МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1992

УДК 532.546

© 1992 г.

В. М. ШЕСТАКОВ

ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ПЛАНОВОГО ГЕОФИЛЬТРАЦИОННОГО ПОТОКА

В схеме планового геофильтрационного потока, предложенной Ж. Дюпюи [1] и использованной для вывода дифференциальных уравнений Ж. Буссинеском [2] и Ф. Форхгеймером [3], предполагалось осреднение напоров потока по вертикали, причем в качестве основной рассматривалось однородное строение потока по вертикали. Модельные эксперименты на щелевом лотке (модель Хеле – Шоу) [4] показали, что для однородного потока схема Дюпюи – Буссинеска – Форхгеймера имеет широкие возможности применения, если трактовать ее, исходя из более общей предпосылки о равенстве горизонтальных градиентов напора – среднего по глубине и на свободной поверхности.

Дальнейшее обобщение модели планового потока может быть проведено на основе предпосылки о постоянстве горизонтальных градиентов напора I_l в каждом сечении, когда горизонтальные (латеральные) скорости фильтрации v_l определяются выражением

$$v_l=k_lI_l=k_l\frac{q}{T} \qquad (1)$$

где k_l – горизонтальные коэффициенты фильтрации, q и T – удельный расход и проводимость потока.

Запишем уравнение неразрывности для потока, имеющего горизонтальное направление

$$\frac{\partial v_l}{\partial l}+\frac{\partial v_z}{\partial z}+\eta^*\frac{\partial H}{\partial t}=0$$

где v_z – вертикальная скорость фильтрации, H – напор, η^* – упругоемкость [5], и разрешим его относительно v_z, выражая v_l согласно (1) и обозначая $v_z(0)=v_z^0$

$$v_z=v_z^\circ-\int\limits_0^z\frac{\partial}{\partial l}\left(k_l\frac{q}{T}\right)dz-\int\limits_0^z\eta^*\frac{\partial H}{\partial T}dz \qquad (2)$$

Будем далее рассматривать горизонтально-слоистое строение потока, предполагая, что изменения проницаемости слоев пропорциональны изменению проводимости при сравнительно малом ее изменении по длине потока. Тогда

$$\int\limits_0^z\frac{\partial}{\partial l}\left(k_l\frac{q}{T}\right)dz\cong\int\limits_0^z\frac{k_l}{T}\frac{\partial q}{\partial l}dz\cong\frac{v_z^\circ+v_z'}{T}T_z,\qquad T_z=\int\limits_0^z k_l dz$$

где $v_z'=v_z(h)$ – скорость перетока в подошве пласта. Тогда выражение (2) принимает вид

$$v_z=v_z^\circ\left(1-\frac{T_z}{T}\right)+v_z'\frac{T_z}{T}-\int\limits_0^z\eta^*\frac{\partial H}{\partial t}dz \qquad (3)$$

Преобразования для распределения напоров проведем, считая подошву потока непроницаемой ($v_z=0$) и при жестком режиме фильтрации. Поскольку $v_z=-k_z\partial H/\partial z$, где k_z – вертикальный коэффициент фильтрации, то для распределения напора $H_z=H(z)$ в каждом сечении получим выражение

$$H_z=H_0-\int\limits_0^z\frac{v_z}{k_z}dz=H_0-v_z^\circ\int\limits_0^z\frac{1}{k_z}\left(1-\frac{T_z}{T}\right)dz$$

где $H_0=H(0)$ – напор на свободной поверхности. При этом гидравлически средний по сечению напор (средневзвешенный по проводимости) H будет

$$H=\frac{1}{T}\int\limits_0^z k_l H_z\,dz=H_0-v_z^\circ\Phi_z^\circ \qquad (4)$$

$$\Phi_z^\circ=\int\limits_0^h k_l\int\limits_0^z k_z^{-1}\left(1-\frac{T_z}{T}\right)dz\,dz \qquad (5)$$

где Φ_z° – вертикальное фильтрационное сопротивление планового потока.

Принимая в линеаризированной постановке условие на свободной поверхности

$$v_z^\circ=w-\mu\frac{\partial H}{\partial t}$$

где w – интенсивность (модуль) площадного питания, μ – гравитационная емкость, из (4) получаем дифференциальное уравнение, связывающее напоры H и H_0:

$$\chi(H-H_0)=\mu\frac{\partial H_0}{\partial t}-w \qquad (6)$$

где $\chi=(\Phi_z^\circ)^{-1}$ – коэффициент перетока (удельная вертикальная проводимость) планового потока.

Рассматривая, кроме того, общий баланс потока, запишем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial H}{\partial y}\right)=\mu^*\frac{\partial H}{\partial t}+\chi(H-H_0) \qquad (7)$$

где μ^* – упругая емкость потока [6]. Система дифференциальных уравнений (6)–(7) составляет обобщенную математическую модель планового потока, которая формально адекватна модели двухслойного пласта [5]. В соответствии с имеющимися оценками [5] критерием необходимости использования такой обобщенной модели планового потока является выполнение для времени монотонного хода процесса неравенства $t<6\mu/\varkappa$. В случае невыполнения данного неравенства остается практически применимой обычная модель планового потока (Дюпюи – Буссинеска – Форхгеймера).

Приведем выражения Φ_z° для некоторых типичных схем фильтрационного строения потока по вертикали.

При однородном строении потока $T_z=kz$, $T=kh$ и

$$\Phi_z^\circ=\frac{h}{3k_z} \qquad (8)$$

где k_z – вертикальный коэффициент фильтрации. В работе [6] показана эффективность использования обобщенной модели планового потока для условий откачки в однородном потоке при расчетах вертикальных сопротивлений по выражению (8).

При двухслойном строении потока, состоящего из верхнего и нижнего слоев мощностью m_1 и m_2 с коэффициентами фильтрации k_1 и k_2, в случае $k_2>k_1$, когда средний напор имеет место в нижнем слое, при общей проводимости $T=k_1m_1+k_2m_2$, получается

$$\Phi_z^\circ=\frac{1}{T}\left[\frac{m_1^2}{2}\left(1-\frac{k_1m_1}{3T}\right)+\frac{k_2m_2^3}{3T}+\frac{k_2m_1m_2}{k_1}\left(1-\frac{k_1m_1}{2T}\right)\right]$$

В более сложных формах изменения проницаемости по глубине расчеты сопротивлений Φ_z° могут проводиться по выражению (5) численным путем.

В обобщенной модели планового потока можно также учесть динамику гравитационной емкости потока, опираясь на схему «капиллярной каймы» [5], в которой зона неполного насыщения над свободной поверхностью заменяется гидравлически эквивалентной «капиллярной каймой» с некоторым коэффициентом перетока χ_k. При этом общий коэффициент перетока χ в (6) будет

$$\chi=(\Phi_z^\circ+\chi_k^{-1})^{-1}$$

а величина H_0 в (6) и (7) представляет собой напор на поверхности «капиллярной каймы».

Использование обобщенной модели планового потока наиболее существенно для решения задач построения траекторий течения, особенно важных при изучении загрязнения подземных вод. При этом в кинематических условиях для определения координат траектории l и z в горизонтальном и вертикальном направлениях подставляются выражения (1) и (3) для скоростей v_l и v_z (последним членом пренебрегается в (3)). Тестовые расчеты, проведенные таким путем в сочетании с использованием строгих аналитических решений для условий фильтрации в стационарном однородном потоке под площадкой инфильтрации, показали вполне удовлетворительную точность построения траекторий (линий тока), по крайней мере при размерах площадки инфильтрации, превышающей удвоенную глубину потока.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dupuit J.* Memoire sur mouvement de l'eau a travers les terrains permeables // Acad. Sci. Paris. Compt. Rend. 1857. T. 45. P. 92–96.
2. *Boussinesq J.* Essai sur la theorie des eaux courantes // Paris. Mem. Sabants Etrangers. 1877. V. 23. № 1.
3. *Форхгеймер.* Гидравлика. М.; Л.: ОНТИ. Глав. ред. энергет. лит., 1935. 615 с.
4. *Шестаков В. М.* Исследования внутренней кинематики неустановившегося фильтрационного потока и вывод уравнения неустановившейся фильтрации // Докл. АН СССР. 1953. Т. 91. № 5. С. 1047–1050.
5. *Шестаков В. М.* Динамика подземных вод. М.: Изд-во МГУ, 1979. 368 с.
6. *Шестаков В. М.* Построение свободной поверхности стационарного фильтрационного потока при откачке из совершенной скважины // Научн. тр. Ташкент. ун-та. 1971. Вып. 415. С. 39–45.

Москва

Поступила в редакцию
20.XI.1990