

УДК 533.6.011:533.686.4

© 1992 г.

А. А. МАРКОВ

**НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ВЯЗКИЙ УДАРНЫЙ СЛОЙ
ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ ДВИЖЕНИИ ЧЕРЕЗ НЕОДНОРОДНОСТЬ**

Влияние закрученности, неоднородности температуры и давления во внешнем потоке на течение в ударном слое изучалось в [1–6]. Отмечалось существенное влияние закрутки, изменения плотности, температуры, неравномерности поля скорости во внешнем потоке на режим обтекания. Нестационарный вдув в вязкий ударный слой рассматривался в [5]. Оценка времени выхода на стационарный режим обтекания и изучение особенностей протекания нестационарных процессов в ударных слоях представляет интерес при обработке данных экспериментов, полученных в установках с малым временем действия ($\sim 10^{-6}$ с).

В настоящей работе в рамках модели совершенного газа проведено численное моделирование нестационарных эффектов в вязком ударном слое около критической линии тока вблизи лобовой части вращающегося затупленного тела в неоднородном внешнем потоке с перепадом давления Δp_∞ , температуры ΔT_∞ и завихренности $\Delta \Omega$. Прослежена эволюция нелинейных возмущений, обусловленных прохождением нагретой зоны и сменой режима вдува. Применена дивергентная конечно-разностная схема второго порядка аппроксимации поперек ударного слоя, реализуемая векторными прогонами с учетом граничных условий на поверхности тела и за выделенной головной ударной волной.

Рассмотрим сверхзвуковой неоднородный поток, натекающий на гладкое затупленное тело с главными кривизнами K_1, K_2 в лобовой точке тела O . В случае $K_1=K_2$ тело осесимметричное и допускается его вращение вокруг оси симметрии x_1 с угловой скоростью Ω_1 . Предположим, что в окрестности оси x_1 параметры внешнего потока удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} p_\infty'(x_1, r) &= p_\infty'(x_1^\circ, r) + \Delta p_\infty'(x_1) \\ p_\infty'(x_1^\circ, r) &= p_{0,\infty}(x_1^\circ) + \frac{r^2 \Omega^2}{2} \rho_\infty'(x_1^\circ) \\ \rho_\infty'(x_1) &= \rho_\infty'(x_1^\circ) + \Delta \rho_\infty'(x_1) \\ T_\infty'(x_1) &= T_\infty'(x_1^\circ) + \Delta T_\infty'(x_1) \\ h_\infty'(x_1) &= h_\infty'(x_1^\circ) + \Delta h_\infty'(x_1) \\ \text{rot } V_\infty' &= (\Omega, 0, 0) \end{aligned}$$

Приращения $\Delta \Omega', \Delta p_\infty', \Delta \rho_\infty', \Delta T_\infty', \Delta h_\infty'$ — непрерывные функции x_1 , равные нулю вне промежутка $[x_1^\circ, x_1^k]$ и постоянные внутри промежутка $[x_1^\circ + \delta, x_1^k - \delta]$. Здесь p, h, T, V_∞ — давление, энтальпия, температура и вектор скорости соответственно, Ω — угловая скорость вращения вокруг оси x_1 набегающего потока, штрих относится к размерным величинам. Параметры x_1°, x_1^k характеризуют протяженность зоны внешнего потока с заданными перепадами давления $\Delta p_\infty'$, плотности $\Delta \rho_\infty'$, температуры $\Delta T_\infty'$ и завихренности $\Delta \Omega$.

Используем следующие ниже безразмерные переменные:

$$u'(j) = u(j) V_\infty'(x_1^\circ), x_j' = R' x_j$$

$$\begin{aligned}\xi_j' &= R' \xi_j \quad (j=1, 2, 3), \quad t' = tR'/V_\infty'(x_1^\circ) \\ \rho' &= \rho_\infty'(x_1^\circ) \rho, \quad h' = V_\infty'^2(x_1^\circ) h \\ p' &= \rho_\infty'(x_1^\circ) V_\infty'^2(x_1^\circ) p, \quad T' = T_0'(x_1^\circ) T \\ \mu' &= \mu_0'(x_1^\circ) \mu, \quad \lambda' = \mu'/Pr, \quad r' = \sqrt{x_2'^2 + x_3'^2}\end{aligned}$$

Здесь x_1, x_2, x_3 — декартовы координаты с центром в лобовой точке O тела, ξ_1, ξ_2, ξ_3 — криволинейные координаты, связанные с поверхностью тела; ξ_1, ξ_2 отсчитываются от точки O вдоль линий кривизны, если $R_1 \neq R_2$, (R_1, R_2 — радиусы кривизны в точке O) и ξ_1 отсчитывается вдоль образующей тела вращения, ξ_2 — азимутальная переменная, если $R_1 = R_2$; ξ_3 — расстояние вдоль внешней нормали к поверхности тела (на поверхности тела $\xi_3 = 0$); $u(j)$ — физические контравариантные составляющие вектора скорости в системе координат ξ_j ; μ, λ — коэффициенты вязкости и теплопроводности, пропорциональные T^* ($\omega = 0,5-0,8$), Pr — число Прандтля, T_0 — температура торможения.

Имеем следующую связь между энтальпией и температурой

$$h = K_T T, \quad K_T = \frac{1}{2} + \frac{1}{(\gamma-1)M_\infty^2(x_1^\circ)}$$

Предполагаем, что до момента $t=0$ тело обтекалось стационарным потоком с параметрами

$$V_\infty = 1, \quad \rho_\infty = 1, \quad M_\infty(x_1^\circ) \quad (1)$$

$$p_\infty = \frac{1}{\gamma M_\infty^2(x_1^\circ)} + \frac{r^2 \Omega^2}{2}; \quad h_\infty = \frac{1}{(\gamma-1)M_\infty^2(x_1^\circ)}$$

В момент времени $t=0$ головная ударная волна входит в зону неоднородности с безразмерными параметрами $\Delta\rho_\infty, \Delta\rho_\infty, \Delta T_\infty, \Delta h_\infty, \Delta\Omega$. В момент $t=t_k$ головная ударная волна выходит в область равномерного потока, соответствующего начальному моменту времени.

Исследование развития нелинейных возмущений в ударном слое, которые обусловлены неоднородностями внешнего потока и вдувом газа с поверхности тела в ударный слой, проведем на основе уравнений нестационарного вязкого ударного слоя, дополненных модифицированными соотношениями Ренкина — Гюгонно за головной ударной волной [5] и граничными условиями на поверхности тела

$$u(1) = u_*, \quad u(2) = \Omega_1 \xi_2, \quad u(3) = w_*, \quad T = T_w$$

Величины u_*, w_* — характеризуют вдув (отсос) газа, T_w — заданная температура поверхности тела.

В начальный момент $t=0$ задаются распределения газодинамических величин и отход Δ° ударной волны, соответствующие стационарному обтеканию (1).

Ищем приближенное решение уравнений вязкого ударного слоя в виде разложений [6]

$$\begin{aligned}u(1) &= \xi_1(u_0''(\xi_3, t) + \dots) \quad (2) \\ u(2) &= \xi_2(v_0''(\xi_3, t) + \dots), \quad u(3) = w_0''(\xi_3, t) + \dots \\ p &= p_0''(\xi_3, t) + \xi_1^2 \left(\frac{p_1''}{2} + \dots \right) + \varepsilon_\alpha \xi_2^2 \left(\frac{p_2''}{2} + \dots \right) \\ \rho &= \rho_0''(\xi_3, t) + \dots, \quad h = h_0''(\xi_3, t) + \dots\end{aligned}$$

Здесь $\xi_\alpha = \xi_1$, $p_2 = 0$, $\varepsilon_\alpha = 0$, если $K_1 = K_2$, и $\xi_\alpha = \xi_2$, $\varepsilon_\alpha = 1$, если $K_1 \neq K_2$. Точками в разложениях отмечены величины, стремящиеся к нулю при $\xi_1 \rightarrow 0$, $\xi_\alpha \rightarrow 0$.

Введем обозначения. Если $\varepsilon_\alpha = 0$, то

$$u_0 = \frac{u_0''}{\sqrt{g_{11}}}, \quad v_0 = \frac{v_0''}{\sqrt{g_{11}}}, \quad w_0 = w_0''$$

$$H_0 = h_0 + \frac{w_0^2}{\gamma}, \quad \rho_0 = \rho_0'' g_{11}, \quad \mu_0 = \mu_0'' g_{11}$$

$$p_k = p_k'' g_{11}, \quad (k=0, 1)$$

Если $\varepsilon_\alpha = 1$, то штрихи в формулах (2) следует опустить. Система уравнений для главных членов разложений может быть записана в виде (индекс «ноль» опущен)

$$\frac{\partial E(f)}{\partial t} + \frac{\partial A(f)}{\Delta \partial z} + B(f) = \frac{\partial}{\partial z} C(f) \frac{\partial f}{\partial z} \quad (3)$$

$$\frac{1}{\Delta} \frac{\partial p_1}{\partial z} = 2K_1 \rho (u^2 + w^2 (1 - \varepsilon_\alpha))$$

$$\frac{1}{\Delta} \frac{\partial p_2}{\partial z} = 2K_2 \rho v^2 \varepsilon_\alpha, \quad p = \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \rho h$$

Здесь $f = (u, v, w, \rho, h)^T$, $z = \xi_3 / \Delta(t)$; векторы E , A , B и матрица C — функции вектора f .

В случае $K_1 = K_2$ имеем

$$E_1 = \rho u, \quad E_2 = \rho v, \quad E_3 = \rho w, \quad E_4 = \rho, \quad E_5 = \rho \left(\frac{h}{\gamma} + \frac{w^2}{2} \right)$$

$$A_1 = \rho u w, \quad A_2 = \rho v w, \quad A_3 = \rho w^2 + p, \quad A_4 = \rho w, \quad A_5 = \rho w H$$

$$B_1 = p_1 + \rho (3u^2 + 2uw - v^2), \quad B_2 = 2\rho w$$

$$B_3 = 2\rho v (2u + w), \quad B_4 = 2\rho u$$

$$B_5 = 2\rho u H - \frac{4}{3\Delta} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu}{\text{Re}_0} w \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$C_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad C_{11} = C_{22} = \frac{\mu}{\Delta \text{Re}_0}, \quad C_{33} = \frac{4}{3} C_{11}$$

$$C_{44} = 0, \quad C_{55} = \frac{C_{11}}{\text{Pr}}, \quad \text{Re}_0 = \frac{\rho_\infty' V_\infty' R'}{\mu_\infty'} \left(\frac{T_\infty'}{T_0'} \right)^\omega$$

Условия на поверхности тела принимают вид

$$z=0, \quad u=u_*, \quad v=\Omega_1, \quad w=w_*, \quad h=h_w \quad (4)$$

Соотношения на выделенной головной ударной волне примем в форме [5]

$$z=\Delta: \quad u - \mu_* \frac{\partial u}{\partial z} = K_1 - \kappa_1 w, \quad v - \mu_* \frac{\partial v}{\partial z} = \Omega$$

$$\rho(w - \varphi) = \rho_\infty (w_\infty - \varphi) = M \quad (5)$$

$$p + M(w - \varphi) - \mu_* \frac{\partial w}{\partial z} = p_{0\infty} + \Delta p_\infty + M^2$$

$$\begin{aligned}
& h + \frac{(w-\dot{\varphi})^2}{2} - \frac{\mu_s}{M}(w-\dot{\varphi}) \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\lambda_s}{M} \frac{\partial h}{\partial z} = h_{0\infty} + \Delta h_{\infty} + \\
& + \frac{(w_{\infty}-\dot{\varphi})^2}{2}; \quad p_1 = \mu_s \kappa_1^2 \frac{\partial w}{\partial z} - 2\mu_s \kappa_1 \frac{\partial u}{\partial z} + \Omega^2 + \left(1 - \frac{1}{\rho_s}\right) K_{1s}^2 \\
& \mu_s = \frac{4}{3} \frac{\mu}{\Delta \text{Re}_0}, \quad \lambda_s = \frac{\lambda}{\text{Pr Re}_0}, \quad p_{0\infty} = \frac{1}{\gamma M_{\infty}^2(x_1^{\circ})} \\
& \rho_{\infty} = 1 + \Delta \rho_{\infty}, \quad h_{0\infty} = h_{\infty} + \frac{1}{(\gamma-1)M_{\infty}^2(x_1^{\circ})}, \quad K_{js} = \frac{1}{R_j + \Delta} \\
& \kappa_j = K_j - K_{js} \quad (j=1, 2)
\end{aligned}$$

Здесь Δ — отход ударной волны, $\dot{\varphi}(t)$ — скорость фронта волны при $\xi_1=0$, $\xi_{\alpha}=0$.

По мере проникновения головной ударной волны в неоднородную зону изменяются величины Δp_{∞} , $\Delta \rho_{\infty}$, Δh_{∞} , входящие в формулы (5) и, следовательно, меняются числа Маха и Рейнольдса.

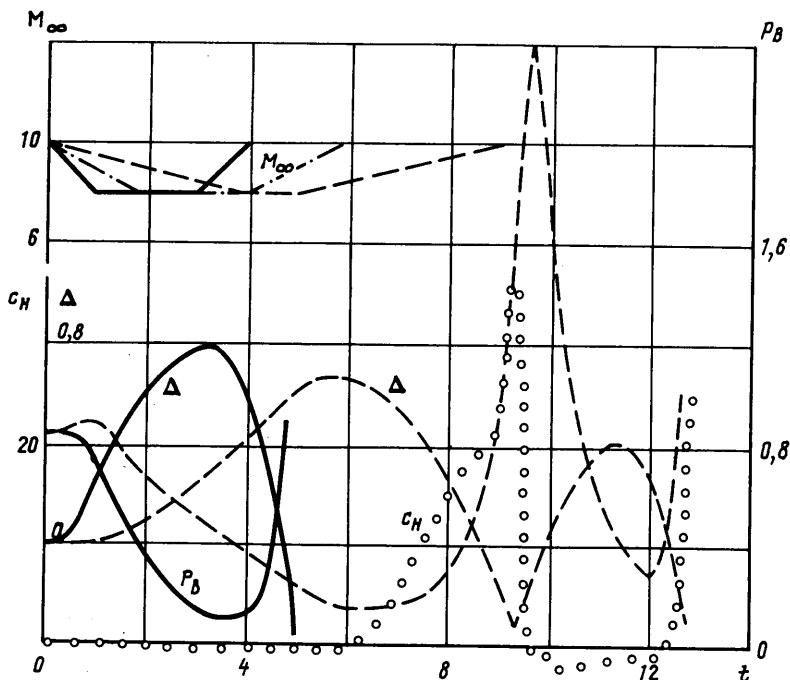
Для модели совершенного газа имеем

$$\begin{aligned}
M_{\infty}^2(t) &= M_{\infty}^2(0) \frac{T_{\infty}'(0)}{T_{\infty}'(t)} = M_{\infty}^2(0) \frac{h_{\infty}(0)}{h_{\infty}(t)} \\
\text{Re}_0(t) &= \text{Re}_0(0) \left[\frac{h_{\infty}(0)}{h_{\infty}(t)} \right]^{\omega}, \quad M_{\infty}(t) = M_{\infty}(0) + \Delta M_{\infty}(t) \\
h_{\infty}(t) &= h_{\infty}(0) + \Delta h_{\infty}(t) = \frac{1}{(\gamma-1)M_{\infty}^2(0)} + \Delta h_{\infty}(t) \\
p_{\infty}(t) &= p_{\infty}(0) + \Delta p_{\infty}(t) = \frac{1}{\gamma M_{\infty}^2(0)} + \Delta p_{\infty}(t) \\
\rho_{\infty}(t) &= 1 + \Delta \rho_{\infty}(t), \quad p_{\infty}(t) = \frac{(\gamma-1)}{\gamma} \rho_{\infty}(t) h_{\infty}(t)
\end{aligned}$$

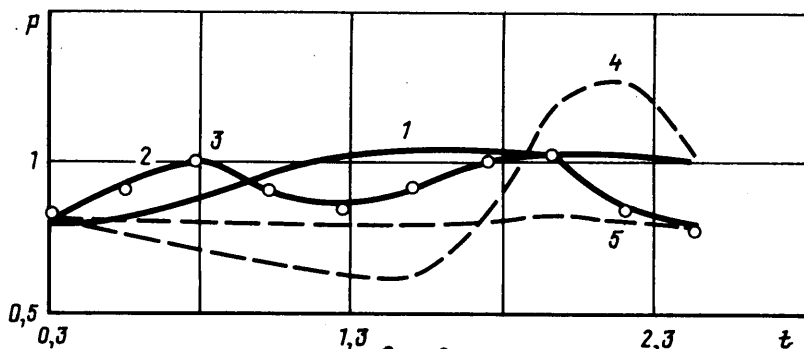
Удобно выразить величины $M_{\infty}(t)$, $\text{Re}_0(t)$, $p_{\infty}(t)$, $\rho_{\infty}(t)$, $h_{\infty}(t)$ в виде функций двух параметров $\Delta M_{\infty}(t)$ и $\Delta p_{\infty}(t)$, задавая которые можно моделировать нагретые зоны во внешнем потоке с различными перепадами давления, плотности и температуры. Имеем

$$\begin{aligned}
M_{\infty}(t) &= M_{\infty}(0) + \Delta M_{\infty}(t), \quad p_{\infty}(t) = \frac{1}{\gamma M_{\infty}^2(0)} + \Delta p_{\infty}(t) \\
h_{\infty}(t) &= \frac{1}{(\gamma-1)M_{\infty}^2(t)}, \quad \text{Re}_0(t) = \text{Re}_0(0) \left[\frac{M_{\infty}(t)}{M_{\infty}(0)} \right]^{\omega} \\
\rho_{\infty}(t) &= \frac{M_{\infty}^2(t)}{M_{\infty}^2(0)} + \gamma \Delta p_{\infty}(t) M_{\infty}^2(t)
\end{aligned}$$

Система уравнений вязкого ударного слоя (3) с граничными условиями (4), (5) и начальными данными стационарного обтекания тела однородным внешним потоком (1) решалась численным методом [5] на основе конечно-разностных аппроксимаций второго порядка поперек ударного слоя. Расчет начальных данных проводился итерационным методом [6].



Фиг. 1



Фиг. 2

Некоторые результаты расчетов, представленные ниже, относятся к случаю стационарных начальных данных: $\omega=0,5$, $\gamma=1,4$, $M_\infty(0)=10$, 4 , $Re_0(0)=50$, $h_w=0,1$, $Pr=0,71$.

Рассмотрены различные неоднородные зоны:

$$M_\infty(t) = M_\infty(0) + \Delta M_\infty(t), \quad \Delta p_\infty = 0.$$

$$\Delta M_\infty(t) = -tk, \quad 0 \leq t < 2/k$$

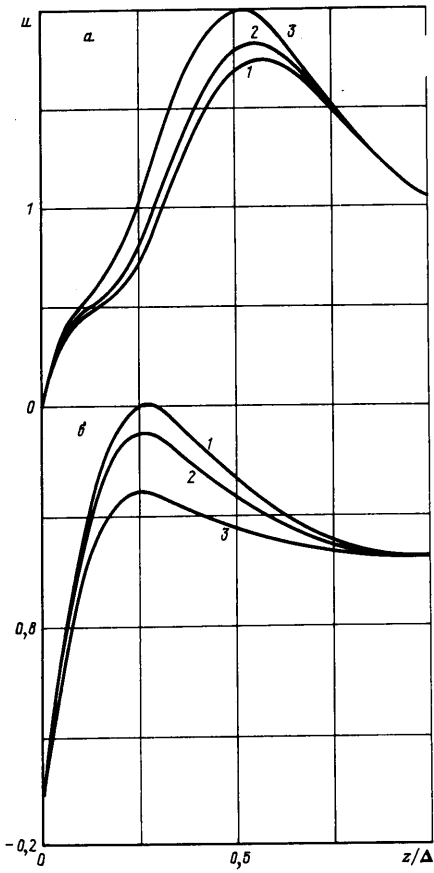
$$\Delta M_\infty(t) = -2, \quad 2/k \leq t < T$$

$$\Delta M_\infty(t) = (t-T) - 2, \quad T \leq t < T + 2/k$$

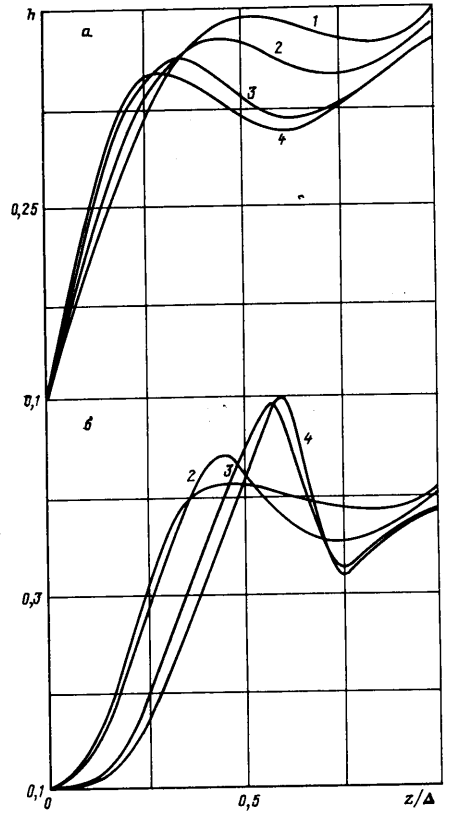
$$\Delta M_\infty(t) = 0, \quad T + 2/k \leq t$$

Зависимости $M_\infty(t)$ показаны на фиг. 1 (сплошные линии $k=2$, $T=2$, штриховые $k=0,5$, $T=1$, штрих-пунктир $k=1$, $T=2$).

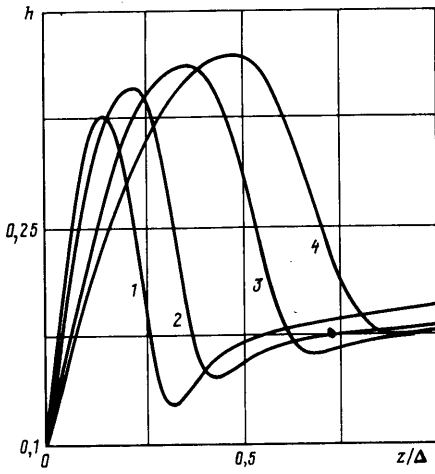
На фиг. 1-6 представлены результаты расчетов прохождения вращающимся телом ($\Omega_1=0,5$) нагретой зоны с $\Delta p_\infty=0$ в случае вдува $u_* = w_* = 0,03$.



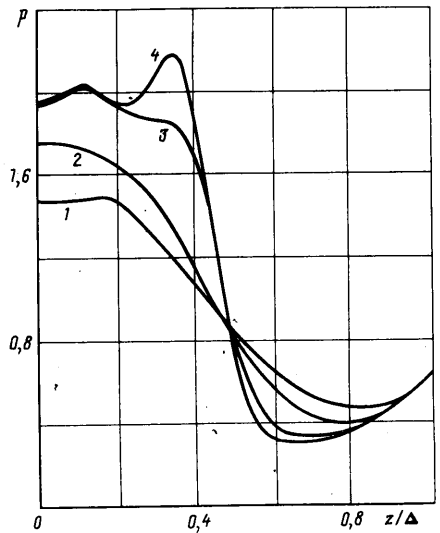
Фиг. 3



Фиг. 5



Фиг. 4



Фиг. 6

Фиг. 1 иллюстрирует изменения во времени отхода $\Delta(t)$ ударной волны, давления на теле $p_b(t)$ и теплового потока $c_n(t)$

$$c_n(t) = \frac{1}{Re_0(0)} \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial z}$$

Сплошные линии относятся к неоднородности с параметрами $k=2$, $T=2$, пунктир и точки — к неоднородности с $k=0,5$, $T=1$.

Прохождение телом нагретой зоны сопровождается ростом $\Delta(t)$ и убыванием $p_b(t)$. Характерный максимум величины $\Delta(t)$ достигается к моменту времени, когда промежуток постоянного значения $M_\infty(t)$ сменяется ростом этой величины, соответствующей выходу тела из области нагретой зоны. На этом промежутке времени возрастания $M_\infty(t)$ происходит рост величин $p_b(t)$ и $c_n(t)$. Толщина ударного слоя, достигнув максимального значения, начинает убывать и для вариантов с $k=1, 2$ в расчетах наблюдалось, что величина $\Delta(t)$ становилась близкой к нулю. Уменьшение временного шага не позволило преодолеть вычислительные трудности и продолжить расчет для больших времен в случае $k=1, 2$ (сплошные кривые Δ , p_b на фиг. 1). При медленном нарастании величины $M_\infty(t)$ ($k=0,5$) происходит сжатие ударного слоя до минимальной величины и последующий рост $\Delta(t)$ (штриховая кривая Δ на фиг. 1). Зона минимума $\Delta(t)$ сопровождается пиками $p_b(t)$ и $c_n(t)$ (штриховые кривые и точки на фиг. 1). Результаты расчета показали пульсирующий характер ударного слоя с затухающей амплитудой.

Фиг. 2 иллюстрирует влияние величин $p_\infty(t)$, $\Omega(t)$ на нестационарный вязкий ударный слой в случае неоднородности с параметрами

$$M_\infty(0)=4, k=0, 1, T=12 \quad (6)$$

Представлены изменения во времени давления на теле $p_b(t)$ (кривые 1—3) и давления за ударной волной (кривые 4, 5) для случая

$$w_\infty=0,05, \Omega_1=1, Re_0=50, h_w=0,1, \Omega(0)=0$$

Кривые 1, 4 соответствуют прохождению неоднородной зоны с перепадом давления $\Delta p_\infty(t)=0,005t$ и внешней завихренностью $\Delta\Omega(t)=t$ ($0 \leq t \leq 1$), $\Delta\Omega=0$ ($t > 1$). Кривые 2, 5 относятся к результатам расчета с $\Delta p_\infty=0$ при нестационарной внешней завихренности $\Omega(t)=t$ ($0 \leq t \leq 1$), $\Omega=1$ ($t > 1$). Точки 3 — данные расчетов прохождения нагретой зоны с параметрами (6) в случае нулевого перепада давления $\Delta p_\infty=0$ и $\Omega(t)=0$.

Фиг. 3, а иллюстрирует возникновение и развитие тангенциальной струи (кривые 1—3). Показаны распределения поперек ударного слоя касательной составляющей скорости $u(z, t_j)$ в моменты времени $t_1=3,94$, $t_2=4,06$, $t_3=4,3$. Кривые 1—3 на фиг. 3, б иллюстрируют убывание тангенциальной струи в моменты времени $t_1=6,02$, $t_2=6,14$, $t_3=6,38$. Аналогичные эффекты развития тангенциальной струи при прохождении других температурных неоднородностей отмечались в [4, 6].

На фиг. 4 показаны распределения энтальпии поперек ударного слоя в моменты времени $t_1=6,54$, $t_2=6,74$, $t_3=6,86$, $t_4=6,9$ (кривые 1—4). Можно отметить большие величины теплового потока и блокирование эффекта вдува на этом отрезке времени.

Данные на фиг. 5 относятся к результатам расчетов прохождения телом нагретой зоны с параметрами $k=0,1$, $T=1$. Кривые 1—4 на фиг. 5, а иллюстрируют распределения энтальпии $h(z, t_j)$ поперек ударного слоя в моменты времени $t_1=0,34$, $t_2=0,4$, $t_3=0,5$, $t_4=0,52$ в случае постоянного вдува $u_\infty=w_\infty=0,03$. Видно нарастание теплового потока $c_n(t)$ со временем. Кривые 1—4 на фиг. 5, б иллюстрируют возможность управления

нестационарным вязким ударным слоем и тепловым потоком к телу за счет переменного вдува. Приведены распределения $h(z, t_j)$ в моменты времени $t_1=0,34$, $t_2=0,4$, $t_3=0,5$, $t_4=0,52$ в случае возрастающего во времени вдува $w.=0,03+0,02t$ при прохождении телом нагретой зоны ($k=0,1$, $T=1$).

На фиг. 6 приведены распределения поперек ударного слоя давления $p(z, t_j)$ в моменты времени $t_1=0,34$, $t_2=0,4$, $t_3=0,5$, $t_4=0,52$ в случае переменного вдува ($u.=0,03$, $w.=0,03+0,01t$). Видно формирование зон сжатия и разрежения. Следует отметить заметное изменение давления поперек ударного слоя, указывающее на неприменимость модели тонкого вязкого ударного слоя для достаточно точного описания нестационарных процессов при рассмотренных неоднородностях во внешнем потоке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Желева И. М., Стулов В. П. Автомодельное решение уравнений закрученного движения запыленного газа // Аэродинамика входа тел в атмосферу планет. М.: Изд-во МГУ, 1983. С. 75–82.
2. Еремейцев И. Г., Пилюгин Н. Н. Трение и теплообмен в ламинарном и турбулентном пограничных слоях при обтекании осесимметричных тел неоднородным сверхзвуковым потоком // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 2. С. 65–72.
3. Головизнин В. П., Мишин Г. И., Серов Ю. Л., Явор И. П. Сверхзвуковое обтекание сферы в тепловой неоднородности // Журн. техн. физики. 1987. Т. 57. № 7. С. 1433–1435.
4. Головачев Ю. П., Леонтьев Н. В. Нестационарное обтекание сферы при сверхзвуковом движении через температурную неоднородность: Препринт № 1178. Л.: ФТИ им. А. Ф. Иоффе, 1987. 38 с.
5. Марков А. А. Вязкий ударный слой около критической точки вращающегося тела при нестационарном вдуве и охлаждении поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 5. С. 114–122.
6. Markov A. A. Unsteady viscous shock layer in nonhomogeneous upstream // Proceedings Soviet Union – Japan Symposium on Computational Fluid Dynamics. Khabarovsk, 9–16. XI. 1988. V. 3. P. 176–183.

Москва

Поступила в редакцию
26.X.1990