**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1992**

УДК 533.72

Е. Б. ДОЛГОШЕИНА, А. В. ЛАТЫШЕВ, А. А. ЮШКАНОВ

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНОГО БГК-УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА В ЗАДАЧАХ О СКАЧКЕ ТЕМПЕРАТУРЫ И СЛАБОМ ИСПАРЕНИИ

Получено точное решение модельного уравнения Больцмана с оператором столкновений БГК (Бхатнагара, Гросса и Крука) в задачах о слабом испарении и скачках температуры и плотности разреженного газа в полупространстве. Методом Кейза найдены обобщенные собственные векторы соответствующего характеристического уравнения. Доказана теорема существования и единственности решения поставленных задач с граничными условиями на плоской поверхности и вдали от нее. Для этого развит аппарат диагонализации и факторизации векторной краевой задачи Римана – Гильберта с матричным коэффициентом, диагонализирующая матрица которого имеет точки ветвления в комплексной плоскости.

Скачок температуры (и плотности над испаряемой поверхностью) оказывает значительное влияние на протекание различных физических процессов. Учет этого эффекта необходим при определении теплопроводности газов, изучении термофореза и процессов испарения. Его изучению при различных условиях посвящена обширная литература (см., например, [1–23]). При этом можно выделить несколько подходов. В [4, 8, 22, 23] для решения точного или линеаризованного уравнения Больцмана используются приближенные методы. В [9, 10, 12, 15–17, 21] используется модельное уравнение Больцмана (БГК) и делаются попытки решить его точно или численно. Несколько особняком стоит метод Лойалки [11], основанный на своеобразном обобщении метода Максвелла. Попытка аналитически решить БГК уравнение Больцмана для задачи о температурном скачке предпринята в [13]. Однако решение [13] некорректно, ибо там используются два вектора, граничные значения которых в одной точке на полуоси имеют различные значения.

На основании результатов работ [12, 13] в [18] построена каноническая матрица с нормальной формой на бесконечности в краевой задаче Римана – Гильберта, к которой сводится задача о температурном скачке. Эта матрица существенно используется в настоящей работе.

Рассмотрим одноатомный газ, занимающий полупространство $x>0$ над плоской поверхностью конденсированной фазы. Вдали от поверхности (за пределами слоя Кнудсена) имеются нормальные к поверхности постоянные градиент температуры и поток массы (последний отличен от нуля только для случая проницаемой поверхности). Таким образом, функция распределения в приближении Чепмена – Энскога имеет следующий вид [6]:

$$f(x,\mathbf{C})=f_0\left[1+(kx-AC_x+\varepsilon_T)\left(C^2-\frac{5}{2}\right)+\varepsilon_n+\varepsilon_T+2UC_x\right]\quad(x\to\infty)\tag{1}$$

$$f_0=n_w\left(\frac{\beta_w}{\pi}\right)^{3/2}\exp(-\beta_w C^2),\quad A=\frac{3kl}{\sqrt{\pi}},\quad \mathbf{C}=\beta_w^{1/2}\mathbf{v}$$

$$k=\frac{1}{T_w}\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=\infty},\quad \varepsilon_n=\frac{n_w-n}{n_w},\quad \varepsilon_T=\frac{T-T_w}{T_w}$$

Здесь ε_n — скачок плотности, ε_T — скачок температуры, U — безразмерная массовая скорость газа, T_w — температура поверхности, n_w — плотность насыщенного пара в случае проницаемой поверхности.

При этом предполагается, что

$$lk \ll 1, \quad \varepsilon_n \ll 1, \quad \varepsilon_T \ll 1, \quad x \ll 1/k \tag{2}$$

где l — длина свободного пробега молекул газа. Условия (2) не являются независимыми, что будет ясно из дальнейшего.

Граничные условия на поверхности в случае полной аккомодации имеют следующий вид:

$$f(0, C_x) = f_0, \quad C_x > 0 \tag{3}$$

Отметим, что величина n_w в случае непроницаемой поверхности определяется из условия непротекания газа через поверхность.

Условие (2) позволяет использовать для описания газа линеаризованный вариант уравнения Больцмана. Интеграл столкновений представим в форме БГК

$$\begin{gathered} C_x \frac{\partial f}{\partial x} = \nu (f_{eq} - f) \\ f_{eq} = n_{eq} \left(\frac{m}{2\pi \varkappa T_{eq}} \right)^{3/2} \exp\left\{ - \frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{W}_{eq})^2}{2\varkappa T_{eq}} \right\} \end{gathered} \tag{4}$$

Здесь n_{eq}, T_{eq} и $\mathbf{W}_{eq}$ — соответственно плотность, температура и среднемассовая скорость газа.

Будем искать решение уравнения (4) с граничными условиями (1) и (3) в виде

$$f = f_0 \left[1 + (kx - AC_x) \left(\mathbf{C}^2 - \frac{5}{2} \right) + Y(x, C_x) \right]$$

и разложим Y по двум ортогональным направлениям

$$Y = Y_1(x, C_x) + (C_y^2 + C_z^2 - 1) Y_2(x, C_x)$$

Тогда относительно вектора-столбца Y получим уравнение

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} Y(x, \mu) + Y(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} Q(\mu) \int_{-\infty}^{\infty} Q^T(\mu') Y(x, \mu') e^{-\mu'^2} d\mu' \tag{5}$$

$$Y = \left\| \begin{matrix} Y_1 \\ Y_2 \end{matrix} \right\|$$

с граничными условиями

$$Y(0, \mu) = A\mu \left\| \begin{matrix} \mu^2 - \dfrac{3}{2} \\ 1 \end{matrix} \right\|, \quad \mu > 0 \tag{6}$$

$$Y(\infty, \mu) = \varepsilon_T \left\| \begin{matrix} \mu^2 - \dfrac{1}{2} \\ 1 \end{matrix} \right\| + (\varepsilon_n + 2U\mu) \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\| \tag{7}$$

$$Q(\mu) = \left\| \begin{matrix} \gamma \left(\mu^2 - \dfrac{1}{2} \right) & 1 \\ \gamma & 0 \end{matrix} \right\|, \quad \gamma^2 = \frac{2}{3}$$

Здесь символ T означает транспонирование.

Решение уравнения (5) будем искать в виде

$$Y_\eta(x,\mu)=\exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)F(\eta,\mu)$$

Подставляя это выражение в уравнение (5), получим характеристическое уравнение

$$(\eta-\mu)F(\eta,\mu)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta Q(\mu)n(\eta) \qquad (8)$$

$$n(\eta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-\mu^2)Q^T(\mu)F(\eta,\mu)d\mu \qquad (9)$$

где $n(\eta)$ — неособый нормировочный вектор.

Из уравнений (8) и (9) находим собственные векторы характеристического уравнения

$$F(\eta,\mu)=\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta Q(\mu)P\frac{1}{\eta-\mu}+\exp(\eta^2)Q^{-T}(\eta)\Lambda(\eta)\delta(\eta-\mu)\right]n(\eta) \qquad (10)$$

$$\Lambda(z)=I+z\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}Q^T(\mu)Q(\mu)\exp(-\mu^2)\frac{d\mu}{\mu-z}$$

Здесь символ P — главное значение интеграла, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, I — единичная матрица, $Q^{-T}(\mu)$ — обратная транспонированная матрица.

Можно показать, что дисперсионное уравнение

$$\lambda(z)\equiv\det\Lambda(z)=0$$

имеет на бесконечности нуль четвертого порядка, которому отвечают следующие решения уравнения (5):

$$Y_1=\left\|\begin{matrix}\mu^2-\frac{1}{2}\\ 1\end{matrix}\right\|,\quad Y_2=\left\|\begin{matrix}1\\ 0\end{matrix}\right\|,\quad Y_3=(\mu-x)Y_1,\quad Y_4=(\mu-x)Y_2$$

Теорема. Уравнение (5) с граничными условиями (6) и (7) имеет единственное решение, представимое в виде разложения по собственным векторам характеристического уравнения

$$Y(x,\mu)=\varepsilon_T\left\|\begin{matrix}\mu^2-\frac{1}{2}\\ 1\end{matrix}\right\|+(\varepsilon_n+2U\mu)\left\|\begin{matrix}1\\ 0\end{matrix}\right\|+\int\limits_0^{\infty}e^{-x/\eta}F(\eta,\mu)d\eta \qquad (11)$$

Доказательство. Подставим в разложение (11) $x=0$ и собственные векторы (10). Получим векторное характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши на полуоси $\mu>0$

$$\Psi(\mu)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}Q(\mu)\int\limits_0^{\infty}\frac{\eta n(\eta)}{\eta-\mu}d\eta+\exp(\mu^2)Q^{-T}(\mu)\Lambda(\mu)n(\mu) \qquad (12)$$

$$\Psi(\mu)=(A\mu-\varepsilon_T)\left\|\begin{matrix}\mu^2-\dfrac{3}{2}\\ 1\end{matrix}\right\|+(\varepsilon_T+\varepsilon_n+2U\mu)\left\|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\|$$

Умножим уравнение (12) слева на $\mu\exp(-\mu^2)Q^T(\mu)$ и воспользуемся граничными значениями на полуоси R_+ дисперсионной матрицы $\Lambda(z)$ и вектора

$$N(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\frac{\eta n(\eta)}{\eta-z}d\eta \tag{13}$$

аналитического в комплексной плоскости с разрезом вдоль R_+.

Получим однородную векторную краевую задачу Римана — Гильберта с матричным коэффициентом, которую после транспонирования запишем в виде

$$[2\sqrt{\pi}iN^+(\mu)-Q^{-1}(\mu)\Psi(\mu)]^T\Lambda^+(\mu)=$$
$$=[2\sqrt{\pi}iN^-(\mu)-Q^{-1}(\mu)\Psi(\mu)]^T\Lambda^-(\mu),\quad \mu>0 \tag{14}$$

Умножим уравнение (14) справа на $Q^{-1}(\mu)Q^{-T}(\mu)$ и, обозначив

$$W(z)=\Lambda(z)Q^{-1}(z)Q^{-T}(z)$$

получим следующую краевую задачу:

$$[2\sqrt{\pi}iN^+(\mu)-Q^{-1}(\mu)\Psi(\mu)]^TW^+(\mu)=$$
$$=[2\sqrt{\pi}iN^-(\mu)-Q^{-1}(\mu)\Psi(\mu)]^TW^-(\mu),\quad \mu>0 \tag{15}$$

Заметим, что матрица

$$S(z)=\left\|\begin{matrix}\dfrac{1}{\gamma} & \dfrac{1}{2}\left[r(z)-z^2-\dfrac{1}{2}\right]\\ -\dfrac{1}{\gamma} & \dfrac{1}{2}\left[r(z)+z^2+\dfrac{1}{2}\right]\end{matrix}\right\|$$

$$r(z)=\sqrt{w(z)},\quad w(z)=z^4-3z^2+25/4$$

приводит к диагональному виду матрицу $W(z)$

$$S(z)=W(z)S^{-1}(z)=\Omega(z)=\operatorname{diag}\{\Omega_1(z),\ \Omega_2(z)\}$$

$$\Omega_\alpha(z)=\frac{1}{4}\left[\frac{11}{2}-z^2+(-1)^{\alpha-1}r(z)+\frac{4}{\sqrt{\pi}}z\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-\tau^2)}{\tau-z}d\tau\right]$$

где $\Omega_\alpha(z)$ $(\alpha=1,2)$ — элементы диагональной матрицы $\Omega(z)$.

Матрица-функция $S(z)$ однозначна и аналитична в комплексной плоскости с разрезами Γ_1 и Γ_2, соединяющими соответственно точки ветвления $-\bar{a}$ и a, $-a$ и $\bar{a}$, являющиеся нулями полинома $w(z)$.

Для матричного коэффициента

$$G(\mu)=\Lambda^+(\mu)[\Lambda^-(\mu)]^{-1}=W^+(\mu)[W^-(\mu)]^{-1}$$

краевых условий (14) и (15) рассмотрим задачу факторизации

$$\Phi^+(\mu)=G(\mu)\Phi^-(\mu),\quad \mu>0 \tag{16}$$

Кроме того, для однозначности матрицы-функции $\Phi(z)$ потребуем, чтобы на разрезе $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$ выполнялось условие

$$\Phi^+(\tau)=\Phi^-(\tau),\quad \tau\in\Gamma \tag{17}$$

Будем искать решение задач (16) и (17) в виде

$$\Phi(z)=S^{-1}(z)U(z)S(z) \tag{18}$$

где $U(z)$ — новая неизвестная матрица.

Теперь краевые задачи (16) и (17) эквивалентны следующим двум краевым задачам:

$$U^+(\mu)=G_0(\mu)U^-(\mu),\ \mu>0 \tag{19}$$

$$U^+(\tau)T=TU^-(\tau),\ \tau\in\Gamma \tag{20}$$

$$G_0(\mu)=S(\mu)G(\mu)S^{-1}(\mu)=\Omega^+(\mu)[\Omega^-(\mu)]^{-1}$$

$$T=-S^+(\tau)[S^-(\tau)]^{-1}=\begin{Vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{Vmatrix}$$

Так как матрица $G_0(\mu)$ диагональна, удобно взять $U(z)$ также диагональной: $U=\operatorname{diag}\{U_1, U_2\}$.

Матричная краевая задача (19) эквивалентна двум скалярным краевым задачам

$$U_\alpha^+(\mu)=\frac{\Omega_\alpha^+(\mu)}{\Omega_\alpha^-(\mu)}U_\alpha^-(\mu),\quad \mu>0,\quad \alpha=1,2 \tag{21}$$

а задача (20) остается по существу векторной

$$U_1^\pm(\tau)=U_2^\mp(\tau),\ \ \tau\in\Gamma \tag{22}$$

Чтобы получить решение $\{U_1, U_2\}$ задач (21) и (22), рассматриваемых на основном и дополнительных разрезах, перейдем после очевидных преобразований к следующим двум краевым задачам, определенным лишь на основном разрезе:

$$\ln(U_1U_2)^+-\ln(U_1U_2)^-=2ia(\mu) \tag{23}$$

$$\frac{1}{r(\mu)}\ln\left(\frac{U_1}{U_2}\right)^+-\frac{1}{r(\mu)}\ln\left(\frac{U_1}{U_2}\right)^-=2i\frac{b(\mu)}{r(\mu)} \tag{24}$$

$$a(x)=\theta_1(x)+\theta_2(x)-2\pi,\quad b(x)=\theta_2(x)-\theta_1(x)$$

где $\theta_\alpha(x)$ — главное значение аргумента функции $\Omega_\alpha^+(x)$.

Система краевых задач (23) и (24) решается уже стандартно и ее решение имеет вид

$$U_\alpha^{(*)}(z)=\exp\left[A(z)+(-1)^{\alpha-1}r(z)B(z)\right],\ \ \alpha=1,2$$

$$A(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{a(x)\,dx}{x-z},\qquad B(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{b(x)\,dx}{r(x)(x-z)}$$

Однако это решение имеет существенную особенность на бесконечности. Чтобы исключить эту особенность, ищем $U_\alpha(z)$ в виде

$$U_1^{(0)}(z)=U_1^{(*)}(z)\varphi(z),\quad U_2^{(0)}(z)=U_2^{(*)}(z)/\varphi(z)$$

где $\varphi(z)$ — функция, аналитическая вне Γ (с существенной особенностью в бесконечности). При этом краевое условие (19) выполняется автоматически, а краевое условие (20) будет выполнено тогда и только тогда, когда на Γ $\varphi^+(\tau)=1/\varphi^-(\tau)$.

Возьмем $\varphi(z)$ в виде

$$\varphi(z)=\exp\left(-r(z)\int_0^{x_1}\frac{dx}{r(x)(x-z)}\right)$$

При любом выборе точки $x_1 \in R_+$ эта функция $\varphi(z)$ удовлетворяет перечисленным выше условиям, так что пара $\{U_1^{(0)}, U_2^{(0)}\}$ будет решением задач (19) и (20).

Чтобы функции $U_\alpha^{(0)}(z)$ $(\alpha=1, 2)$ не имели существенной особенности в бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{b(x)\,dx}{r(x)} = \int_0^{x_1} \frac{dx}{r(x)} \tag{25}$$

Эта задача является частным случаем проблемы обращения Якоби для эллиптических интегралов.

Заметим, что функция $U_2^{(0)}(z)$ имеет полюс первого порядка в точке x_1. Чтобы исключить эту особенность, переопределим решение $\{U_1^{(0)}, U_2^{(0)}\}$ следующим образом:

$$U_\alpha(z) = (z-x_1)U_\alpha^{(0)}(z), \quad \alpha=1, 2 \tag{26}$$

$$R(z) = \int_0^{x_1} \frac{dx}{r(x)\,(x-z)}$$

Итак, фактор-матрица $\Phi(z)$ построена и определяется выражением (18).

Теперь понадобится факторизация дисперсионной матрицы из [12]

$$\Lambda(z) = \Phi_0(z)\Phi_0^T(-z) \tag{27}$$

где $\Phi_0(z)$ — каноническая матрица с нормальной формой на бесконечности.

Подставим (27) в (14), затем полученное уравнение умножим справа на $\Phi_0^{-T}(z)$ и применим к полученному краевому условию транспонирование. Получим краевую задачу

$$\begin{aligned}&[\Phi_0^+(\mu)]^T[2\sqrt{\pi}iN^+(\mu) - Q^{-1}(\mu)\Psi(\mu)] = \\ &= [\Phi_0^-(\mu)]^T[2\sqrt{\pi}iN^-(\mu) - Q^{-1}(\mu)\Psi(\mu)], \quad \mu>0\end{aligned} \tag{28}$$

Учитывая поведение на бесконечности входящих в краевое условие (28) матриц и векторов, напишем его общее решение

$$2\sqrt{\pi}\,iN(z) = (Az-\varepsilon_T)\begin{Vmatrix}1/\gamma \\ 1\end{Vmatrix} - (\varepsilon_n+\varepsilon_T+2Uz)\begin{Vmatrix}0 \\ 1\end{Vmatrix} + \Phi_0^{-T}(z)\begin{Vmatrix}c_1 \\ c_2\end{Vmatrix} \tag{29}$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

Матрицу $\Phi_0^{-T}(z)$ найдем на основании формул (60) и (61) из работы [18]

$$\Phi_0^{-T}(z) = \sqrt{\frac{12}{5}}\,\Phi^{-T}(z)\,\Xi(-z) \tag{30}$$

где матрица $\Xi(-z)$ определяется выражением (62) из [13].

Сделаем полученное решение (29) корректным, т. е. определим неизвестные постоянные ε_T, ε_n, c_1 и c_2 так, чтобы это решение убывало на бесконечности как $1/z$. Тогда этот вектор можно будет принять в качестве вектора $N(z)$, определенного формулой (13).

Разложим функции $1/U_\alpha^{(0)}(z)$ $(\alpha=1,2)$ в ряды Лорана в окрестности бесконечности

$$\frac{1}{U_1^{(0)}(z)}=\frac{1}{p_0}+p_{-1}\frac{1}{z}+\ldots$$

$$\frac{1}{U_2^{(0)}(z)}=\frac{1}{q_0}+q_{-1}\frac{1}{z}+\ldots,\quad p_0=U_1^{(0)}(\infty),\quad q_0=U_2^{(0)}(\infty),\ p_0q_0=1$$

Подставляя эти разложения в формулы для элементов $\Phi_{ij}^{-T}(z)$ матрицы $\Phi^{-T}(z)$, произведем разложение последних в ряды Лорана в окрестности бесконечности. Подставим полученные разложения в равенство (30). Затем приравняем нулю коэффициенты при z и z^0 в верхней и нижней строках равенства (29). Получим систему уравнений, из которой найдем

$$c_1=-\frac{\sqrt{5}}{2}A,\quad c_2=\sqrt{2}\,U \tag{31}$$

$$\varepsilon_T=2U\sqrt{\frac{6}{5}}\,b_{11}q_0+A\left(-x_1-p_0p_{-1}+\sqrt{3}\,b_{12}q_0\right) \tag{32}$$

$$\varepsilon_n=2U\left[x_1+q_0q_{-1}+\sqrt{\frac{6}{5}}\,b_{11}(2p_0-q_0)\right]+A\left[x_1+p_0p_{-1}-\sqrt{3}\,b_{12}(q_0-2p_0)\right] \tag{33}$$

где коэффициенты b_{11} и b_{12} найдены в работе [18]

$$b_{11}=-\frac{\sqrt{5}}{3}\frac{x_1^2}{\gamma-\alpha}\left[\frac{\beta}{\gamma-\alpha}+\frac{2}{x_1}\right]q_0$$

$$b_{12}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{x_1^2}{\gamma-\alpha}\left[\frac{\beta}{\gamma-\alpha}+\frac{2}{x_1}+\frac{\beta}{\gamma+\alpha}\right](\gamma+\alpha)p_0$$

Таким образом, все свободные параметры вектора $N(z)$ определены однозначно формулами (32), (33) (коэффициенты ε_T и ε_n являются линейными функциями скорости испарения U при $k=0$). Коэффициенты непрерывного спектра $n(\mu)$ находятся также однозначно из формулы Сохоцкого

$$N^+(\mu)-N^-(\mu)=\mu n(\mu)$$

Теорема доказана.

Вернемся к физическим задачам. Обозначим через A_{-n}, B_{-n} и R_{-n} $(n=1, 2,\ldots)$ коэффициенты в разложении Лорана в окрестности бесконечности соответственно функций $A(z)$, $B(z)$ и $R(z)$. Выпишем формулы для вычисления этих коэффициентов

$$A_{-n}=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty a(x)x^{n-1}\,dx,\quad B_{-n}=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\frac{b(x)}{r(x)}x^{n-1}dx$$

$$R_{-n}=-\int\limits_0^{x_1}\frac{x^{n-1}dx}{r(x)}$$

Заметим, что обратная задача Якоби (25) есть не что иное, как равенство двух лорановских коэффициентов: $B_{-1}=R_{-1}$.

Теперь легко найти коэффициенты разложения в ряды Лорана функций $1/U_\alpha^{(0)}(z)$

$$q_0=\exp(B_{-2}-R_{-2}),\qquad q_0q_{-1}=-A_{-1}-B_{-3}+R_{-3}$$

$$p_0p_{-1}=-A_{-1}+B_{-3}-R_{-3}$$

На основании формул (32) и (33) выпишем отдельно решения двух задач – задачи о скачках температуры и плотности над испаряемой поверхностью и задачи о слабом испарении. Для решения первой задачи положим $U=0$. Получим

$$\varepsilon_T=\frac{3kl}{\sqrt{\pi}}[-x_1-p_0p_{-1}+\sqrt{3}\,b_{12}q_0]$$

$$\varepsilon_n=-\varepsilon_T+6\sqrt{\frac{3}{\pi}}\,klb_{12}p_0$$

Для скачка температуры имеем

$$\varepsilon_T=\frac{3kl}{\sqrt{\pi}}\left[x_1-2x_1\frac{\gamma^2+\beta\gamma x_1-\alpha^2}{(\gamma-\alpha)^2}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\left[a(x)-\frac{x^2b(x)}{r(x)}\right]dx+\int\limits_0^{x_1}\frac{x^2dx}{r(x)}\right]$$

Для скачка плотности

$$\varepsilon_n=-\varepsilon_T-\frac{12}{\sqrt{\pi}}klx_1\frac{\gamma^2+\beta\gamma x_1-\alpha^2}{(\gamma-\alpha)^2}\exp\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{xb(x)}{r(x)}dx-2\int\limits_0^{x_1}\frac{xdx}{r(x)}\right]$$

$$\alpha=-\frac{1}{\sqrt{6}}\left[r(x_1)+x_1^2+\frac{1}{2}\right],\qquad \beta=-\gamma x_1\left(1+\frac{x^{1}{}_{2}-{}^{3}/_{2})}{r(x_1)}\right)$$

Для решения задачи о слабом испарении положим в формулах (32) и (33) $k=0$ (тогда $A=0$) и получим

$$\varepsilon_T=2U\sqrt{\frac{6}{5}}\,q_0b_{11}$$

$$\varepsilon_n=2U\left[x_1+q_0q_{-1}+\sqrt{\frac{6}{5}}\,b_{11}(2p_0-q_0)\right.$$

Для скачка температуры имеем

$$\varepsilon_T=-2U\gamma x_1\frac{x_1\beta+2(\gamma-\alpha)}{(\gamma-\alpha)^2}\exp\left[-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{xb(x)}{r(x)}dx+2\int\limits_0^{x_1}\frac{xdx}{r(x)}\right]$$

Для скачка плотности

$$\varepsilon_n=-\varepsilon_T+2U\left\{x_1-2\gamma x_1\frac{x_1\beta+2(\gamma-\alpha)}{(\gamma-\alpha)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\left[a(x)+x^2\frac{b(x)}{r(x)}\right]dx-\int\limits_0^{x_1}\frac{x^2dx}{r(x)}\right\}$$

Приведем результаты численных расчетов. Для первой задачи $\varepsilon_T=2{,}15897kl$ и $\varepsilon_n=-1{,}23035kl$.

Для сравнения приведем некоторые численные значения коэффициента температурного скачка ε ($\varepsilon_T=\varepsilon kl$) из предыдущих работ $\varepsilon=1{,}841$ [1], 1,841 [2], 2,159 [3].

Для второй задачи $\varepsilon_T=-2U\cdot0{,}224365$ и $\varepsilon_n=-2U\cdot0{,}84350$. Приведем для сравнения результаты из работы [21]: $\varepsilon_T=-2U\cdot0{,}223375$, $\varepsilon_n=-2U\cdot0{,}842645$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Smoluchowski M. S.* Über Wärmeleitung in verdünnten Grasen // Ann. Phys. Chem. 1898. B. 64. S. 101–130.
2. *Knudsen M.* Die moleculare Wärmeleitung der Gase und der Akkomodationskorffizient // Ann. Phys. 1911. B. 34. № 4. S. 593–656.
3. *Welander P.* On the temperature jump in a rarefied gas // Ark. Fysik 1954. B. 7. № 6. P. 507–553.
4. *Gross E. P., Ziering S.* Heat flow between parallel plates // Phys. Fluids. 1959. V. 2. № 6. P. 701–712.
5. *Bassanini P., Cerignani C., Pagani C. D.* Comparison of kinetic theory analyses of linearized heat transfer between parallel plates // Int. J. Heat Mass Transfer. 1967. V. 10. № 4. P. 447–460.
6. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. Кинетическая теория. М.: Наука, 1967. 440 с.
7. *Loyalka S. K.* Momentum and temperature slip coefficients with arbitrary accomodation at the surface // J. Chem. Phys. 1968. V. 48. № 12. P. 5432–5436.
8. *Муратова Т. М., Лабунцов Д. А.* Кинетический анализ процессов испарения и конденсации // Теплофиз. высоких температур. 1969. Т. 7. № 5. С. 959–967.
9. *Thomas J. R., Jr.* Temperature slip problem with arbitrary accomodation at the surface // Phys. Fluids. 1973. V. 16. № 7. P. 1162–1164.
10. *Siewert C. E., Thomas J. R., Jr.* Half-space problems in the kinetic theory of gases // Phys. Fluids. 1973. V. 16. № 9. P. 1557–1559.
11. *Loyalka S. K.* Temperature jump in a gas mixture // Phys. Fluids. 1974. V. 17. № 5. P. 897–899.
12. *Kriese J. T., Chang T. S., Siewert C. E.* Elementary solutions of coupled model equations in the kinetic theory of gases // Int. J. Eng. Sci. 1974. V. 12. № 6. P. 441–470.
13. *Cercignani C.* Analytic solution of the temperature jump problem for the BGK model // Trans. Theory Stat. Phys. 1977. V. 6. № 1. P. 29256.
14. *Loyalka S. K., Siewert C. E., Thomas J. R., Jr.* Temperature jump problem with arbitrary accomodation // Phys. Fluids. 1978. V. 21. № 5. P. 854–855.
15. *Sone Y., Onishi Y.* Kinetic theory of evaporation and condensation. Hydrodynamic equation and slip boundary condition // J. Phys. Soc. Japan. 1978. V. 44. № 6. P. 1981–1994.
16. *Sone Y.* Theory of evaporation and condensation. Linear and nonlinear problems // J. Phys. Soc. Japan. 1978. V. 44. № 1. P. 315–320.
17. *Onishi Y.* Kinetic theory treatment of nonlinear half-space problem of evaporation and condensation // J. Phys. Soc. Japan. 1979. V. 46. № 1. P. 303–309.
18. *Siewert C. E., Kelly C. T.* An analytical solution to a matrix Riemann-Hilbert problem // Z. Ang. Math. und Phys. 1980. V. 31. № 3. P. 344–351.
19. *Aoki K., Cercignani C.* Evaporation and condensation on two paralled plates at finite Reynolds numbers // Phys. Fluids. 1983. V. 26. № 5. P. 1163–1164.
20. *Koffman L. D., Plesset M. S., Less L.* Theory of evaporation and condensation // Phys. Fluids. 1984. V. 27. № 4. P. 876–880.
21. *Thomas J. R., Jr., Valougeorgis D.* The F_N-method in kinetic theory. 1. Half-space problems // Trans. Theory Stat. Phys. 1985. V. 14. № 4. P. 485–496.
22. *Маясов Е. Г., Юшканов А. А., Яламов Ю. И.* О термофорезе нелетучей сферической частицы в разреженном газе при малых числах Кнудсена // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. № 6. С. 498–502.
23. *Гнедовец А. Г., Углов А. А.* О тепло- и массопереносе у границы раздела фаз при малых числах Кнудсена // Теплофизика высоких температур. 1989. Т. 27. № 3. С. 539–548.

Москва

Поступила в редакцию
13.III.1990