МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1992

УДК 532.3:532.529

А. В. ОСТРОУМОВ

О ПЛАВУЧЕСТИ ТЕЛ В ДИСПЕРСНЫХ СРЕДАХ

В работе исследуется вопрос о силах, действующих на тела, погруженные в дисперсные среды, и обсуждаются особенности гидростатики таких сред.

Рассмотрим следующую модельную задачу. Пусть в покоящейся жидкой или газообразной среде, имеющей плотность ρ, равномерно распределены с объемной концентрацией α дисперсные частицы, плотность которых $\rho_0 \neq \rho$. Тогда в поле силы тяжести будет происходить миграция частиц вниз, если $\rho_0 > \rho$, и вверх, если $\rho_0 < \rho$. Для определенности будем говорить об осаждении частиц, т. е. примем $\rho_0 > \rho$, но формулы будем при этом выписывать в виде, годном и для случая $\rho_0 < \rho$. Выясним, какая сила действует со стороны такой дисперсной среды на полностью погруженное в нее неподвижное твердое тело, характерные размеры которого в горизонтальном направлении много больше размеров частиц и расстояний между ними.

В случае, когда процесс осаждения частиц стационарный, в несущей фазе формируется поле гидростатического давления такое, как если бы ее плотность была равна

$$\rho_1 = \rho + \alpha(\rho_0 - \rho) \tag{1}$$

В результате на тело со стороны несущей фазы действует сила Архимеда

$$F_1 = -\rho_1 g V \tag{2}$$

где g – ускорение силы тяжести, а V – объем тела. Здесь и в дальнейших формулах направление вертикально вниз принято положительным. Формула (2) для гидростатической составляющей выталкивающей силы в дисперсной среде в отличие от гомогенной верна лишь в случае, когда размеры тела много меньше размеров «сосуда», в который оно погружено, что и будем предполагать в дальнейшем. В противном случае внесение в дисперсную среду тела, становящегося экраном для осаждающихся частиц, приведет к сильной неоднородности их концентрации в сосуде и формулы (1), (2) перестают быть справедливыми.

Непосредственное воздействие дисперсной фазы на тело осуществляется, во-первых, динамически, так как частицы тормозятся телом, передавая ему свой импульс, и, во-вторых, статически через вес осевших на тело частиц. За время t масса частиц, осевших на тело, будет

$$m = \alpha \rho_0 S |u| \varphi(t) \tag{3}$$

где S – площадь тела в плане (аналог миделевого сечения), u – скорость осаждения частиц, а функция $\varphi(t)$ характеризует закономерности процесса аккумуляции частиц телом. В зависимости от адгезионных свойств поверхностей частиц и тела, геометрии тела и т. д. вид функции $\varphi(t)$ может быть различным. Например, $\varphi(t) = t$ соответствует случаю, когда все осевшие на тело частицы прилипают к нему, а $\varphi(t) \equiv 0$ описывает ситуацию, когда тело не аккумулирует частицы. По смыслу функции $\varphi(t)$ она должна удовлетворять условиям $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant t$, $\varphi(0) = 0$.

Учитывая (1)–(3), получаем для сил статического и динамического воздействия дисперсных частиц на тело выражения

$$F_2 = \alpha(\rho_0 - \rho_1) g S |u| \varphi(t), \qquad F_3 = \alpha \rho_0 S u |u|$$

Кроме того, поскольку одновременно с потерей импульса частицами, тормозящимися телом, теряет импульс и вовлеченная ими в движение несущая фаза, на тело действует дополнительная сила (эффект присоединенной массы) $F_4 = C \alpha \rho S u |u|$, где C – коэффициент, зависящий от формы и ориентации частиц (для частиц в форме шариков $C = 0{,}5$).

В итоге получаем для полной силы, действующей на тело со стороны дисперсной среды,

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = -\rho_1 g V + \alpha(\rho_0 - \rho_1) g S |u| \varphi(t) + \alpha(\rho_0 + C\rho) S u |u| \tag{4}$$

Дисперсная среда	β	ν, м²/с	r, м	A, с	B, м/с	AB, м
Минеральные частицы – воздух	2160	$1{,}5\cdot10^{-5}$	$2{,}9\cdot10^{-5}$	$2{,}7\cdot10^{-2}$	0,26	$6{,}9\cdot10^{-3}$
Капельки воды – воздух	800	$1{,}5\cdot10^{-5}$	$4\cdot10^{-5}$	$1{,}9\cdot10^{-2}$	0,184	$3{,}5\cdot10^{-3}$
Минеральные частицы – вода	2,7	10^{-6}	$5{,}1\cdot10^{-5}$	$1{,}9\cdot10^{-3}$	$9{,}6\cdot10^{-3}$	$1{,}8\cdot10^{-5}$
Пузырьки воздуха – вода	$1.25\cdot10^{-3}$	10^{-6}	$6{,}1\cdot10^{-5}$	$4{,}2\cdot10^{-4}$	$8{,}0\cdot10^{-3}$	$3{,}4\cdot10^{-6}$

Как видно из структуры выражения (4), выталкивающая сила в дисперсной среде не подчиняется закону Архимеда. В частности, появляется зависимость этой силы от формы тела, его ориентации в пространстве и от времени.

Перепишем, учитывая (1), выражение (4) для F в виде

$$F=-\rho gV(1+\psi) \tag{5}$$

$$\psi=\alpha(\beta-1)(1-\sigma), \qquad \beta=\rho_0/\rho \tag{6}$$

$$\sigma=\frac{S|u|}{V}\left[(1-\alpha)\varphi(t)+\frac{(\beta+C)u}{(\beta-1)g}\right] \tag{7}$$

Так как величина $(-\rho gV)$ есть сила Архимеда в несущей фазе без частиц, то параметр ψ описывает эффект от присутствия дисперсных частиц. Из (5) следует, что при $\psi>0$ выталкивающая сила увеличивается в результате внесения в несущую фазу частиц, а при $\psi<0$ – уменьшается. Для $\beta>1$ будет $\psi>0$ при $\sigma<1$ и $\psi<0$ при $\sigma>1$. Для $\beta<1$, наоборот, $\psi<0$ при $\sigma<1$ и $\psi>0$ при $\sigma>1$. Появление параметра σ в (6) связано с учетом в (4) членов F_2, F_3, F_4, и, как видно из (6), пренебрежение этими составляющими при вычислении выталкивающей силы в дисперсной среде допустимо лишь в случае $\sigma\ll1$ (так как $0<\alpha<1$, $\varphi(t)\geqslant0$ и $u/(\beta-1)>0$, то всегда $\sigma>0$). В противном случае пренебрежение контактным воздействием дисперсных частиц на тело (т. е. допущение $\sigma=0$) может привести не только к количественным, но и к качественным ошибкам при оценке плавучести тел в дисперсных средах, поскольку плавучесть характеризуется знаком зависящей от σ величины

$$\gamma=\frac{\rho_*}{\rho}-1-\psi=\frac{\rho_*}{\rho}-1-\alpha(\beta-1)(1-\sigma)$$

где ρ_* – плотность тела (при $\gamma>0$ тело будет тонуть, при $\gamma<0$ – всплывать). Из (7) следует, что члены F_2, F_3, F_4 играют тем большую роль, чем меньше отношение V/S, характеризующее удлинение тела в вертикальном направлении.

Предположим далее, что дисперсные частицы имеют форму шариков ($C=0{,}5$) с радиусом r и скорость движения отдельной частицы можно вычислять по известной формуле Стокса, которая с учетом (1) имеет вид

$$u=\frac{2r^2g}{9\nu\rho}(\rho_0-\rho_1)=\frac{2r^2g}{9\nu}(1-\alpha)(\beta-1) \tag{8}$$

где ν – кинематическая вязкость несущей фазы. Формулой (8) можно пользоваться, если процесс осаждения достаточно медленный, а именно, число Рейнольдса $\mathrm{Re}=2r|u|/\nu\leqslant1$, и влиянием частиц друг на друга можно пренебречь, что допустимо при $\alpha\leqslant0{,}01$. Подставляя (8) в (7), получаем формулу

$$\sigma=\frac{S}{V}B[\varphi(t)+A]$$

$$A=\frac{2r^2(\beta+0{,}5)}{9\nu}, \qquad B=\frac{2r^2g}{9\nu}(1-\alpha)^2|\beta-1|$$

позволяющую проанализировать влияние различных факторов на значение параметра σ. При $V/S<AB$ будет $\sigma>1$ и, следовательно, гидростатическая составляющая выталкивающей силы (которую всегда учитывают) оказывается меньше составляющей (которой обычно пренебрегают), обусловленной контактным воздействием дисперсных частиц на тело, даже при отсутствии аккумуляции частиц телом. При $\varphi(t) \neq 0$ указанный эффект усиливается с течением времени, и в соответствии с неравенством

$$V/S < H_* = B[\varphi(t) + A] \tag{9}$$

условие $\sigma > 1$ будет выполняться для более широкого диапазона размеров и конфигураций тел.

В таблице приведены значения коэффициентов A и B для ряда часто встречающихся дисперсных сред, при этом радиус дисперсных частиц выбирался из условия $\mathrm{Re}=1$ и принималось $\alpha = 10^{-2}$, что соответствует расстоянию между частицами $L = 7r$. Кроме того, считали $g = 9{,}81$ м/с^2. Как видно из таблицы, динамическое контактное воздействие дисперсных частиц на тело в воздухе оказывается существенным уже при характерном размере V/S в несколько миллиметров, т. е. для довольно крупных тел. В случае воды этот размер значительно меньше и сравним с радиусом самих дисперсных частиц, что, однако, не вступает в противоречие со сделанным ранее предположением о соотношении размеров дисперсных частиц и тела, поскольку для проведенных выше рассуждений важно лишь, чтобы было $S^{1/2} \gg L, r$, при этом V/S может быть произвольным, в том числе и меньшим r. Такая ситуация возможна, например, в случае горизонтально ориентированных пластинчатых тел типа чешуек слюды, хлопьев пепла и т. п.

Процесс аккумуляции дисперсных частиц телом может весьма быстро привести к заметному увеличению порогового значения V/S, характеризуемого величиной H_* (см. (9)). Полагая, например, $\varphi(t) = t$, получаем $\sigma > 1$ при $V/S = 10^{-1}$ м в воздухе с минеральными частицами уже для $t > 0{,}4$ с. Оценка этого времени для случая воды с минеральными частицами дает при $V/S = 10^{-2}$ м $t > 1$ с. Таким образом, эффект увеличения подъемной силы, который стремятся достигнуть добавлением частиц утяжелителя в промывочную жидкость при обогащении легких минералов, для фракций $V/S \leqslant 10^{-2}$ м полностью пропадает в случае налипания частиц уже по истечении секунды, и в дальнейшем присутствие утяжелителя приводит к прямо противоположному эффекту.

Приведенные выше примеры показывают, что контактное воздействие дисперсных частиц может играть существенную роль в общем балансе сил, действующих на помещенные в дисперсную среду тела, поэтому описывающие это воздействие члены в уравнении импульсов нельзя отбрасывать без должного обоснования.

Автор признателен Ю. Д. Якимову за замечание относительно роли эффекта присоединенных масс в случае $\beta \leqslant 1$.

Москва

Поступила в редакцию
17.V.1988