

УДК 532.59

© 1992 г.

И. Б. БАХОЛДИН

ТРЕХВОЛНОВОЙ РЕЗОНАНС И УСРЕДНЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ВОЛН В СРЕДАХ, ОПИСЫВАЕМЫХ КУБИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ ШРЕДИНГЕРА

Путем численного решения кубического уравнения Шредингера было установлено явление Маховского отражения волны Стокса от вертикальной стенки [1]. В работе [2] это явление проинтерпретировано как резонансное взаимодействие трех волн. Для этого были выведены усредненные уравнения взаимодействия двух волн, зона взаимодействия падающей и отраженной волн рассматривалась как автомодельное решение этих уравнений. В данной работе обосновывается возможность описания этих решений соотношениями трехволнового резонанса, выявляется математический смысл резонанса как расщепления на две волны, исследуются свойства усредненной системы.

1. Трехволновой резонанс. Рассмотрим кубическое уравнение Шредингера, описывающее ряд моделей распространения волн на воде, в плазме, нелинейной оптике

$$2A_x - iA_{vv} + iK|A|^2A = 0 \quad (1.1)$$

Для определенности, как и в [2], будем рассматривать A как огибающую стационарных периодических волн на воде, x, y — горизонтальная система координат, $K > 0$. Используемый метод применим и при $K < 0$, но в силу неустойчивости периодических волн в этом случае он не дает физически значимых результатов.

Уравнение (1.1) может быть также переписано в гидродинамической форме после подстановки в него выражения $A = ae^{i\psi}$ [1]

$$E_x + (EW)_v = 0, \quad W_x + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{a_{vv}}{2a} + \frac{W^2}{2} + \frac{KE}{2} \right) = 0 \quad (1.2)$$

$$W = \psi_v = k_v, \quad E = a^2, \quad -a_{vv}/a + W^2 + KE = -2\psi_x = -2k_x$$

Система (1.2) имеет решения, графики которых при фиксированных значениях x представляют собой скачок (см. фиг. 1). Однородные участки разделяются последовательностью волн, количество которых увеличивается при увеличении x [4].

Рассматриваемые решения можно описать с помощью автомодельных решений усредненных уравнений, как это делалось для уравнения Кортевега — де Вриза [3, 4]. Для уравнения Шредингера усредненные уравнения получены в [5] с использованием свойств гамильтоновых систем, обладающих скобками Пуассона [6]. При этом возникают сложности в исследовании полученных уравнений. В данной работе усредненные уравнения выводятся другим способом, позволяющим интерпретировать периодические решения системы (1.2) как результат взаимодействия двух виртуальных волн, а скачок — как резонанс, аналогичный резонансу солитонов [7]. Неединственность формы усредненных уравнений эволюции

периодических волн, описываемых уравнениями (1.2), аналогична неединственности формы усредненных уравнений нелинейных волн на воде [8], связанной с неоднозначностью выбора параметров волн и течений.

Подставим в уравнение (1.1) выражение $A=A_1+A_2$, $A_i=a_i \exp(i\psi_i)$ и предположим, что для каждой из волн выполняется уравнение Шредингера

$$\begin{aligned} 2A_{ix} - iA_{iyv} + iK|A_1+A_2|^2 A_i &= 0, \quad i=1, 2 \\ E_{ix} + (E_i W_i)_y &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$W_{ix} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ -\frac{a_{iyv}}{2a_i} + \frac{W_i^2}{2} + \frac{K}{2} [E_1 + E_2 + 2a_1 a_2 \cos(\psi_1 - \psi_2)] \right\} = 0$$

Здесь приведен как волновой, так и гидродинамический вид уравнений. В дальнейшем находятся квазипериодические решения уравнений (1.3). Делается предположение о том, что решения уравнений (1.3) можно рассматривать как эволюцию квазипериодических решений с медленно меняющимися параметрами, и уравнения (1.3) усредняются. Поскольку разложение на две волны носит довольно произвольный характер, при нахождении квазипериодических решений накладываются дополнительные условия, которые выделяют некоторое множество решений, зависящих от четырех параметров, т. е. от такого же числа параметров, как и периодические решения уравнений (1.2).

Данный метод применим и к уравнениям более общего вида

$$\begin{aligned} 2A_x - iA_{yv} + iF(|A|, |A|_y, |A|_{yv}, \dots) A &= 0 \\ E_x + (EW)_y &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$W_x + \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{a_{yv}}{2a} + \frac{W^2}{2} + \frac{F(a, a_y, a_{yv}, \dots)}{2} \right] = 0$$

Уравнения (1.4) можно назвать обобщенными уравнениями мелкой воды. При выводе уравнений взаимодействия двух волн меняется лишь вид нижнего из уравнений, а наличие квазипериодических решений зависит от вида функции F .

Рассмотрим стационарные, т. е. периодические по x решения уравнений (1.3)

$$\begin{aligned} 2a_{ix} + a_i \psi_{iyv} &= 0 \\ 2a_i k_{xi} - a_{iyv} + a_i \psi_{iy}^2 + K a_i [a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\psi_1 - \psi_2)] &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Проинтегрировав первое уравнение, получим

$$a_i^2 \psi_{iy} = a_{0i}^2 k_{yi}, \quad \psi_i = \int_0^y \psi_{iy} dy + \psi_{0i}$$

В дальнейшем рассматриваются лишь симметричные решения системы (1.5), которые можно определить из уравнения

$$\begin{aligned} \theta_{yv} = \theta \left[2k_{xi} + \left(\frac{k_y}{\theta^2} \right)^2 + K\theta^2 (a_{01}^2 + a_{02}^2 + 2a_{01} a_{02} \cos 2\psi) \right] \\ a_i = a_{0i} \theta, \quad k_{xi} = k_x, \quad -k_{y1} = k_{y2} = k_y > 0, \quad \psi_1 = -\psi_2 = \psi \end{aligned} \quad (1.6)$$

Одно и то же решение уравнения Шредингера можно получить, решив уравнения (1.2) или же решив уравнения (1.3). Поэтому можно вывести

еще одно уравнение, аналогичное (1.6)

$$\theta_{yy}' = \theta' \left[2k_x + \left(\frac{k_y'}{\theta'^2} \right)^2 + K\theta'^2 a_{01}^2 \right] \quad (1.7)$$

$$\theta' = \theta \sqrt{1 + \eta^2 + 2\eta \cos 2\psi}, \quad \eta = \frac{a_{02}}{a_{01}}, \quad k_y' = \frac{1 - \eta}{1 + \eta} k_y$$

Периодическим решениям уравнения (1.7) соответствуют квазипериодические решения уравнения (1.6). Решения в виде констант или солитонов соответствуют периодическим решениям или периодическим решениям с локальным возмущением. Уравнение (1.6) можно рассматривать как уравнение колебаний с вынуждающей силой. В этом смысле решение в виде солитона соответствует резонансу между вынужденными и собственными колебаниями.

Для того чтобы выделить группу решений уравнения (1.7), зависящую от трех параметров, четвертый параметр возникает в результате вращения стационарных решений (см. п. 3), необходимо задать начальные условия и дисперсионное соотношение для начальных параметров виртуальных волн. Приведем несколько вариантов:

$$\theta(0) = 1, \quad \theta_y(0) = 0, \quad \psi_0 = 0; \quad 2k_x + k_y^2 + K(a_{01} + a_{02})^2 = 0 \quad (1.8)$$

$$\theta(0) = 1, \quad \theta_y(0) = 0, \quad \psi_0 = \pi/2; \quad 2k_x + k_y^2 + K(a_{01} - a_{02})^2 = 0 \quad (1.9)$$

$$\theta(0) = 1, \quad \theta_y(0) = 0, \quad \psi_0 = 0; \quad 2k_x + k_y^2 + K(a_{01}^2 + a_{02}^2) = 0 \quad (1.10)$$

В первых двух случаях $\theta_y = \theta_{yy} = \theta_{yyy}$ при $y=0$ и параметры в дисперсионном соотношении имеют смысл локальных значений параметров волны в точке, соответствующей максимуму или минимуму θ' , т. е. в точке пересечения гребней или в точке взаимодействия волн в противофазе.

Начальные условия и дисперсионные соотношения можно задавать относительно произвольно. Для исследования резонансного взаимодействия волн удобно использовать симметрично расположенные волны и соотношения (1.10). Пусть линия разрыва между областью с одной волной и областью с двумя волнами проходит по оси x . Запишем условия сохранения энергии, кинематические условия, а также условие, связывающее амплитуды трех волн, в наиболее общем виде при $\theta(0) = 1$

$$E_* W_* = E_{01} W_{01} + E_{02} W_{02} + (W_{01} + W_{02}) a_{01} a_{02} \cos(\psi_{01} - \psi_{02}) \quad (1.11)$$

$$\frac{1}{2} W_*^2 + \frac{1}{2} K E_* = \frac{1}{2} W_{01}^2 + V_1 = \frac{1}{2} W_{02}^2 + V_2 \quad (1.12)$$

$$a_* = |A_1 + A_2|_{\max} = \theta'_{\max} / \theta_0' (a_{01} + a_{02}) \quad (1.13)$$

В отличие от работы [2] здесь цифрами 1 и 2 обозначены параметры волн справа от линии разрыва, а знаком * — параметры третьей волны, возникающей в результате их слияния, $V_{1,2}$ — скорости волн. Уравнение (1.11) — следствие соотношения $(EW)_y = 0$ и подстановки $A = A_1 + A_2$. Наиболее простой вид оно имеет в тех случаях, когда $W_{01} = -W_{02}$, как это принято в данной работе, или же при $\psi_{01} - \psi_{02} = \pi/2 + \pi/n$. Уравнение (1.12) — следствие стационарности решений. При выборе дисперсионного соотношения (1.10) формула для скорости имеет вид: $V_{1,2} = \frac{1}{2} K (E_{01} + E_{02})$. При выборе начальных условий $\theta(0) = 1, \theta_y(0) = 0, \psi_0 = 0$ уравнение (1.13) принимает вид: $a_* = a_{01} + a_{02}$.

При перечисленных выше условиях решением системы (1.11)–(1.13) являются линейные соотношения, которые не меняют своего вида при вращении [2]:

$$W_{01} - W_* = \sqrt{2K}(a_{01} - a_*) \quad (1.14)$$

$$W_{02} - W_* = \sqrt{2K}(a_* - a_{02}) \quad (1.15)$$

$$W_{01} - W_{02} = -\sqrt{2K}a_* = -\sqrt{2K}(a_{01} + a_{02}) \quad (1.16)$$

Применив преобразование вращения (см. п. 3) к уравнению (1.12), получаем

$$\beta(W_{01} - W_*) = \frac{1}{2}(W_{01}^2 - W_*^2) + \frac{1}{2}K(E_{01} + E_{02} - E_*)$$

где β — наклон линии разрыва к оси x [2]. Используя уравнение (1.14) находим

$$\beta = 1/2(W_{01} + W_{02}) + \sqrt{K}/2a_{01} \quad (1.17)$$

Таким образом при выборе начальных условий (1.10) условия на разрыве задаются линейными соотношениями.

В работе [5] усредненные уравнения выведены в форме уравнений в инвариантах Римана. Выводимые здесь уравнения тоже должны обладать инвариантами Римана, поскольку они описывают эволюцию той же системы волн. Заметим, что в силу симметрии уравнений (1.3), (1.6), (1.10) относительно перестановки индексов 1 и 2, а также относительно преобразования $y' = -y$, $W_i' = -W_i$ из наличия одного инварианта Римана следует наличие еще трех инвариантов. Зная вид одного из инвариантов, можно найти остальные три.

На фиг. 1 схематично представлены графики инвариантов Римана, построенные по аналогии с исследованиями для уравнения Кортевега — де Вриза [3, 4]. Для уравнения Шредингера добавляется еще одна характеристика, инвариант Римана на которой постоянен. В области автомодельного решения инварианты обозначены J_1, J_2, J_3, J_4 . Если в уравнениях (1.2) отбросить член с третьей производной, то получается система уравнений эквивалентная уравнениям мелкой воды [2]. Считается, что эта система описывает области вне исследуемой структуры. Ее инварианты Римана обозначены J_+, J_- . Они описываются соотношениями $J_{+,-} = W \mp \sqrt{2K}a$.

В краевых точках исследуемой области имеются лишь слабые разрывы [4], поэтому

$$J_{-b} = J_{1b} = J_{1*} = W_b + \sqrt{2K}a_b = W_* + \sqrt{2K}a_* \quad (1.18)$$

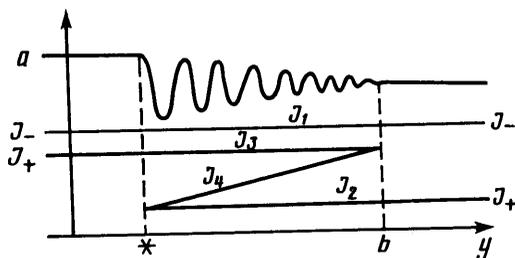
Здесь и далее индексом b обозначаются величины в начальной точке автомодельной структуры, а индексом $*$ — в конечной точке (точке резонанса). Используя (1.14) и (1.18) находим вид инварианта Римана в точке резонанса

$$J_{1*} = W_{01} + \sqrt{2K}a_{01} = W_* + \sqrt{2K}a_* = W_b + \sqrt{2K}a_b \quad (1.19)$$

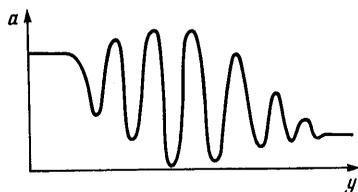
В силу указанных выше свойств симметрии остальные инварианты Римана описываются выражениями

$$J_{2*} = W_{01} - \sqrt{2K}a_{01}, \quad J_{3*} = W_{02} + \sqrt{2K}a_{02}, \quad J_{4*} = W_{02} - \sqrt{2K}a_{02} \quad (1.20)$$

В [2] приведены графики $E(K) = E_*$ для случая набегания волны на клин, полученные численно [1] и построенные по соотношению (1.19) ($W_b = 0, W_* = 1, a_b = 1$). Расчетные точки практически точно совпадают с



Фиг. 1



Фиг. 2

теоретическими. Таким образом, это соотношение можно считать также обоснованным путем численного эксперимента.

Найдем наклон линии разрыва к оси x . Поскольку инвариант J_2 сохраняется, то $J_{2*} = J_{2b} = J_{+b}$. Учитывая (1.19) и первое из соотношений (1.20), получаем

$$a_{01} = a_b, \quad W_{01} = W_b \quad (1.21)$$

Теперь наклон линии разрыва можно определить по формуле (1.17), подставив туда a_{01} и W_{01} из соотношений (1.21). Фактически таким способом в работе [2] получен график наклона линии разрыва при набегании на клин. Совпадение с результатами расчетов также позволяет считать соотношения (1.21) обоснованными путем численного эксперимента.

Некоторые отклонения теории от расчетов при больших значениях K (малые интенсивности разрывов) объясняются тем, что в рассматриваемых решениях вблизи точки резонанса волны близки к уединенным. Длина уединенной волны, т. е. длина участка, где ее интенсивность составляет некоторую заданную долю амплитуды, увеличивается при уменьшении амплитуды. Поэтому для того, чтобы к численному решению уравнения Шредингера при больших значениях K можно было применить метод усреднения, требуется провести расчет для большего времени с момента начала взаимодействия волны с клином, чем это сделано в работе [1].

Таким образом, область автомодельного решения можно заменять разрывом типа резонансного взаимодействия трех волн также как это делалось для солитонов [7].

2. Некоторые следствия. В точке резонанса произошло расщепление переменных, входящих в усредненную систему на пары a_{01}, W_{01} и a_{02}, W_{02} . Связь между ними имеется только через характеристические скорости. Две волны распространяются как бы независимо друг от друга.

Из соотношений (1.20) и (1.15) следует непрерывность инварианта $J_{+*} = J_{s*}$, а из (1.20) и (1.16) — совпадение инвариантов J_4 и J_2 в точке резонанса, как это и изображено на фиг. 1.

Еще одним следствием является наличие автомодельных решений иного, чем в [1] вида. Такие решения соответствуют разрывам большой интенсивности $a_* > 2a_b$. Назовем их решениями второго типа. График амплитуды для такого решения показан на фиг. 2. В этих решениях точка, где амплитуда в последовательности волн максимальна, находится не на краю, а внутри. Справа от этой точки $a_{01} > a_{02}$, а слева $a_{01} < a_{02}$. Такие решения не возникают при набегании волны на клин, но решение задачи о распаде произвольного разрыва [2, 7] в некоторых областях начальных параметров волн приводит к таким разрывам.

Покажем, что при выборе начальных условий (1.10) получается разложение относительно среднеарифметического максимального и мини-

мального уровня амплитуды. Проинтегрируем уравнение (1.7)

$$\theta'^2 k_x - \frac{k_y'^2}{2\theta'^2} + \frac{K}{4} \theta'^4 a_{01}^2 = \frac{1}{2} \theta_v'^2 + C \quad (2.1)$$

где C — постоянная интегрирования. Можно проверить с учетом дисперсионного соотношения (1.10), что при подстановке в правую часть уравнения (2.1) величин $\theta' = 1 + \eta$ и $\theta' = 1 - \eta$ получается одна и та же величина. Поэтому условие (1.10) и условие

$$\theta(0) = 1, \quad \theta_v(0) = 0, \quad \psi_0 = \pi/2, \quad 2k_x + k_y^2 + K(a_{01}^2 + a_{02}^2) = 0$$

с точностью до сдвига по y определяют одно и то же решение уравнения (1.7). В первом случае начальная точка находится на горбе, а во втором во впадине. Поэтому минимальное и максимальное значение величины $|A|$ определяется также как в линейной теории

$$|A|_{\max} = a_{01} + a_{02}, \quad |A|_{\min} = |a_{01} - a_{02}| \quad (2.2)$$

В силу этого амплитуда солитона в автомодельных решениях первого типа равна $2(a_* - a_b)$, а в решениях второго типа — $2a_b$. Следует отметить, что используемые виртуальные величины имеют лишь косвенное отношение к углам между осью x и направлением распространения волн (см. п. 4).

3. Усредненные уравнения. С целью упрощения записи формул в п.п. 3, 4 величина K полагается равной единице, что достигается преобразованием $A = A'/\sqrt{K}$, штрих опущен. Ниже кратко и с некоторыми изменениями приводится вывод усредненных уравнений [2].

Делается преобразование уравнения (1.6)

$$z_{\psi\psi} = \kappa z^{-3} - z - z^{-5}(1 + \eta^2 + 2\eta \cos 2\psi) \quad (3.1)$$

$$z = (\theta k_y \eta / a_{01})^{-1}, \quad \chi = -2k_x k_y^{1/2} / a_{01}^{3/2} \quad (3.2)$$

Соотношения (1.10) теперь имеют вид

$$z(0) = z_0, \quad z_{\psi}(0) = 0, \quad \kappa z_0^{-3} - z_0 - z_0^{-5}(1 + \eta^2) = 0 \quad (3.3)$$

Значение z_{0*} для точки резонанса находится следующим образом: в уравнении (1.7) полагается $\theta_{yy}' = 0$ и делается подстановка в соответствии с соотношениями (3.2)

$$\frac{1 - \eta}{1 + \eta} z_0 - \chi z_0^{-3} - (1 + \eta)^2 z_0^{-5} = 0 \quad (3.4)$$

Из соотношений (3.4) и (3.3) находим $z_{0*} = (1 + \eta)^{1/2} 2^{-1/4}$. При исследовании решений уравнения (3.1) z_0 и η рассматриваются как параметры решения, а χ находится из соотношения (3.3). При $z_0 > z_{0*}$ решение квазипериодическое, при $z_0 = z_{0*}$ — периодическое, при $z_0 < z_{0*}$ — выходящее на нуль.

Стационарные решения дополняются нестационарными, полученными преобразованием вращения

$$\begin{aligned} A' &= A(x, y + \beta x) \exp[-i(\beta^2/2x + \beta y)] \\ a' &= a(x, y + \beta x), \quad \psi' = \psi(x, y + \beta x) - \beta^2/x - \beta y \\ W' &= W - \beta, \quad \psi_x' = \psi_x - \beta^2/2 + \beta W = k_{xi}' \end{aligned}$$

Полученные выражения подставляются в уравнения (1.3) и усредняются

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle E_i' \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle E_i' W_i' \rangle = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \langle W_i' \rangle - \frac{\partial}{\partial y} \langle k_{xi}' \rangle = 0 \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \langle E_i' \rangle &= E_{0i} k_e, \quad \langle E_i' W_i' \rangle = -\beta \langle E_i' \rangle \mp E_{0i} k_y \\ \langle W_i' \rangle &= -\beta \mp k_y k_w, \quad \langle k_{xi}' \rangle = k_x - \beta^2/2 \mp k_y k_w \\ \beta &= -(k_{y1} + k_{y2})/2, \quad k_y = (k_{y2} - k_{y1})/2, \quad 2k_x + k_y^2 + (1 + \eta^2) a_{01}^2 = 0 \\ k_w &= z_0^{-2} / \langle z^{-2} \rangle, \quad k_e = k_w \langle z^{-4} \rangle / z_0^{-4} \end{aligned}$$

где $\langle \rangle$ обозначает усреднение по достаточно большой области $\Delta x, \Delta y$ для величин $E_i', W_i', E_i'W_i', k_{xi}'$ или усреднение по большому числу колебаний для k_w и k_e .

Усредненную систему (3.5) запишем в более удобном для исследования виде

$$\frac{\partial}{\partial x} k_e E_{0i} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_{v1} + k_{v2}}{2} k_i E_{0i} \mp \frac{k_{v2} - k_{v1}}{2} E_{0i} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_{v1} + k_{v2}}{2} \mp \frac{k_{v2} - k_{v1}}{2} k_w \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_{v1}^2 + k_{v2}^2}{4} \mp \frac{k_{v2}^2 - k_{v1}^2}{4} k_w + \frac{E_{01} + E_{02}}{2} \right) = 0 \quad (3.6)$$

Уравнение (3.1) с начальными условиями (3.3) решалось численно методом Адамса второго порядка точности. Одновременно с вычислением величины z вычислялись усредненные величины k_{en} и k_{wn} посредством нахождения соответствующих сумм z^{-2} и z^{-4} на отрезках $[0, \pi n/2]$. Значения k_e и k_w определялись как пределы k_{en} и k_{wn} при $n \rightarrow \infty$. Зависимость k_e и k_w от $\Delta = z_0 - z_{0*}$ при $\eta = 0,1; 0,2; 0,3$ (кривые 1-3) показана на фиг. 3. Величина k_w быстро стремится к единице при удалении от точки резонанса, что соответствует увеличению угла между виртуальными волнами. Величина k_e стремится к некоторому другому значению, зависящему от η . При z_0 близком к z_{0*} , решение близко к периодическому, что позволяет быстро вычислить k_e и k_w . При увеличении Δ решение принимает вид колебаний относительно точки равновесия z_0 . Огибающая этих колебаний имеет форму периодических волн, заключенных в полосу $z_1 = z_0(1+\eta)/(1-\eta)$ и $z_2 = z_0(1-\eta)/(1+\eta)$ (см. фиг. 4, $\eta = 0,3; \Delta = 0,3$). Максимальная амплитуда колебаний достигается в тех областях, где в точках $\psi = \pi/2 + \pi/n$ величина θ' принимает значение близкое к θ'_{\max} , а минимальная — в тех областях, где это происходит в точках $\psi = \pi l$. Вычисление k_e и k_w при больших значениях Δ затруднительно, поскольку велик период волн огибающих. Но это и не требуется в силу того, что эти величины быстро приближаются к своим предельным значениям при $\Delta \rightarrow \infty$.

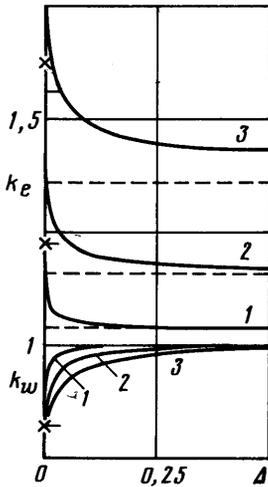
Посредством расчетов было установлено, что при $\eta = 1$ в случае $z_0 > z_{0*}$ решение представляет собой колебания, амплитуда которых бесконечно растет при возрастании ψ . При $z_0 = z_{0*}$ решение имеет вид: $z = 2\chi^{-1/2} \cos \psi$. Это связано с тем, что при выводе уравнений (3.5) было заложено предположение $a_{01} > a_{02}$. В тех случаях, когда это не так, при определении величины η индексы 1 и 2 следует поменять местами. Такую систему нужно применять для исследования автомодельных решений второго типа сразу же за разрывом, а затем при достижении особой точки, где $\eta = 1$, вернуться к системе (3.5).

При $k_e = 1$ и $k_w = 1$ уравнения (3.6) имеют вид

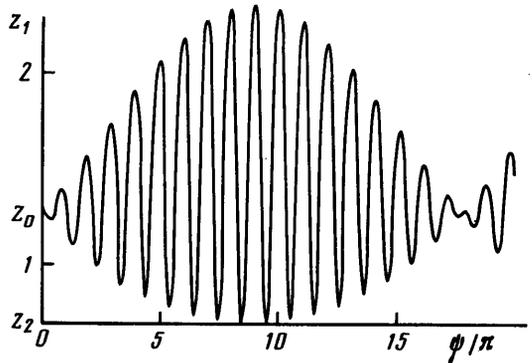
$$\frac{\partial}{\partial x} E_{0i} + \frac{\partial}{\partial y} (E_{0i} k_{vi}) = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} k_{vi} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_{vi}^2}{2} + \frac{E_{01} + E_{02}}{2} \right) = 0 \quad (3.8)$$

Такое приближение можно назвать квазилинейным. Уравнения (3.7) выражают условия сохранения энергии в лучевых трубках. Уравнения (3.8) показывают, что каждая волна движется со скоростью $V = (E_{01} + E_{02})/2$ как бы независимо одна от другой аналогично солитону [7]. Рассмотренный в п. 1 резонанс в этом смысле можно интерпретировать как резонанс в квазилинейном приближении. Это приближение является качественным.



Фиг. 3



Фиг. 4

Рассмотрим асимптотические приближения. Логично предположить, что при $\eta \rightarrow 0$ предельные значения величин k_e и k_w представимы в виде рядов по степеням η . Первые три члена этих рядов были найдены численно путем многократного уменьшения η от 0,2 до 0,005

$$k_{e*} = 1,00000 + 2,000\eta + 4,0\eta^2, \quad k_{w*} = 1,00000 - 2,000\eta + 2,0\eta^2. \quad (3.9)$$

$$k_e = 1,00000 + 4,0\eta^2, \quad k_w = 1,00000; \quad \Delta \rightarrow \infty \quad (3.10)$$

Ниже приводится сопоставление величин, полученных в результате расчетов (первый столбец) и вычисленных по формулам (3.9), (3.10) (второй столбец)

η	0,3		0,2		0,1		0,01		0,005	
k_e	2,22	1,92	1,62	1,48	1,25	1,24	1,02040	1,02040	1,010100	1,010100
k_w	0,54	0,58	0,67	0,68	0,82	0,82	0,98020	0,98020	0,990050	0,990050
k_{e*}	1,44	1,36	1,17	1,16	1,04	1,04	1,00040	1,00040	—	1,000100

На фиг. 3 штрихами на вертикальной оси отмечены значения, полученные по формулам (3.9), а крестом — соответствующие точные численные значения (k_e при $\eta=0,1; 0,2$, k_w при $\eta=0,1$). Горизонтальными штриховыми линиями показаны значения, найденные по формулам (3.10). Как видно из фиг. 3, соотношения (3.10) пригодны и при конечных η и Δ . Если требуется приближение с точностью до членов порядка η , то в соответствии с соотношениями (3.10) в уравнениях (3.7), (3.8) следует выбросить члены, содержащие E_{02} , после этого уравнение переноса энергии второй волны станет вырожденным. Если требуется приближение с точностью до η^2 , то в уравнение (3.7) для первой волны нужно добавить члены $(4E_{02})_x + [2(k_{y1} + k_{y2})E_{02}]_y$. Уравнения (3.7) можно вывести из линейного уравнения Шредингера $2A_x - iA_{yy} = 0$, но в этом случае уравнения (3.8) не будут содержать член $[(E_{01} + E_{01})/2]_y$.

4. Физические параметры волн. Углы между направлениями распространения волн и осью x можно найти, проведя прямые через точки максимумов функции $\text{Re } A$, как это изображено на фиг. 5, где схематично показаны линии уровня этой функции для стационарных решений, а также направления гребней волн (жирными линиями). В случае $E_{02} < E_{01}$ эти

углы определяются из соотношения

$$\operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \left\{ -\operatorname{arctg} \left(\frac{1-\eta}{1+\eta} \operatorname{tg} L \right) + \pi \left(\left[\frac{L}{\pi} \right] \pm 1 \right) \right\} \frac{k_y}{k_x} \left(\int_0^L \frac{z_0^2}{z^2} d\psi \right)^{-1}$$

где L — длина отрезка между первым и вторым максимумом функции $\theta'(\psi)$, квадратные скобки обозначают целую часть, ветвь арктангенса берется на отрезке $[0, \pi]$. Вблизи точки резонанса

$$L \rightarrow \infty, \quad \operatorname{tg} \alpha_{1,2} = k_{w*} k_y / k_x = -W_* / k_x$$

Воспользовавшись соотношениями для резонанса трех волн находим

$$k_{w*} = (1-\eta)/(1+\eta) = 1 - 2\eta + 2\eta^2 + O(\eta^3)$$

Эта формула удобна для проверки точности численных методов, в частности она подтверждает правильность метода нахождения коэффициентов в соотношениях (3.9), (3.10). При увеличении угла между волнами

$$L \rightarrow \pi +, \quad \operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \pm k_y / k_x \quad (4.1)$$

Таким образом, в этом случае величины k_{yi} определяют направления распространения волн.

При использовании в п. 3 дисперсионного соотношения, отличающегося от (1.10), меняются начальные условия (3.3), выражение для z_{0*} , соотношение, определяющее k_x в уравнениях (3.5), и соответственно нижние уравнения системы (3.6). Если виртуальное дисперсионное соотношение имеет вид

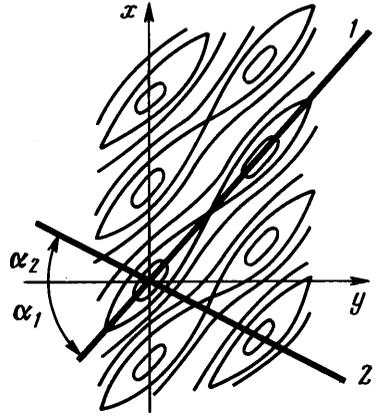
$$2k_{xi} + k_{yi}^2 + a_{0i}^2 f(\eta) = 0, \quad \theta(0) = 1, \quad \theta_y(0) = 0, \quad \psi_0 = 0$$

то при $\Delta \rightarrow \infty$ независимо от вида функции f выполняются соотношения (2.2) и (4.1), что связано с тем, что на отрезке $[0, \pi]$ величина z близка к z_0 . При этом каждому периодическому решению системы (1.2) соответствует набор k_{xi}, k_{yi}, a_{0i} , не зависящий от вида функции f . Поскольку меняется вид нижних уравнений системы (3.6), то свойство $k_w \rightarrow 1$ при $\Delta \rightarrow \infty$ может выполняться лишь при выборе одного дисперсионного соотношения, т. е. соотношения (1.10), $f(\eta) = 1 + \eta^2$, что подтверждается численными исследованиями. Таким образом, дисперсионное соотношение $2k_{xi} + k_{yi}^2 + E_{01} + E_{02} = 0$ при больших углах между волнами можно рассматривать как физическое дисперсионное соотношение, определяющее скорости движения гребней. При этом эволюция гребней описывается уравнениями (3.8), а перенос энергии — верхними уравнениями системы (3.6), в которых k_e зависит только от η .

Автор благодарит А. Г. Куликовского и А. А. Бармина за полезные обсуждения, а также сотрудников отдела механики Математического института АН СССР им. В. А. Стеклова за критические замечания, стимулировавшие интерес к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yue D. K. P., Mei C. C. Forward diffraction of Stokes waves by a thin wedge // J. Fluid Mech. 1980. V. 99. № 1. P. 33–52.
2. Бахолдин И. Б. Усредненные уравнения и разрывы, описывающие распространение волн Стокса с медленно меняющимися параметрами // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 5. С. 113–121.



Фиг. 5

3. Гуревич А. В., Питаевский Л. П. Нестационарная структура бесстолкновительной ударной волны // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. № 2. С. 590–604.
4. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
5. Павлов М. В. Нелинейное уравнение Шредингера и метод усреднения Боголюбова – Уизема // Теорет. и мат. физика. 1987. Т. 71. № 3. С. 351–356.
6. Дубровин Б. А., Новиков С. П. Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория // Успехи мат. наук. 1989. Т. 44. № 6. С. 29–98.
7. Бахолдин И. Б. Разрывы переменных, характеризующих распространение уединенных волн в слое жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 3. С. 87–93.
8. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.VI.1991