МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1992

УДК 532.5.031

Н. И. ГАЙДУКОВ

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ШАРОВОЙ МОЛНИИ В ВОЗДУШНОМ ПОТОКЕ ЛЕТЯЩЕЙ РАКЕТЫ

В литературе часто встречаются описания движения шаровой молнии большого радиуса в воздушных потоках летательных аппаратов. Широко известны случаи движения шаровой молнии в воздушном потоке двигателей многомоторного самолета, когда молния, размеры которой сравнимы с размерами самолета, захватывается источниками его двигателей и преследует его неотступно, двигаясь со скоростью 150–200 м/с, сохраняя при этом свою сферическую форму и постоянное расстояние от его хвостового оперения [1, 2]. Если бы вместо молнии радиуса 5 м двигался твердый шар того же радиуса, то для преследования им летящего самолета к нему потребовалось бы приложить силу порядка нескольких тонн [3]. Очевидно, что ни о каком преследовании самолета под действием гидродинамических сил в этом случае речь идти не может. Однако многочисленные наблюдения движения шаровой молнии большого радиуса в воздушных потоках летательных аппаратов дают основания считать, что в силу своей особой внутренней структуры она ведет себя в вязкой воздушной среде подобно твердому шару в идеальной несжимаемой жидкости [4]. Не касаясь физических причин такого поведения молнии в воздушной среде, примем это свойство как данное многочисленных экспериментов [5, 6]. В таком случае представляется возможность исследовать законы движения шаровой молнии в воздушных потоках, создаваемых различными летательными аппаратами.

Рассмотрим гидродинамическое взаимодействие шаровой молнии с летящей по определенной траектории под действием своих работающих двигателей ракеты, которую можно в первом приближении моделировать движущимся точечным источником переменной интенсивности.

Поскольку молния испытывает гидродинамическое взаимодействие с движущимся относительно неподвижной воздушной среды источником, то можно считать, что неподвижный источник и движущаяся относительно него молния находятся в непеременном по величине и направлению поступательном воздушном потоке, компоненты скорости которого v_x, v_y, v_z определяются кинематическим уравнением движения ракеты. Приняв во внимание это обстоятельство, будем описывать положение центра M шаровой молнии радиуса a сферическими координатами s, α, β неподвижной системы, в центре которой расположен точечный источник интенсивности γ, приходящейся на единицу телесного угла. Совместим с точкой M центр подвижной системы координат xyz, направив ось z к источнику, ось y – в направлении орта $\mathbf{e}_\beta$, ось x – в противоположную орту $\mathbf{e}_\alpha$ сторону.

Движение воздушного потока описывается уравнением [7]

$$\Delta L = -\frac{2\gamma}{s^2}\delta(r-s)\delta(\cos\theta-1) \tag{1}$$

где r, θ, φ – сферические координаты, определяемые относительно подвижной системы xyz с полярной осью z; L – потенциал скорости; $\delta(r-s)$ – дельта-функция Дирака.

Пусть молния движется со скоростью $\mathbf{u}$, где

$$u_x = -s\dot{\alpha}, \qquad u_y = s\dot{\beta}\sin\alpha; \qquad u_z = -\dot{s}$$

Граничное условие на поверхности молнии при $r=a$

$$v_r(a) = -s\dot{\alpha}\sin\theta\cos\varphi + s\dot{\beta}\sin\alpha\sin\theta\sin\varphi - \dot{s}\cos\theta \tag{2}$$

а в бесконечности

$$v_r(\infty) = -V_\alpha\sin\theta\cos\varphi + V_\beta\sin\theta\sin\varphi - V_s\cos\theta \tag{3}$$

где

$$V_\alpha = v_x\cos\alpha\cos\beta + v_y\cos\alpha\sin\beta - v_z\sin\alpha$$

$$V_\beta = -v_x\sin\beta + v_y\cos\beta$$

$$V_s = v_x\sin\alpha\cos\beta + v_y\sin\alpha\sin\beta + v_z\cos\alpha$$

Ищем решение уравнения (1) в виде [8]

$$\begin{aligned} L = {} & \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^{n} (c_{nm}\cos m\varphi + d_{nm}\sin m\varphi) P_{nm}(\cos\theta) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} r^{-(n+1)} \sum_{m=0}^{n} (a_{nm}\cos m\varphi + b_{nm}\sin m\varphi) P_{nm}(\cos\theta) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_n}{r^{n+1}} + b_n r^n\right) P_n(\cos\theta) - \frac{\gamma}{\sqrt{r^2-2rs\cos\theta+s^2}} \end{aligned} \tag{4}$$

где $P_n(\cos\theta)$ – полиномы Лежандра, $P_{nm}(\cos\theta)$ – присоединенные функции Лежандра; a_n, b_n, a_{nm}, b_{nm}, c_{nm}, d_{nm} – постоянные, подлежащие определению из граничных условий.

Представляя в решении (4) последний член при $r<s$ в виде ряда [8] и учитывая граничные условия (2) и (3), получаем решение

$$\begin{aligned} L = {} & \frac{a^3}{2r^2}(s\dot{\alpha}\sin\theta\cos\varphi - s\dot{\beta}\sin\alpha\sin\theta\sin\varphi + \dot{s}\cos\theta) - \\ & - \left(r + \frac{a^3}{2r^2}\right)(V_\alpha\sin\theta\cos\varphi - V_\beta\sin\theta\sin\varphi + V_s\cos\theta) - \\ & - \gamma\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{na^{2n+1}}{(n+1)r^{n+1}} + r^n\right]\frac{\bar{P}_n(\cos\theta)}{s^{n+1}} \end{aligned} \tag{5}$$

где $a \leqslant r < s$.

Давление

$$p=p_0-\frac{\rho v^2}{2}-\rho\frac{\partial L}{\partial t} \tag{6}$$

где p_0 – давление воздушной среды в бесконечности, ρ – плотность воздуха.

Используя (5) и (6), находим составляющие силы, действующей на шаровую молнию со стороны воздушного потока

$$f_s=-\frac{2}{3}\pi a^3\rho[\ddot{s}-s(\dot{\alpha}^2+\dot{\beta}^2\sin^2\alpha)]+2\pi a^3\rho\frac{dV_s}{dt}-$$
$$-\frac{4\pi a^3\rho\gamma V_s}{s^3}+\frac{2\pi a^3\rho\dot{\gamma}}{s^2}-\frac{4\pi\rho\gamma^2}{a^2}\left[\left(\frac{a}{s}\right)^5+2\left(\frac{a}{s}\right)^7\right] \tag{7}$$

$$f_\alpha=-\frac{2}{3}\pi a^3\rho\left[\frac{1}{s}\frac{d}{dt}(s^2\dot{\alpha})-s\dot{\beta}^2\sin\alpha\cos\alpha\right]+$$
$$+2\pi a^3\rho\frac{dV_\alpha}{dt}+\frac{2\pi a^3\rho\gamma}{s^3}(V_\alpha-s\dot{\alpha}) \tag{8}$$

$$f_\beta=-\frac{2}{3}\pi a^3\rho\left[\frac{1}{s\sin\alpha}\frac{d}{dt}(s^2\dot{\beta}\sin^2\alpha)\right]+$$
$$+2\pi a^3\rho\frac{dV_\beta}{dt}+\frac{2\pi a^3\rho\gamma}{s^3}(V_\beta-s\dot{\beta}\sin\alpha) \tag{9}$$

где все вычисления ограничены рядами не выше $(a/s)^7$.

Отметим, что первые члены в формулах (7)–(9) представляют собой составляющие инерционной силы [7], действующей на молнию при ее потенциальном обтекании, вторые члены этих формул описывают силу воздействия на молнию со стороны внешнего переменного поступательного воздушного потока, третьи члены описывают силу, возникающую в результате взаимодействия потока точечного источника и внешнего поступательного потока. Четвертый и пятый члены формулы (7) описывают силу радиального воздействия на молнию со стороны точечного источника переменной интенсивности. Последний член этой формулы представлен степенным рядом, где первый его член степени $(a/s)^5$ построен ранее в [11].

Используя (7)–(9) и полагая, что плотность плазмы молнии равна плотности воздуха [9, 10], запишем уравнения движения шаровой молнии в воздушном поле летящей ракеты в виде

$$\ddot{s}-s(\dot{\alpha}^2+\dot{\beta}^2\sin^2\alpha)=-\frac{2\gamma^2}{a^5}\left[\left(\frac{a}{s}\right)^5+2\left(\frac{a}{s}\right)^7\right]+\frac{\dot{\gamma}}{s^2}+\frac{dV_s}{dt}-\frac{2\gamma V_s}{s^3} \tag{10}$$

$$\frac{1}{s}\frac{d}{dt}(s^2\dot{\alpha})-s\dot{\beta}\sin\alpha\cos\alpha=\frac{dV_\alpha}{dt}+\frac{\gamma}{s^3}(V_\alpha-s\dot{\alpha}) \tag{11}$$

$$\frac{1}{s\sin\alpha}\frac{d}{dt}(s^2\dot{\beta}\sin^2\alpha)=\frac{dV_\beta}{dt}+\frac{\gamma}{s^3}(V_\beta-s\dot{\beta}\sin\alpha) \tag{12}$$

Полученная система трех обыкновенных дифференциальных уравнений (10)–(12) не разрешима в общем случае аналитическими методами, но ее можно решать при заданных начальных условиях численными методами, представив ее в виде системы шести уравнений первого порядка при заданных функциях времени v_x, v_y, v_z, γ.

При $V_\alpha=V_\beta=V_s=0$ уравнения (10)–(12) соответствуют уравнениям движения шаровой молнии в поле неподвижного точечного источника [12]. Частный случай решения уравнения (10) при $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=\text{const}$, $v_z=\text{const}$ рассмотрен в работе [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кузовкин А. С., Семенов А. Е.* НЛО – невидимая реальность? // Крылья Родины. 1988. № 9. С. 32–33.
2. *Коротков Б. А.* Внимание: шаровая молния! // Техника – молодежи, 1982. № 4. С. 58–59.

3. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1973. 536 с.
4. *Гайдуков Н. И.* Уравнения движения шаровой молнии в поле вихревой нити // Журн. техн. физики. 1986. Т. 56. № 9. С. 1797–1801.
5. *Гайдуков Н. И.* Уравнения движения шаровой молнии в поле движущегося источника // Журн. техн. физики. 1987. Т. 57. № 10. С. 1899–1903.
6. *Гайдуков Н. И.* Движение шаровой молнии в воздушном потоке через широкое круглое отверстие плоского экрана // Журн. техн. физики. 1989. Т. 59. № 2. С. 88–94.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
8. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
9. *Смирнов Б. М.* Проблема шаровой молнии. М.: Наука, 1988. 208 с.
10. *Смирнов Б. М.* Физика шаровой молнии // Успехи физ. наук. 1990. Т. 160. № 4. С. 1–45.
11. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 784 с.
12. *Гайдуков Н. И.* Уравнения движения шаровой молнии в поле точечного источника // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301. № 5. С. 1076–1079.

Москва

Поступила в редакцию
21.XI.1990