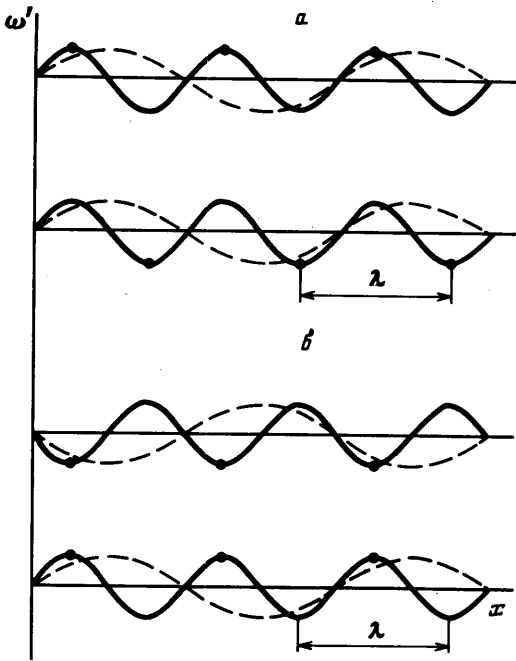
В случае, когда сдвиг фаз равен $\pi/4$, центры первичных вихрей расположены в узлах субгармонического возмущения и вторичная неустойчивость развиваться не должна. С другой стороны, развитие неустойчивости на варикозной моде приводит к образованию симметричной вихревой дорожки (фиг. 2, б). Здесь наиболее благоприятный для развития вторичной неустойчивости сдвиг фаз равен $\Delta\varphi = 0$. При этом происходит попарное объединение вихрей того же типа, которое приводит к известной «чехарде», наблюдаемой при взаимодействии двух вихревых пар. Напротив, сдвиг фаз субгармонического возмущения на π ($\Delta\varphi = \pi$) делает подобное объединение вихрей невозможным.

Результаты расчетов подтверждают описанную качественную картину взаимодействия основной гармоники с субгармоникой. Характер взаимодействия вводимых возмущений существенно зависит от сдвига фаз между основной частотой и субгармоникой. В частном случае, когда оба вводимых возмущения антисимметричные ($a_1 = a_2$), зависимость безразмерной осредненной по y -координате энергии пульсаций продольной скорости на частотах $f_1 = f$ и $f_2 = f/2$

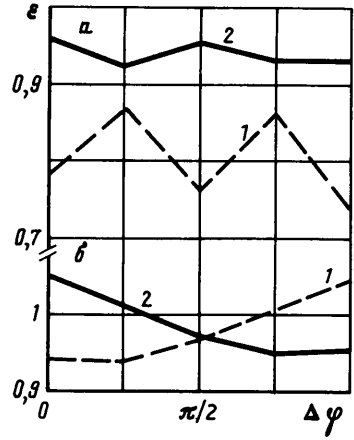
$$e_k = \frac{E_k^d(f_1, f_2)}{E_k^d(f_k)}, \quad E_k^d = \frac{1}{2m\theta} \int_{-m\theta}^{m\theta} \langle u_{f_k}^{\prime 2} \rangle |_{x'=d} dy, \quad k=1, 2$$

вычисленной в заданном сечении $x' = d$ ($m=10$), представлена на фиг. 3, а. Здесь $E_k^d(f_k)$ — энергия пульсаций продольной скорости, получаемая при возбуждении лишь одной гармоники f_k , а $E_k^d(f_1, f_2)$ — при возбуждении гармоники и субгармоники номера кривых на фиг. 3 соответствуют значениям k .

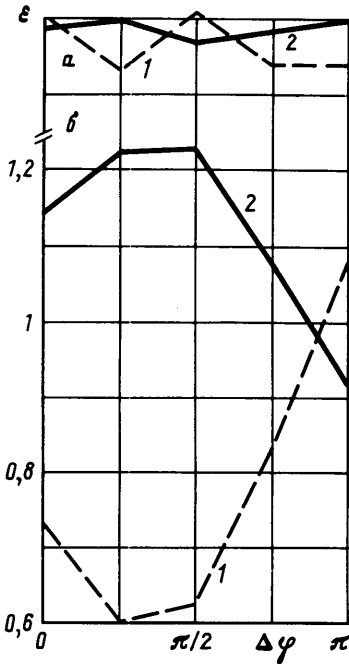
Анализ графиков показывает, что хотя вводимые возмущения активно взаимодействуют друг с другом, резонансного усиления субгармоники не наблюдается ни при каких $\Delta\varphi$. Более того, имеет место подавление субгармонических возмущений. Это обусловлено тем, что в процессе нелинейного взаимодействия основного и субгармонического возмущений с амплитудами a_1 и a_2 генерируется субгармоническое возмущение с амплитудой s_2 .



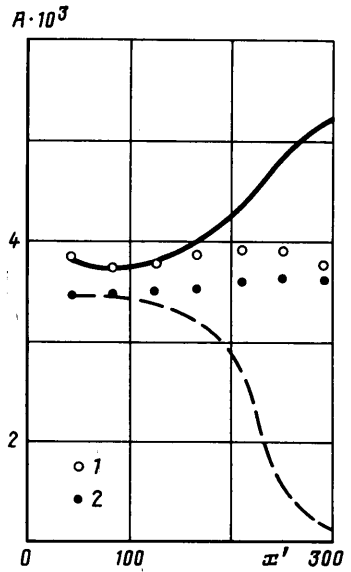
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

В результате исходное субгармоническое возмущение и порожденное имеют противоположные четности, что не только не может привести к общему усилению этих возмущений, но приводит к их подавлению.

При взаимодействии двух возмущений с амплитудами s_1 и s_2 на нелинейной стадии наряду с комбинационными супергармониками генериру-

ется и субгармоника. Наиболее благоприятным сдвигом фаз основной частоты и субгармоники является действительно $\Delta\varphi=0$ (фиг. 3, б), а при $\Delta\varphi>\pi/4$ наблюдается подавление субгармоники. Корреляция энергий возмущений основной частоты и субгармоники, представленная на фиг. 3, б, свидетельствует об их активном взаимодействии, хотя увеличение энергии субгармоники незначительно даже при благоприятном сдвиге фаз $\Delta\varphi$. Связано это с тем, что генерируемая субгармоника имеет фазу, отличную от фазы вводимой субгармоники. В простейшей модели двух связанных осцилляторов сдвиг фаз между вводимой и генерируемой субгармоникой равен $\pi/2$. Поэтому результирующее субгармоническое возмущение имеет неблагоприятный сдвиг фаз для развития вторичной неустойчивости относительно фазы основного возмущения.

Уменьшение амплитуды вводимых возмущений качественно не изменяет картину развития течения и приводит лишь к увеличению длительности линейной стадии.

3. Поскольку при нелинейном взаимодействии в следе двух возмущений в общем случае генерируются комбинационные частоты обеих мод, то ясно, что если субгармонический резонанс и возможен, то он может наблюдаться, когда генерируемое комбинационное возмущение будет иметь ту же четность, что и исходное. С этой точки зрения следует рассмотреть взаимодействия возмущений с амплитудами a_1 и s_2 , s_1 и a_2 , где a_k , s_k соответствуют возмущениям антисимметричной и симметричной мод частоты f_k . Можно ожидать, что резонансные взаимодействия в первом случае будут значительно слабее, так как симметричная мода имеет очень низкий коэффициент усиления. И если $a_1=s_2$ в начальный момент времени, то амплитуды генерируемых субгармонических возмущений даже на расстоянии $x' \gg 200$ все еще очень малы. Результаты расчетов подтверждают эти качественные соображения. При взаимодействии мод с амплитудами a_1 и s_2 обнаружено слабое усиление субгармоники. Наиболее благоприятный сдвиг фаз равен $\Delta\varphi=\pi/4$ и π (фиг. 4, а; кривые на фиг. 4 соответствуют значениям k).

Напротив, при взаимодействии мод с амплитудами s_1 и a_2 наблюдается резкое усиление субгармонических возмущений, которое имеет явно резонансный характер. Усиление субгармонических возмущений происходит в широком диапазоне изменения $\Delta\varphi$: $0 \leq \Delta\varphi \leq 3\pi/4$. Максимальное усиление достигается при $\Delta\varphi=\pi/2$ (фиг. 4, б). На фиг. 5 для этого случая представлена эволюция максимума амплитуды возмущений продольной скорости

$A = \langle u_j' \rangle_{\max}^{1/2}$ вдоль по потоку. Сплошная кривая соответствует субгармоническим возмущениям, штриховая — возмущениям основной частоты. Точками 1 и 2 отмечены уровни амплитуд уединенных возмущений субгармонической и основной частоты соответственно.

Эффект усиления субгармонических возмущений при взаимодействии мод с амплитудами s_1 и a_2 наблюдается при широком изменении уровня начальных амплитуд возмущений. Этот эффект имеет место и в плоскопараллельном приближении, когда $\Delta u = \text{const}$ и при разных значениях дефекта скорости, который варьировался от 0,2 до 0,75.

Методика генерации возмущений каждой из мод, предложенная в [1, 2], позволяет экспериментально наблюдать усиление субгармонических возмущений. Для этого следует независимо ввести в течение возмущение основной частоты симметричной моды и антисимметричное субгармоническое возмущение, сдвинутое по фазе относительно основного на $\pi/4 - \pi/2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wygnanski I., Champagne F., Marasli B.* On the large-scale structures in two-dimensional small-deficit, turbulent wakes // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 168. P. 31–71.
2. *Marasli B., Champagne F. H., Wygnanski I. J.* Modal decomposition of velocity signals in a plane, turbulent wake // *J. Fluid Mech.* 1989. V. 198. P. 255–273.
3. *Kelly R. E.* On the stability of an inviscid shear layer which is periodic in space and time // *J. Fluid Mech.* 1967. V. 27. № 4. P. 657–697.
4. *Oster D., Wygnanski I.* The forced mixing layer between parallel streams // *J. Fluid Mech.* 1982. V. 123. P. 91–130.
5. *Веретенцев А. Н., Рудяк В. Я.* О процессах образования и эволюции вихревых структур в сдвиговых слоях // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1987. № 1. С. 31–37.
6. *Герценштейн С. Я., Штемлер Ю. М.* Нелинейное развитие возмущений в пограничных слоях и их неустойчивость // *Докл. АН СССР.* 1977. Т. 234. № 6. С. 1277–1280.
7. *Kelly R. E.* On the resonant interaction of neutral disturbances in two inviscid shear flows // *J. Fluid. Mech.* 1968. V. 31. № 4. P. 789–799.
8. *Герценштейн С. Я., Олару И. И., Рудницкий А. Я., Сузороков А. Н.* О развитии конечно-амплитудных двумерных и трехмерных возмущений в струйных течениях // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1985. № 5. С. 8–19.
9. *Nishioka M., Miyagi T.* Measurements of velocity distribution in the laminar wake of a flat plate // *J. Fluid Mech.* 1978. V. 84. № 4. P. 705–715.
10. *Веретенцев А. Н., Куйбин П. А., Рудяк В. Я.* Моделирование формирования вихря на острой кромке полубесконечной пластины // *Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук.* 1988. № 7. Вып. 2. С. 21–25.
11. *Веретенцев А. Н., Гешев П. И., Куйбин П. А., Рудяк В. Я.* О развитии метода вихревых частиц применительно к описанию отрывных течений // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 1989. Т. 29. № 6. С. 878–887.
12. *Маслоу С. А.* Неустойчивости и переход в сдвиговых течениях // *Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности.* М.: Мир, 1984. С. 218–270.

Новосибирск

Поступила в редакцию
25.XII.1990