МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1992

УДК 532.526:536.24

Ю. В. САНОЧКИН

ТЕРМОКАПИЛЛЯРНАЯ ЭВАКУАЦИЯ ЖИДКОСТИ, ПОСТУПАЮЩЕЙ ИЗ ПОРИСТОЙ СТЕНКИ

Термокапиллярная сила может вызывать без деформации свободной границы движение жидкости с поворотом линий тока на 90°, внешне напоминающее течение Хименца. Оно отвечает натреву поверхности по параболическому закону и описывается точным решением системы уравнений Навье – Стокса и энергии [1–3].

Представляет интерес рассмотреть термокапиллярное растекание жидкости на горизонтальной пористой стенке – обобщение предыдущей задачи на случай слоя конечной толщины. Жидкость поступает через проницаемое основание, распределение температуры на свободной границе предполагается симметричным. Подобная ситуация возникает при подаче жидкого рабочего тела через пористый электрод, неравномерно нагреваемый электрической дугой, или при рассмотрении «фитильного» охлаждения поверхности твердого тела. В определенных условиях рассматриваемая задача может служить моделью равномерного движения фронта плавления при неоднородном нагреве поверхности тела.

1. Плоская свободная граница. Предположим вначале, что существует режим течения, когда градиент давления вдоль слоя не возникает и его толщина не изменяется. В этом случае можно построить точное решение уравнений гидродинамики и определить затем необходимое для его реализации соотношение между физическими параметрами. Ограничимся рассмотрением плоского случая. Пусть жесткая граница слоя есть плоскость $y=-h$, свободная поверхность $-$ $y=0$. Решение системы уравнений Навье – Стокса и энергии со следующими граничными условиями:

$$\begin{gathered} \rho\nu(u_y+v_x)=-\alpha' T_x, \quad v=0, \quad p=0 \\ T-T_w=\Delta T(1-x^2/2l^2), \quad y=0 \\ u=T-T_w=0, \quad v=v_0, \quad y=-h; \quad u=T_x=0, \quad x=0 \\ \Delta T=T_0-T_w, \quad T_0=T(0,0), \quad \alpha'=-d\alpha/dT \end{gathered} \tag{1.1}$$

ищется в виде

$$u=-xf'(y), \quad v=f(y), \quad p=F(y), \quad T-T_w=\Delta T\left[\vartheta(y)-\frac{x^2}{2l^2}\theta(y)\right] \tag{1.2}$$

Здесь u, v – горизонтальная, вертикальная составляющие скорости, α – коэффициент поверхностного натяжения, l – масштаб неоднородности нагрева. Плотность ρ, вязкость ν считаются не зависящими от температуры. Температура стенки T_w в (1.1) считается постоянной. Это не имеет особого значения, поскольку изменение условия тепловой задачи на стенке скажется только на распределении температуры. Плотность теплового потока на свободной границе также изменяется, согласно (1.2), по параболическому закону. Переходя к безразмерным переменным $y=h\xi$, $f(y)=v_0\varphi(\xi)$, получаем для определения φ задачу

$$\begin{gathered} \varepsilon\varphi'''-\varphi\varphi''+\varphi'^2=0, \quad \varphi(-1)=1, \quad \varphi'(-1)=\varphi(0)=0, \quad \varphi''(0)=-\varepsilon R^* \\ \varepsilon=\frac{\nu}{v_0 h}, \quad R^*=\frac{h^2}{l^2}R, \quad R=\frac{\alpha'\Delta T h}{\rho\nu^2} \end{gathered} \tag{1.3}$$

Если $\varepsilon\gg 1$, то для ее решения можно воспользоваться регулярной теорией возмущений

$$\varphi=-\xi^2-2\xi-\varepsilon^{-1}\left(\frac{1}{30}\xi^5+\frac{1}{6}\xi^4+\frac{2}{3}\xi^3+\frac{29}{30}\xi^2+\frac{13}{30}\xi\right)+O(\varepsilon^{-2}) \tag{1.4}$$

Из (1.3), (1.4) определяется зависимость между параметрами

$$R^*=\frac{2}{\varepsilon}+\frac{29}{15}\frac{1}{\varepsilon^2}+O(\varepsilon^{-3}) \tag{1.5}$$

Согласно (1.5), малая термокапиллярная сила ($R^*\to 0$) может обеспечить эвакуацию малого количества поступающей жидкости ($v_0\to 0$, $\varepsilon\to\infty$).

Более интересен случай сингулярных возмущений $\varepsilon\ll 1$. Ограничимся построением главного члена асимптотики. Пограничный слой образуется на свободной границе. Вводя растянутую координату ξ/ε^γ, убеждаемся, что характерный предел задачи соответствует значению $\gamma=1$. Сращивая внешнее и внутреннее разложения [4], находим пригодное во всем интервале изменения координаты составное разложение решения (1.3)

$$\varphi=1-\exp(\xi/\varepsilon)+O(\varepsilon) \tag{1.6}$$

Из условия разрешимости задачи находим вместо (1.5)

$$R^*=\varepsilon^{-3}(1+O(\varepsilon)) \tag{1.7}$$

Толщина вязкого слоя, согласно (1.6), (1.7), при сильном нагреве мала по сравнению с толщиной слоя $\delta\sim hR^{*^{-1/3}}$. Максимальная скорость конвекции развивается на поверхности

$$u=v_0R^{*^{1/3}}(x/h)\exp(v_0y/\nu)$$

Распределение температуры определяется из системы

$$\begin{gathered} (\varepsilon/P)\theta''-\varphi\theta'+2\varphi'\theta=0, \quad \theta(0)=1, \quad \theta(-1)=0 \\ \vartheta''-(P/\varepsilon)\varphi\vartheta'=(h/l)^2\theta, \quad \vartheta(0)=1, \quad \vartheta(-1)=0 \end{gathered} \tag{1.8}$$

где P – число Прандтля. Используя (1.6), находим асимптотику решения (1.8) при $P \gg 1$, $h^2/l^2 \ll 1$

$$\theta = 1{,}6\left(1+\frac{P\xi^2}{\varepsilon^2}\right)\int\limits_{-\sqrt{P}\,\xi/\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{-t^2/2}}{(1+t^2)^2}\,dt,\quad \vartheta = 1-\Phi\left(-\frac{\xi\sqrt{P}}{\varepsilon}\right) \tag{1.9}$$

Здесь Φ – интеграл вероятности. Решение (1.9) описывает тепловой пограничный слой толщиной $\delta_T \sim \delta/\sqrt{P}$.

2. Искривленная свободная граница. Если условия таковы, что соотношения (1.5), (1.7) не выполняются, то свободная поверхность жидкости не может быть плоской. Исследование ее профиля $y=\zeta(x)$ приведем для медленного растекания жидкости ($\varepsilon \gg 1$) в тонкой горизонтальной области ($l \gg h$). Воспользовавшись приближением пограничного слоя, исходим из системы уравнений и граничных условий

$$\begin{gathered} u_x+v_y=0,\quad p=\nu\rho u_{yy},\quad p_y=-\rho g,\quad uT_x+vT_y=\chi T_{yy},\quad \nu\rho u_y=-\alpha' T_x,\quad p=0 \\ v=\zeta' u,\quad T-T_w=\Delta T(1-x^2/2l^2),\quad y=\zeta \end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь g – ускорение силы тяжести, χ – коэффициент температуропроводности. Условия на стенке и в плоскости симметрии указаны в (1.1). Капиллярная постоянная жидкости $(\alpha/\rho g)^{1/2}$ предполагается малой по сравнению с l. Поэтому в (2.1) пренебрегается поверхностным давлением, а также влиянием ускорения частиц по вертикали (приближение мелкой воды). В этом случае $p=\rho g(\zeta-y)$ и уравнение неразрывности с учетом граничных условий приводит к

$$\int\limits_{-h}^{\zeta} u\,dy = v_0 x \tag{2.2}$$

С учетом (2.2) динамические уравнения могут быть проинтегрированы

$$\begin{gathered} u=-\frac{\alpha'}{4\nu\rho}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{y=\zeta}\frac{h+y}{h+\zeta}(3y+h-2\zeta)-\frac{3v_0x(h+y)}{2(h+\zeta)^3}(y-h-2\zeta) \\ v=\frac{\alpha'(h+y)^2}{4\nu\rho(h+\zeta)}\left[(y-\zeta)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{y=\zeta}-\zeta'\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{y=\zeta}\frac{h+y}{h+\zeta}\right]- \\ -\frac{3v_0x\zeta'}{2(h+\zeta)^4}(y+h)^2(y-h-2\zeta)-\frac{3v_0(y-\zeta)}{2(h+\zeta)^3}\left[(h+\zeta)^2-\frac{1}{3}(y-\zeta)^2\right] \end{gathered} \tag{2.3}$$

Используя (2.2), (2.3), находим условие равновесия свободной поверхности

$$2\rho g(h+\zeta)\zeta' = -3\alpha'\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{y=\zeta}-\frac{6\nu\rho v_0 x}{(h+\zeta)^2} \tag{2.4}$$

Уравнение (2.4) и уравнение энергии (2.1), в которое подставлены выражения (2.3), образуют систему для определения искомых T и ζ. Они являются точными в рамках принятого приближения и описывают прогибы границы $|\zeta| \lesssim h$. Ограничимся рассмотрением случая малого искривления свободной поверхности $|\zeta| \ll h$. Согласно (2.4), $\zeta \to 0$ при $\varepsilon^{-1} \to 0$ и $\mu=\alpha'\Delta T/\rho g h^2 \to 0$. Построим решение в первом неисчезающем приближении по указанным параметрам. Полагая $\zeta=0$, находим из (2.3) выражения для скорости. Решение для температуры, согласно (2.1), дается в нулевом приближении формулой (1.2), откуда определяются производные температуры в (2.3). Линии тока даются выражением

$$x\,|\alpha'\Delta T h^2 y(y+h)^2+2\nu\rho v_0 l^2 y(3h^2-y^2)| = C$$

Полагая в правой части (2.4) $\zeta=0$, находим профиль свободной границы

$$(h+\zeta)^2 = h^2+\left(\frac{3\alpha'\Delta T}{2\rho g}-\frac{3\nu v_0 l^2}{gh^2}\right)\frac{x^2}{l^2} \tag{2.5}$$

где принято $\zeta(0)=0$. Согласно (2.5), только при выполнении условия

$$\alpha'\Delta T(h^2/l^2) = 2\nu\rho v_0 \tag{2.6}$$

нагрев и подача так согласованы, что верхняя граница слоя будет плоской и градиента давления в горизонтальном направлении не возникнет. Нетрудно проверить, что (2.6) совпадает с главным членом условия (1.5). При выполнении (2.6) для компонент скорости имеем

$$u=2v_0\frac{x(h+y)}{h^2},\quad v=-v_0\frac{y(y+2h)}{h^2}\sim u\frac{h}{l}$$

что совпадает с главными членами (1.4).

Дадим классификацию возможных режимов конвекции и соответствующих им профилей границы. На плоскости (v_0, ΔT) условие (2.6) представляет уравнение прямой. Для состояний, соответствующих точкам по разные стороны от нее, кривизна свободной границы будет разной. Если подача жидкости превышает то количество, которое может эвакуировать капиллярная сила, то в центре нагрева образуется «горб». Тогда градиент давления действует в ту же сторону, что и поверхностная сила. Напротив, если капиллярная сила может отвести большее количество жидкости, чем поступает через нижнюю границу слоя, то в стационарном состоянии в центре нагрева возникает впадина и градиент давления препятствует действию поверхностной силы.

Знаки кривизны границы слоя и профиля скорости $u(y)$ совпадают. Если $\alpha'\Delta Th^2<2\nu\rho v_0 l^2$, то всюду в слое течение происходит в направлении действия поверхностной силы, профиль скорости монотонный с выпуклостью, обращенной в сторону движения. В случае противоположного знака указанного неравенства картина оказывается более сложной. Если $1/3<2\nu\rho v_0 l^2/\alpha'\Delta Th^2<1$, то горизонтальная составляющая скорости жидкости не меняет знака и вогнутость ее профиля обращена в сторону движения. При $2\nu\rho v_0 l^2<\alpha'\Delta Th^2/3$ рассогласование подачи и нагрева столь велико, что поток расслаивается. В нижней части слоя жидкость движется к центру нагрева, в верхней – в направлении капиллярной силы. Обратный придонный поток обусловлен деформацией границы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Саночкин Ю. В.* О движении жидкости под воздействием поверхностной силы // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 3. С. 187–190.
2. *Chan C. L., Chen M. M., Mazumder J.* Asymptotic solution for thermocapillary flow at high and low Prandtl numbers due to concentrated surface heating // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1988. V. 110. № 1. P. 141–146.
3. *Саночкин Ю. В.* Термокапиллярная конвекция при неоднородном нагреве свободной поверхности жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 136–142.
4. *Найфе А. Х.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.

Москва

Поступила в редакцию 26.IX.1990