МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1992

УДК 532.68:532.516

С. А. ЧИВИЛИХИН

ПЛОСКОЕ КАПИЛЛЯРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С МНОГОСВЯЗНОЙ ГРАНИЦЕЙ В ПРИБЛИЖЕНИИ СТОКСА

Рассмотрен процесс релаксации к равновесной конфигурации изолированного объема вязкой несжимаемой ньютоновой жидкости под действием капиллярных сил. Жидкость имеет форму бесконечного цилиндра произвольной формы с гладкой компактной, вообще говоря, многосвязной границей. В ходе релаксации внутренние полости захлопываются, цилиндр асимптотически приобретает круговую конфигурацию. При описании течения использовано квазистационарное приближение Стокса [1]. Впервые предложенное в [2] это приближение применялось при расчете динамического краевого угла [3], схлопывания кругового капилляра [4] и полого цилиндра [5]. Аналогия между уравнениями гидродинамики в стоксовом приближении и уравнениями теории упругости позволила в [6] описать релаксацию односвязного цилиндра методом, близким к [7]. В настоящей работе развивается подход [8], основанный на [9, 10].

Показано, что истинное распределение давления доставляет минимум интегралу от квадрата давления по области при фиксированном интеграле от давления по границе. Получено явное выражение для давления в виде проекции обобщенной функции с носителем на границе на подпространство гармонических функций. Рассчитано поле скоростей на границе области. Найдена верхняя оценка для закона убывания периметра области и для времени, в течение которого число компонент связности границы остается неизменным.

1. Рассмотрим плоское течение вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости в области $g\subset R^2$ с гладкой компактной, вообще говоря, многосвязной границей $\gamma=U\gamma_j$ под действием капиллярных сил. Уравнение движения в квазистационарном приближении Стокса [1], уравнение неразрывности и граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=0,\qquad \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\beta}=0,\qquad \mathrm{x}\in g \tag{1.1}$$

$$P_{\alpha\beta}n_\beta=-\sigma n_\alpha\frac{\partial n_\beta}{\partial x_\beta},\qquad \mathrm{x}\in\gamma \tag{1.2}$$

$$P_{\alpha\beta}n_\beta=-P\delta_{\alpha\beta}+\mu\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha}\right)$$

Здесь $P_{\alpha\beta}$ — ньютоновый тензор напряжений; v_α, n_α — компоненты скорости и вектора внешней нормали к границе; P — давление; μ, σ — коэффициенты динамической вязкости и поверхностного натяжения. По дважды повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Движение границы определяется из условия равенства нормальной скорости границы V и нормальной компоненты скорости жидкости на границе

$$V=v_\beta n_\beta,\qquad \mathrm{x}\in\gamma \tag{1.3}$$

Поскольку в уравнении движения отсутствует нестационарный член, в начальный момент задается лишь форма границы $\gamma=\gamma^\circ$, $t=0$.

Рассмотрим условия применимости квазистационарного приближения Стокса в данной задаче. Отсутствие конвективного члена в уравнении движения приводит к требованию малости числа Рейнольдса $\mathrm{Re}=v\Lambda/\nu$ (v — характерная скорость, Λ — пространственный масштаб области g, ν — кинематическая вязкость). Нестационарный член в уравнении движения может быть отброшен, если за время релаксации поля скоростей $T_*\sim\Lambda^2/\nu$ форма границы, а следовательно, и силы поверхностного натяжения изменяются незначительно: $vT_*\ll\Lambda$, что вновь приводит к условию $\mathrm{Re}\ll1$. Тогда условие применимости (1.1) приобретает вид $\Lambda\ll\mu^2/(\rho\sigma)$. Но даже при выполнении этого требования уравнение движения в форме (1.1) оказывается несправедливым в окрестности начального момента времени. Отбрасывание нестационарного члена представляет собой сингулярное возмущение уравнения движения по временной переменной, что приводит к возникновению временно́го пограничного слоя продолжительностью T_*, в течение которого начальное поле скоростей релаксирует к квазистационарному. Условие малой релаксации области за этот интервал времени $v^\circ T_*\ll\Lambda$ обеспечивается требованием малости числа Рейнольдса Re°, построенного по характерной начальной скорости.

Под действием сил поверхностного натяжения область g приобретает форму круга равновеликой площади за характерное время $T\sim\mu\Lambda/\sigma$. Течение жидкости можно считать ньютоновским, если время релаксации упругих напряжений $T_{**}\ll T$. Для тела Максвелла $T_{**}\sim\mu/G$ (G — модуль сдвига), что приводит к требованию $\Lambda\gg\sigma/G$.

Итак, условия применимости квазистационарного приближения Стокса в рассматриваемой задаче имеют вид

$$\frac{\sigma}{G}\ll\Lambda\ll\frac{\mu^2}{\rho\sigma},\qquad v^0\ll\frac{\nu}{\Lambda} \tag{1.4}$$

2. Пусть $\varkappa_\alpha$, ψ — гладкие поля в g, связанные соотношением

$$\frac{\partial\varkappa_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial\varkappa_\beta}{\partial x_\alpha}=\psi\delta_{\alpha\beta} \tag{2.1}$$

Умножая уравнение движения (1.1) на $\varkappa_\alpha$, интегрируя по g и используя (1.2), (2.1), получаем

$$\langle P\psi\rangle_g=(\sigma l/2S)\langle\psi\rangle_\gamma \tag{2.2}$$

Здесь S, l — площадь и периметр области; $\langle\ \rangle_g$, $\langle\ \rangle_\gamma$ — средние по области и ее границе. Полагая в (2.2) $\psi=1$, находим

$$\langle P\rangle_g=\sigma l/2S \tag{2.3}$$

что может быть получено непосредственно из [11]. Согласно (1.1), (2.1), P, ψ — гармонические функции. Вводя в g полный набор гармонических ортонормированных функций ψ_k, $\langle\psi_k\psi_n\rangle=\delta_{kn}$ и используя (2.2), (2.3), получаем

$$P=\langle P\rangle_g\Sigma\langle\psi_k\rangle\psi_k \tag{2.4}$$

Из (2.4) видно, что $\langle P\rangle_\gamma\geqslant\langle P\rangle_g$.

Полный набор аналитических функций χ в области с многосвязной границей состоит из функций вида z^k, $(z-z_j^\circ)^{-k}$, где z_j° — фиксированные точки, каждая из которых расположена в одной из внутренних полостей, ограниченных контурами [12]. Ортогонализируя по Граму — Шмидту полный набор гармонических функций $\mathrm{Re}\,\chi_k$, $\mathrm{Im}\,\chi_k$, получаем искомую систему функций ψ_k.

Представляя (2.1) в виде

$$d(\varkappa_1+i\varkappa_2)=(\psi+i\Omega)dz$$

где Ω — сопряженная с ψ гармоническая функция, для каждой ψ_k определим $\varkappa_{\alpha k}$ через интеграл по комплексной кривой.

Заметим, что (2.4) доставляет минимум функционалу

$$\langle P^2\rangle_g=\Sigma C_k^2,\quad \langle P\rangle_\gamma=\Sigma C_k\langle\psi_k\rangle_\gamma=\text{const},\quad P=\Sigma C_k\psi_k$$

В пространстве функций, гармонических на g (2.4), представляет собой ближайший к началу координат (по метрике $L_2(g)$) элемент гиперплоскости $\langle P\rangle_\gamma=\text{const}$.

С другой стороны, вводя обобщенную функцию (простой слой)

$$\delta_s(\mathbf{x})=\int dl_y\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

видим, что P представляет собой проекцию δ_s на подпространство гармонических функций

$$P=\sigma\Sigma\langle\psi_k\delta_s\rangle\psi_k$$

Уравнения движения, неразрывности (1.1) и граничные условия (1.2) могут быть получены из вариационного принципа [13]

$$\delta\left[\frac{1}{4\mu}\int(P_{\alpha\beta}P_{\alpha\beta}-2P^2)dS+\sigma\int v_\alpha n_\alpha\frac{\partial n_\beta}{\partial x_\beta}dl\right]=0 \tag{2.5}$$

Покажем, что основное соотношение (2.2) также вытекает из (2.5). Поскольку (2.5) справедливо при произвольных вариациях давления и скорости, выберем такие δP, σv_α, которые оставляют $P_{\alpha\beta}$ неизменным

$$\mu\left(\frac{\partial\delta v_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial\delta v_\beta}{\partial x_\alpha}\right)=\delta P\,\delta_{\alpha\beta} \tag{2.6}$$

Положим $\delta v_\alpha=(\varkappa_\alpha/\mu)\delta\varepsilon$, $\delta P=\psi\delta\varepsilon$. Тогда (2.6) сводится к (2.1), а из (2.5) следует (2.2).

Несмотря на то, что $\varkappa_\alpha$ не входит в (2.2), это соотношение может быть использовано лишь при тех функциях ψ, для которых существует $\varkappa_\alpha$, удовлетворяющее (2.1).

Пусть $\mathbf{x}\in R^N$. Тогда из (2.1) следует

$$\Delta\psi=0,\qquad (N-2)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}=0$$

Таким образом, лишь в двумерном случае (2.1) разрешимо при любой гармонической функции ψ. Иначе говоря, лишь в двумерном пространстве существуют нетривиальные вариации давления и скорости, оставляющие тензор напряжений неизменным.

3. Тензор напряжений, выраженный через функцию Эри φ

$$P_{\alpha\beta}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\delta_{\alpha\beta} \tag{3.1}$$

тождественно удовлетворяет уравнению движения (1.1). Граничные условия (1.2) принимают вид

$$D_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta}-\sigma n_\beta\right)=0,\qquad \mathbf{x}\in\gamma;\qquad D_{\alpha\beta}=e_{\alpha\beta}\tau_\gamma\frac{\partial}{\partial x_\gamma} \tag{3.2}$$

где $e_{\alpha\beta}$ — единичный антисимметричный тензор; τ_γ — единичный касательный вектор к границе, направление которого согласовано с направлением обхода. Интегрируя (3.2), получаем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}=\sigma n_\alpha+c_{\alpha j}, \qquad \mathbf{x}\in\gamma_j$$

где $c_{\alpha j}$ — постоянные интегрирования.

Введем гармоническую функцию φ_0, такую, что $\partial\varphi_0/\partial x_\alpha=c_{\alpha j}$, $\mathbf{x}\in\gamma_j$. Тогда для аналитической функции E имеем

$$E\equiv\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_1}+i\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2}=c_{1j}+ic_{2j}, \qquad \mathbf{x}\in\gamma_j \tag{3.3}$$

Это возможно, лишь если $c_{\alpha j}$ на всех контурах совпадают. Обозначая их общее значение через c_α и перенормируя φ с помощью замены $\varphi\to\varphi+$ $+c_\beta x_\beta$, не меняющей вида (3.1), получаем

$$\partial\varphi/\partial x_\alpha=\sigma n_\alpha, \qquad \mathbf{x}\in\gamma \tag{3.4}$$

Используя (3.1) и явный вид тензора напряжений, имеем

$$d(\partial\varphi/dx_\alpha)=2\mu dv_\alpha+d\Phi_\alpha \tag{3.5}$$

$$d(\Phi_1+i\Phi_2)=(P+i\omega)dz \tag{3.6}$$

$$\omega=\mu(\partial v_1/\partial x_2-dv_2/dx_1)$$

где ω — сопряженная с P гармоническая функция. Однозначность функции $\partial\varphi/\partial x_\alpha$ вытекает из равенства нулю суммарной силы поверхностного натяжения, действующей на каждую компоненту связности границы γ_j. Следовательно, однозначной должна быть и функция Φ_α. В силу (3.6), для обеспечения однозначности Φ_α необходимо из исходного набора χ_k исключить функции вида $(z-z_j^\circ)^{-1}$. Интегрируя (3.5), получаем

$$v_\alpha=(2\mu)^{-1}(\partial\varphi/\partial x_\alpha-\Phi_\alpha), \qquad \mathbf{x}\in g \tag{3.7}$$

Тогда, согласно (3.4),

$$v_\alpha=(2\mu)^{-1}(\sigma n_\alpha-\Phi_\alpha) \tag{3.8}$$

Приведенный выше способ определяет v_α с точностью до аддитивного слагаемого $v_{\alpha 0}+\omega_0 e_{\alpha\beta}x_\beta$, причем неопределенная постоянная ω_0 возникает при восстановлении ω по P, а $v_{\alpha 0}$ — при интегрировании (3.6). Физически это связано с тем, что исходные уравнения оставляют неопределенным суммарное количество движения и момент количества движения системы. Требуя дополнительно, чтобы эти величины сохранялись равными нулю, с учетом следующих соотношений для средних, находим из (3.7) условия для определения $v_{\alpha 0}$ и ω_0:

$$\langle v_\alpha\rangle_g=0, \quad e_{\alpha\beta}\langle x_\alpha v_\beta\rangle_g=0, \quad \langle\partial\varphi/x_\alpha\rangle_g=0, \quad e_{\alpha\beta}\langle x_\alpha\partial\varphi/\partial x_\beta\rangle_g=0$$

$$\langle\Phi_\alpha\rangle_g=0, \quad e_{\alpha\beta}\langle x_\alpha\Phi_\beta\rangle_g=0$$

Выражения (1.3), (3.8) определяют деформацию границы γ.

4. Получим, наконец, оценку для закона убывания периметра l области g. Используя [14], (3.3), имеем

$$\frac{dl}{dt}=\int v_\alpha D_{\alpha\beta}n_\alpha\,dl, \qquad \int D_{\alpha\beta}\Xi\,dl=0 \tag{4.1}$$

Здесь Ξ — произвольное непрерывное на границе тензорное поле. Используя последнее условие, а также уравнение неразрывности (1.1) и граничные условия (1.2) преобразуем (4.1) к виду

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{1}{2\mu}\int\left(P - \sigma\frac{\partial n_\beta}{\partial x_\beta}\right) dl \tag{4.2}$$

Поскольку при получении (4.2) не было использовано уравнение движения, это соотношение справедливо и вне рамок квазистационарного приближения Стокса.

Интеграл по замкнутому контуру от средней кривизны равен $\pm 2\pi$ (знак определяется направлением обхода). Тогда, используя (2.3), (2.5) находим

$$\frac{dl}{dt} \leqslant -\frac{\sigma}{2\mu}\left(\frac{l^2}{2S} + 2\pi(M-2)\right) \tag{4.3}$$

где M — число компонент связности границы. Интегрируя дифференциальное неравенство (4.3) при начальном условии $l(0) = l_0$, получаем

$$\frac{l}{l_\infty} \leqslant \frac{l_0 + l_\infty \operatorname{th}\tau}{l_\infty + l_0 \operatorname{th}\tau}, \quad M=1, \quad \tau = \frac{\sigma t}{2\mu}\sqrt{\frac{\pi}{S}} \tag{4.4}$$

$$\frac{l}{l_\infty} \leqslant \frac{l_0}{l_\infty + l_0\tau}, \quad M=2 \tag{4.5}$$

$$\frac{l}{l_\infty} \leqslant -\frac{\sqrt{M-2}(l_0 - \sqrt{M-2}\, l_\infty \operatorname{tg}(\sqrt{M-2}\tau))}{\sqrt{M-2}\, l_\infty + \sqrt{M-2}\, l_0 \operatorname{tg}(\sqrt{M-2}\,\tau)} \quad M>2 \tag{4.6}$$

где τ — безразмерное время, $l_\infty = 2\sqrt{\pi S}$ — равновесное значение периметра.

Таким образом, характерное время релаксации сплошного цилиндра $\tau_1 < 1$, что согласуется с [15, 16].

Если в цилиндре есть внутренняя полость, что, согласно (4.5), она захлопывается за время, не превышающее $\tau_2 = 1 - l_\infty/l_0$. Для кругового полого цилиндра течение безвихревое, что в приближении Стокса эквивалентно его гомобаричности. В этом случае неравенство (4.5) следует заменить на равенство, совпадающее с [5].

При наличии двух или более внутренних полостей, через промежуток времени, не превышающий

$$\tau_M = \frac{1}{\sqrt{M-2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{M-2}(l_0 - l_\infty)}{l_0 + (M-2)l_\infty} \tag{4.7}$$

хотя бы одна из полостей захлопнется. При большом количестве полостей, характерный размер которых $r_0 = l_0/(2\pi M)$ мал по сравнению со средним расстоянием между ними $\sqrt{S/\pi M}$, $t_M = 2\mu r_0/\sigma$, что совпадает со временем схлопывания [4] одиночного кругового цилиндрического капилляра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.
2. *Френкель Я. И.* Вязкое течение в кристаллических телах // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. № 1. С. 29–38.
3. *Воинов О. В.* Асимптотика свободной поверхности вязкой жидкости при ползущем движении и зависимость краевого угла смачивания от скорости // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243. № 6. С. 1422–1425.
4. *Гегузин Я. Е.* О спекании аморфных тел // Докл. АН СССР. 1953. Т. 91. № 1. С. 45–48.

5. *Lewis J. A.* The collapse of a viscous tube // J. Fluid Mech. 1977. V. 81. № 1. P. 129–135.
6. *Антоновский Л. К.* Динамика межфазной границы под действием капиллярных сил. Квазистационарное плоскопараллельное движение // ПМТФ. 1988. № 3. С. 90–94.
7. *Мусхелешвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
8. *Чивилихин С. А.* Динамика свободной многосвязной поверхности вязкой жидкости // Докл. АН СССР. 1990. Т. 315. № 3. С. 558–560.
9. *Гринберг Г. А.* О решении плоской задачи теории упругости и задачи об изгибе тонкой плиты с закрепленным контуром // Докл. АН СССР. 1951. Т. 76. № 5. С. 661–664.
10. *Векуа И. Н.* Об одном методе решения основной бигармонической краевой задачи и задачи Дирихле // Некотор. пробл. мат. и мех. Л.: Наука, 1970. С. 120–127.
11. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 246 с.
12. *Векуа И. Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 296 с.
13. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
14. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
15. *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
16. *Hopper R. W.* Coalescence of two equal cylinders: exact results for creeping viscous plane flow driven by capillarity // J. Amer. Ceram. Soc. 1984. V. 67. № 12. P. 262–264.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию 11.XII.1989