

Л. М. ДАВЫДОВ

## К РАСЧЕТУ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ НА ТЕЧЕНИИ И МЕЛКОВОДЬЕ

Рассмотрены некоторые вопросы расчета энергии поверхностных волн, распространяющихся на течении и мелководье. В уравнение баланса энергии волн введены члены, учитывающие взаимодействие волнового пограничного слоя с осредненным сдвиговым течением.

Для прогнозирования энергии поверхностных волн обычно используется уравнение баланса энергии поверхностных волн  $E$ , которое для одиночной энергонесущей волны без учета притока энергии от ветра имеет вид

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial E(U_i + c_{gi})}{\partial x_i} + S_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} = -e_d \quad (1)$$

$$S_{ij} = E \left[ \frac{c_g}{c} \frac{k_i k_j}{k^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{2c_g}{c} - 1 \right) \delta_{ij} \right]$$

где  $i, j = 1, 2$ ;  $U_i$  – горизонтальные компоненты средней скорости течений;  $k, k_i$  – волновой вектор и его компоненты;  $c_{gi}, c_i$  – компоненты групповой и фазовой скорости волн;  $e_d$  – скорость диссипации энергии волн,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $S_{ij}$  – избыточный поток импульса, связанный с волновым движением и называемый «радиационным напряжением».

Роль члена в правой части уравнения (1) становится важной при распространении волн на мелководье, где диссипация проявляется сильно. Для того чтобы правильно оценить диссипативный член, целесообразно провести общий вывод этого уравнения.

Уравнения гидродинамики в пренебрежении молекулярной вязкостью имеют вид

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} + u_n \frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_m} = g_m \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_m} = 0$$

Граничные условия на поверхности  $x_3 = \zeta$  и на дне  $x_3 = -H$  имеют вид

$$u_{3s} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_{is} \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} (x_3 = \zeta), \quad u_{3b} = u_{ib} \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} (x_3 = -H)$$

где  $m, n = 1, 2, 3$ ;  $u_m$  – компоненты мгновенной скорости;  $\rho$  – плотность;  $p$  – давление; индексы  $s$  и  $b$  означают поверхность и дно, вектор  $g_m(0, 0, -g)$  – гравитационное ускорение.

Следуя [1], разложим поля скоростей и давление на три составляющие: осредненные  $U_m, P$ , волновые  $u_{wm}, p_w$  и турбулентные  $u_{tm}, p_t$

$$u_m = U_m + u_{wm} + u_{tm}, \quad p = P + p_w + p_t \quad (3)$$

Пространственные и временные масштабы этих величин обозначим соответственно  $L, l_w, l_t$  и  $T, t_w, t_t$ . Положим  $L \gg l_w \gg l_t$  и  $T \gg t_w \gg t_t$ , что говорит о том, что крупномасштабные, волновые и турбулентные пульсации не коррелируют друг с другом.

Подставляя (3) в уравнения (2) и осредняя их последовательно по масштабам турбулентности и длины волны, после некоторых преобразований получим

$$\frac{\partial U_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_n} (U_m U_n + \{u_{wm} u_{wn}\} + \{u_{tm} u_{tn}\}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_m} = g_m$$

$$\frac{\partial u_{wm}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_n} (u_{wm} u_{wn} - \{u_{wm} u_{wn}\} + \{u_{tm} u_{tn}\} - \{u_{tm} u_{tn}\}) +$$

$$+ U_m u_{wn} + U_n u_{wm} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_w}{\partial x_m} = 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{tm}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_n} (u_{tm}u_{tn} - \langle u_{tm}u_{tn} \rangle + u_{tm}U_n + u_{tm}u_{wn} + \\ + U_n u_{tn} + u_{wn}u_{tn}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_t}{\partial x_m} = 0 \\ \frac{\partial U_m}{\partial x_m} = 0, \quad \frac{\partial u_{wm}}{\partial x_m} = 0, \quad \frac{\partial u_{tm}}{\partial x_m} = 0 \end{aligned}$$

где  $\langle \rangle$  – осреднение по масштабу турбулентности,  $\{ \}$  – осреднение по масштабу волны.

Умножая первые три уравнения (4) соответственно на  $U_m$ ,  $u_{wm}$ ,  $u_{tm}$ , после некоторых преобразований получим уравнения баланса кинетической энергии осредненного, волнового и турбулентного течений

$$\frac{\partial e}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_n} \left( U_n e + \frac{P U_n}{\rho} \right) - \frac{\partial U_n \{ u_{wn} u_{wm} \}}{\partial x_m} + \quad (5)$$

$$+ \{ u_{wn} u_{wm} \} \frac{\partial U_n}{\partial x_m} - U_n \frac{\partial \{ \langle u_{tm} u_{tn} \rangle \}}{\partial x_m} + g U_3$$

$$\frac{\partial \{ e_w \}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \{ u_{wn} e_w \} + U_n \{ e_w \} + \left\{ \frac{p_w u_{wn}}{\rho} \right\} \right) - \{ u_{wm} u_{wn} \} \frac{\partial U_m}{\partial x_n} - \quad (6)$$

$$- \frac{\partial \{ \langle u_{tm} u_{tn} \rangle u_{wm} \}}{\partial x_n} + \left\{ \langle u_{tm} u_{tn} \rangle \frac{\partial u_{wm}}{\partial x_n} \right\}$$

$$\frac{\partial \langle e_t \rangle}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \langle e_t u_{tn} \rangle + (U_n + u_{wn}) \langle e_t \rangle + \left\langle \frac{p_t u_{tn}}{\rho} \right\rangle \right) - \langle u_{tm} u_{tn} \rangle \frac{\partial U_m + u_{wm}}{\partial x_n} - e \quad (7)$$

$$e = \frac{U_n U_n}{2}, \quad e_w = \frac{u_{wn} u_{wn}}{2}, \quad e_t = \frac{u_{tn} u_{tn}}{2}$$

где  $e$  – скорость диссипации турбулентной энергии за счет молекулярной вязкости. Система (5)–(7) описывает процессы переноса различных видов кинетической энергии, ее диссипацию и взаимный обмен.

В настоящем исследовании представляет интерес уравнение баланса кинетической энергии волн (КЭВ) (6). Первый член в правой части этого уравнения описывает перенос КЭВ со скоростью, равной сумме групповой скорости и скорости течения; второй член описывает обмен энергии между осредненным и волновым течением за счет взаимодействия волновых напряжений с градиентом средней скорости; третий член определяет перенос КЭВ турбулентными напряжениями; последний, четвертый член определяет переход волновой энергии в турбулентную за счет взаимодействия турбулентных напряжений с градиентом волновой скорости.

Из уравнения неразрывности (2) с учетом граничных условий следует

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-H}^{\zeta} u_i dx_3 = 0$$

Подставляя в это уравнение (3), после некоторых преобразований получим уравнение для потенциальной энергии волн  $E_c = \rho g \zeta^2 / 2$ .

$$\frac{\partial E_c}{\partial t} + \frac{\partial E_c U_i}{\partial x_i} + E_c \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$$

Интегрируя уравнение (6) по глубине и складывая с последним уравнением, получим уравнение баланса полной энергии волн

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \int_{-H}^z \{ (p_w + \rho e_w) u_{wi} \} dx_3 + U_i E \right) + \int_{-H}^z (\rho \{ u_{wi} u_{wj} \} + \delta_{ij} E_c) \times \\ \times \frac{\partial U_i}{\partial x_j} dx_3 + \rho \{ (u_{i1} u_{i3}) u_{wi} \} - \rho \int_{-H}^z \left\{ \langle u_{im} u_{in} \rangle \frac{\partial u_{wm}}{\partial x_n} \right\} dx_3 = 0 \\ E = E_c + \frac{\rho}{2} \int_{-H}^z \{ e_w \} dx_3 \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим параметризацию членов в уравнении (8). Согласно [2]

$$\int_{-H}^z (\rho e_w + p_w) u_{wi} dx_3 = c_{gi} E$$

После некоторых преобразований получим

$$\int_{-H}^z (\rho \{ u_{wi} u_{wj} \} + \delta_{ij} E_c) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} dx_3 = S_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \rho \int_{-H}^z \{ u_{w3} u_{wi} \} \frac{\partial U_i}{\partial x_3} dx_3$$

Исследования, выполненные в [3], показывают, что волновые напряжения на внешних границах как ламинарного, так и турбулентного пограничного слоев для прогрессивных волн близки между собой и, согласно [2]

$$\{ u_{w3} u_{wi} \} = - \frac{\omega^2 a^2 \Delta k_i}{4 \text{sh}^2 kH}$$

Здесь  $\Delta$  – толщина волнового турбулентного пограничного слоя,  $\omega$  – частота,  $a$  – амплитуда поверхностных волн,  $k$  – постоянная Кармана,  $u_*$  – скорость трения на дне.

Согласно [4], толщина турбулентного волнового пограничного слоя на дне равна  $\Delta = 0.367 k u_* / \omega$ , откуда

$$\varepsilon_{in} = \rho \int_{-H}^z \{ u_{w3} u_{wi} \} \frac{\partial U_i}{\partial x_3} dx_3 = - \frac{\Delta k k_i}{\text{sh} 2kH} U_i E$$

Диссипация волновой энергии на дне равна [5]

$$\varepsilon_d = \rho \{ (u_{i3} u_{i1}) u_{wi} \}_{x_3 = -H} = K f_w \rho \frac{\omega^3 a^3}{\text{sh}^3 kH}$$

где  $K = 0.21$ ,  $f_w$  – коэффициент волнового трения.

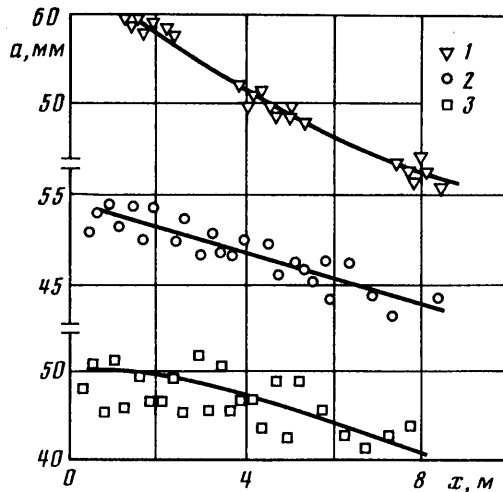
Последним членом в уравнении (8) мы пренебрежем. Он описывает диссипацию волновой энергии за счет турбулентной вязкости.

Мы получили уравнение энергии в том же виде, что и (1), но в правой части будут стоять два члена  $-\varepsilon_d - \varepsilon_{in}$ . При небольших глубинах и больших скоростях течения член  $\varepsilon_{in}$  может оказать существенное влияние на амплитуду волны.

Член  $\varepsilon_{in}$  с противоположными знаками входит в правую часть уравнений энергии для осредненного и волнового движений. Он осуществляет перераспределение энергии между осредненным и волновым течениями за счет взаимодействия волновых напряжений с вертикальным градиентом горизонтальной составляющей средней скорости.

Если волна распространяется по течению, то имеет место поток энергии от осредненного течения к волнам. И наоборот, если волна распространяется против течения, энергия волн переходит в энергию осредненного течения.

Если скорость потока достаточно велика, то  $-\varepsilon_d - \varepsilon_{in} > 0$  для волн, распространяющихся по течению, и их энергия будет расти, несмотря на эффекты диссипации волновой энергии на дне. Включение  $\varepsilon_{in}$  в уравнение сохранения энергии волн позволяет дать объяснение экспериментам, приведенным в [6, 7], которые прово-



дилься в волновом лотке. Глубина воды равнялась 20 см. Период волны был равен 1 с. Скорости потока для волн, распространяющихся по течению, равнялись 18,3 и 18,5 см/с, против течения -- 11,26 и 11,04 см/с.

Из фигуры, на которой дано изменение высоты волны  $a$  вдоль канала, видно удовлетворительное согласие результатов расчетов с данными экспериментов [6, 7]. На фигуре сплошная линия -- расчет по предложенной методике, 1-3 -- данные экспериментов для волн соответственно на противотечении, без течения и попутном течении.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hussain A. K. M. F., Reynolds W. C. The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow // J. Fluid Mech. 1970. V. 41. № 2. P. 241-258.
2. Филлипс О. М. Динамика верхнего слоя океана. М.: Мир, 1969. 267 с.
3. Дворянинов Г. С., Прусов А. В. Перенос масс в турбулентном пограничном слое у дна, обусловленный волнами // Океанология. 1976. Т. 16. Вып. 5. С. 760-767.
4. Glenn S. M., Grant W. D. Suspended sediment stratification correction for combined wave and current flows // J. Geophys. Res. 1987. V. C92. № 8. P. 8244-8264.
5. Kamphuis J. W. Friction factor under oscillatory waves // J. Water Ways. Harbours Coastal Eng. J. A. S. C. E. 1975. V. 101. NWW2. P. 135-144.
6. Kemp P. H., Simons R. R. The interaction between waves and a turbulent current: waves propagating with the current // J. Fluid Mech. 1982. V. 116. P. 227-250.
7. Kemp P. H., Simons R. R. The interaction of waves and a turbulent current waves propagating against the current // J. Fluid Mech. 1983. V. 130. P. 73-89.

Москва

Поступила в редакцию  
11.XII.1990