МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1992

УДК 532.517.013.4

М. А. БРУТЯН, П. Л. КРАПИВСКИЙ

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ГАЗА

Исследуем устойчивость простейшего однонаправленного периодического течения сжимаемого вязкого газа, индуцированного периодической по одной из координат массовой силой. В несжимаемой жидкости это течение детально изучено в линейном [1, 2] и слабонелинейном [3, 4] случаях. В этих работах аналитически описано формирование крупномасштабных когерентных структур в вязкой жидкости за счет длинноволновой неустойчивости исходного мелкомасштабного течения. В последующих исследованиях [5–9] содержатся обобщения на близкие двумерные и трехмерные течения вязкой несжимаемой жидкости. Устойчивость периодических однонаправленных течений микрополярной и вязкоупругой жидкости изучена в недавних работах [10, 11].

В настоящей работе показано, что и в вязком газе можно получить сходные результаты – точно рассчитать критическое число Рейнольдса потери устойчивости; качественно определить характеристики формирующейся крупномасштабной когерентной вихревой структуры. Эти результаты следует рассматривать как возможный подход к одной из интереснейших проблем теории турбулентности – задаче формирования крупномасштабных структур в вязком газе.

1. Постановка задачи. Введение медленных переменных. Рассмотрим устойчивость безграничного однонаправленного периодического течения вязкого теплопроводного газа, индуцированного периодической по координате y массовой силой F, направленной вдоль оси x. Как и в большинстве предшествующих работ при анализе устойчивости ограничимся двумерными течениями. Уравнения движения в этом случае имеют вид [12]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)=0 \tag{1.1}$$

$$\rho\frac{du}{dt}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\eta\left(\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}(\zeta\nabla\cdot\mathbf{V})+F \tag{1.2}$$

$$\rho\frac{dv}{dt}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\eta\left(\frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}(\zeta\nabla\cdot\mathbf{V}) \tag{1.3}$$

$$T\rho\frac{dS}{dt}=\nabla\cdot(\varkappa\nabla T)+\frac{\eta}{2}\left[\left(\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]+\zeta(\nabla\cdot\mathbf{V})-Fu \tag{1.4}$$

Здесь использованы стандартные обозначения для термодинамических переменных (ρ, p, T, S – плотность, давление, температура и энтропия единицы массы), кинематических переменных (u, v — компоненты скорости по осям x и y) и коэффициентов переноса (η, ζ — коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности).

В предшествующих работах [1—4] детально исследована устойчивость течения $u \sim \sin(y)$, индуцированного внешней силой $F \sim \sin(y)$, в вязкой несжимаемой жидкости. Это течение часто называют течением Колмогорова (см., например, обзор [13]). Построим аналог этого течения в сжимаемом газе. Учитывая соотношения $\partial/\partial t=0$, $\partial/\partial x=0$ и $v=0$, из (1.1)—(1.4) находим

$$\frac{d}{dy}\left(\eta\frac{du}{dy}\right)+F=0, \qquad p=\text{const}, \qquad \frac{d}{dy}\left(\varkappa\frac{dT}{dy}\right)+\eta\left(\frac{du}{dy}\right)^2-Fu=0 \quad (1.5)$$

Подставляя выражение для F из первого уравнения (1.5) в последнее и интегрируя, получаем

$$\varkappa\frac{dT}{dy}+\eta u\frac{du}{dy}=0 \quad (1.6)$$

Учтем, что отношение $\eta/\varkappa$ обычно является постоянной величиной, хотя по отдельности коэффициенты η и $\varkappa$ меняются при изменении температуры T. Это строго доказывается в кинетической теории одноатомных газов [14] и приближенно выполняется в более сложных случаях. Предполагая в дальнейшем отношение $\eta/\varkappa$ постоянным, проинтегрируем (1.6) еще раз и найдем распределение температуры

$$T=\text{const}-(\eta/2\varkappa)u^2 \quad (1.7)$$

Возвращаясь к первому уравнению (1.5), проинтегрируем его по y, приняв в качестве F стандартное значение $F=\sin(y)$. В результате получим

$$\eta\frac{du}{dy}=\cos y \quad (1.8)$$

Поскольку $\eta=\eta(T)$, а связь T и u известна (1.7), тем самым получено обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $u=u(y)$. Решение (1.8) оказывается весьма громоздким даже в случае степенной зависимости коэффициентов переноса от температуры, $\eta(T) \sim T^n$. Поэтому разумно вначале исследовать простейшую возможность $n=0$, т. е. случай постоянных коэффициентов переноса

$$\eta=\text{const}, \qquad \zeta=\text{const}, \qquad \varkappa=\text{const} \quad (1.9)$$

В общеизвестных моделях взаимодействия атомов, когда кинетические коэффициенты могут быть вычислены по методу Чепмена – Энскога [14], поведение (1.9) не встречается: случаю максвелловских молекул соответствует $n=1$, случаю модели твердых сфер $n=1/2$, так что взаимодействие, приводящее к закону (1.9), должно быть еще более «твердым», чем в модели твердых сфер. На самом деле такая модель, под названием модели сверхжестких частиц, встречалась в недавних работах по кинетической теории (см., например, обзор [15]). В этой модели делается априорное предположение о том, что дифференциальное сечение рассеяния растет прямо пропорционально относительной скорости соударяющихся частиц. Несмотря на указанное нефизическое поведение сечения рассеяния, модель оказалась чрезвычайно полезной при определении точных решений уравнения Больцмана [16, 17]. При гидродинамическом описании, как это видно из уравнений Навье – Стокса (1.2)–(1.4), связь (1.9) тоже заметно упрощает ситуацию. Даже при весьма реалистическом описании взаимодействия молекул возможны ситуации, когда связь (1.9) приближенно выполняется в некотором диапазоне изменения температуры. Предположим также, что коэффициент объемной вязкости $\zeta=0$. Из уравнений Навье – Стокса ясно, что общий случай $\zeta\neq0$ ничем, помимо громоздкости, не отличается от частного случая $\zeta=0$.

Проведем обезразмеривание переменных. Единицы длины выберем так, чтобы период течения по оси y равнялся 2π; за единицу скорости и плотности примем их максимальные значения в невозмущенном течении. В безразмерных переменных невозмущенное течение определяется из (1.5)—(1.9) и имеет вид

$$u=\sin y, \qquad T=\frac{3}{5M^2}+\frac{\eta}{2\varkappa}\cos^2 y \tag{1.10}$$

$$p=\frac{3}{5M^2}, \qquad \rho=\frac{p}{T}=\left(1+\frac{5}{6}M^2\frac{\eta}{\varkappa}\cos^2 y\right)^{-1} \tag{1.11}$$

Здесь через $3/5M^2$ обозначена минимальная безразмерная температура в невозмущенном течении, записанная через число Маха M. В качестве модели газа принята стандартная модель совершенного газа. Газ для определенности предполагается одноатомным (в противном случае вместо $3/5\ M^2$ фигурировало бы $1/\gamma M^2$). Отметим, что предположение об одноатомности делает излишним предположение $\zeta=0$ [14].

Исследуем длинноволновую неустойчивость течения (1.10), (1.11). Предположим, что это течение теряет устойчивость при некотором критическом числе Рейнольдса R_*. В области малой надкритичности, т. е. когда R слабо отличается от критического числа R_*, введем малый параметр ε по правилу $\varepsilon^2=1-R_*/R$. Проведем, как и в случае несжимаемой жидкости [3, 4], деформацию пространственно-временных координат и параметров течения

$$t'=\varepsilon^4 t, \qquad x'=\varepsilon x, \qquad y'=y \tag{1.12}$$

$$u=u', \qquad v=\varepsilon v', \qquad p=\frac{3}{5M^2}+\varepsilon p', \qquad \rho=\rho', \qquad T=T', \qquad S=S' \tag{1.13}$$

В новых переменных уравнения неразрывности (1.1) и Навье — Стокса (1.2)—(1.4) принимают вид (при этом штрихи для удобства опускаются)

$$\varepsilon^3\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)=0 \tag{1.14}$$

$$\rho\left[\varepsilon^4\frac{\partial u}{\partial t}+\varepsilon\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]=-\varepsilon^2\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1-\varepsilon^2}{R_*}\left[u_{yy}+\right. \tag{1.15}$$

$$\left.+\varepsilon^2\left(\frac{4}{3}u_{xx}+\frac{1}{3}v_{xy}\right)+\sin y\right]=0$$

$$\rho\left[\varepsilon^4\frac{\partial v}{\partial t}+\varepsilon\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1-\varepsilon^2}{R_*}\left[\frac{4}{3}v_{yy}+\frac{1}{3}u_{xy}+\varepsilon^2 v_{xx}\right] \tag{1.16}$$

$$\rho T\left[\varepsilon^4\frac{\partial S}{\partial t}+\varepsilon\left(u\frac{\partial S}{\partial x}+v\frac{\partial S}{\partial y}\right)\right]=\frac{1-\varepsilon^2}{R_*}\left[(u_y+\varepsilon^2 v_x)^2+\right. \tag{1.17}$$

$$\left.+\frac{4}{3}\varepsilon^2(u_x^2+v_y^2-u_xv_y)+\frac{\varkappa}{\eta}(T_{yy}+\varepsilon^2T_{xx})-u\sin y\right]$$

Поскольку возмущенное течение предполагается периодическим по y, удобно проинтегрировать (1.14)—(1.17) по периоду. В результате приходим к интегральным соотношениям, которые играют роль асимптотических условий разрешимости и позволяют определить критическое число Рейнольдса R_*. Особенно удобным окажется соотношение, полученное после интегрирования (1.16), а именно

$$\varepsilon^3\int_0^{2\pi}\rho\frac{\partial v}{\partial t}dy+\int_0^{2\pi}\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy=\varepsilon\frac{1-\varepsilon^2}{R_*}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^{2\pi}v\,dy \qquad (1.18)$$

2. Определение критического числа Рейнольдса. Решение задачи ищем в виде асимптотических рядов по малому параметру

$$(u, v)=(u_0, v_0)+\varepsilon(u_1, v_1)+\varepsilon^2(u_2, v_2)+\ldots \qquad (2.1)$$
$$(\rho, p, T, S)=(\rho_0, p_0, T_0, S_0)+\varepsilon(\rho_1, p_1, T_1, S_1)+\ldots$$

Термодинамические переменные одноатомного совершенного газа в исходных переменных связаны известными соотношениями $p=\rho T$ и $S=3/2\ln(p/\rho^{5/3})$, так что после преобразования (1.13) получаем

$$S={}^5/_2\ln T-\ln(p_\infty+\varepsilon p),\quad p_\infty+\varepsilon p=\rho T,\quad p_\infty={}^3/_5M^2 \qquad (2.2)$$

Подставляя (2.1) в (1.14)—(1.17), в нулевом приближении приходим к уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho_0u_0)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho_0v_0)=0,\qquad \frac{\partial^2u_0}{\partial y^2}+\sin y=0 \qquad (2.3)$$

$$\frac{4}{3}\frac{\partial^2v_0}{\partial y^2}+\frac{1}{3}\frac{\partial^2u_0}{\partial x\partial y}=R_*\frac{\partial p_0}{\partial y} \qquad (2.4)$$

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2+\frac{\varkappa}{\eta}\frac{\partial^2T_0}{\partial y^2}u_0\sin y \qquad (2.5)$$

Периодическое решение второго уравнения (2.3) имеет вид $u_0=\sin y$ На самом деле периодическое решение определено с точностью до произвольной аддитивной функции от x и t. Однако естественно потребовать равенства нулю среднего потока жидкости

$$\int_0^{2\pi}u\,dy=0,\qquad \lim_{L\to\infty}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}v\,dx=0 \qquad (2.6)$$

Условие замкнутости (2.6), иногда без явной оговорки, часто используется далее при построении решения. Из (2.4), (2.5) находим распределение температуры, которое оказалось совпадающим с невозмущенным распределением (1.11). Выражения для плотности и энтропии единицы массы в нулевом приближении непосредственно следуют из термодинамических соотношений (2.2)

$$\rho_0=\frac{p_\infty}{T_0},\qquad S_0=\frac{5}{2}\ln T_0-\ln p_\infty \qquad (2.7)$$

Теперь из (2.3) с учетом (2.7) находим $v_0=T_0\Phi(x, t)$ с произвольной функцией $\Phi(x, t)$. Последняя неизвестная функция p_0 определяется из уравнения (2.4) с учетом найденных выражений для компонент скорости и имеет вид

$$p_0=-\frac{2}{3R_*}\frac{\eta}{\varkappa}\Phi(x,t)\sin 2y \qquad (2.8)$$

Асимптотическое условие разрешимости (1.18) в нулевом приближении принимает вид

$$\int_0^{2\pi}\rho_0\left(u_0\frac{\partial v_0}{\partial x}+v_0\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)dy=0 \qquad (2.9)$$

На построенном выше решении оба интеграла в (2.9) оказываются нулевыми, так что условие разрешимости автоматически выполняется. Совершенно аналогично в первом приближении приходим к уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 u_1+\rho_1 u_0)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho_0 v_1+\rho_1 v_0)=0 \tag{2.10}$$

$$\rho_0\left(u_0\frac{\partial u_0}{\partial x}+v_0\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)=\frac{1}{R_*}\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \tag{2.11}$$

$$\rho_0\left(u_0\frac{\partial v_0}{\partial x}+v_0\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p_1}{\partial y}+\frac{1}{R_*}\left(\frac{4}{3}\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}+\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\,\partial y}\right) \tag{2.12}$$

$$\rho_0 T_0\left(u_0\frac{\partial S_0}{\partial x}+v_0\frac{\partial S_0}{\partial y}\right)=\frac{1}{R_*}\left(2\frac{\partial u_0}{\partial y}\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\varkappa}{\eta}\frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2}-u_1\sin y\right) \tag{2.13}$$

При построении первого приближения используем нулевое приближение, условие замкнутости (2.6) и периодичность по y. Из (2.11) и (2.12) последовательно находим

$$u_1=-R_* p_\infty \Phi\cos y,\qquad T_1=R_* p_\infty\frac{\eta}{8\varkappa}\left(\frac{5\eta}{2\varkappa}+3\right)\Phi\sin 2y \tag{2.14}$$

Плотность ρ_1 находим из термодинамического соотношения (2.2)

$$\rho_1=\frac{p_0-\rho_0 T_1}{T_0}=-A(y)\Phi\sin 2y$$

$$A(y)=\frac{\eta}{\varkappa}\left[\frac{2}{3R_*}\frac{1}{T_0}+\frac{R_*}{8}\left(5\frac{\eta}{2\varkappa}+3\right)\frac{p_\infty}{T_0}\right] \tag{2.15}$$

Уравнение (2.10) с учетом (2.14)—(2.15) и нулевого приближения принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p_\infty v_1}{T_0}\right)=\Phi^2\frac{\partial}{\partial y}(AT_0\sin 2y)+\frac{\partial\Phi}{\partial x}\left(R_*\frac{p_\infty{}^2}{T_0}\cos y+A\sin y\sin 2y\right) \tag{2.16}$$

Можно проинтегрировать (2.16) и найти v_1, однако для определения R_* достаточно соотношения (2.16). Условие разрешимости (1.18) в первом приближении имеет вид

$$\int_0^{2\pi}\left(\rho_1 u_0\frac{\partial v_0}{\partial x}+\rho_0 u_1\frac{\partial v_0}{\partial x}+\rho_0 u_0\frac{\partial v_1}{\partial x}+\rho_1 v_0\frac{\partial v_0}{\partial y}+\rho_0 v_1\frac{\partial v_0}{\partial y}+\right. \tag{2.17}$$

$$\left.+\rho_0 v_0\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)dy=\frac{1}{R_*}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^{2\pi}v_0\,dy$$

Элементарные, но громоздкие вычисления показывают, что первый, второй и шестой интегралы в левой части (2.17) равны нулю. Сумма четвертого и пятого интегралов в левой части (2.17) также равна нулю (по отдельности эти интегралы не равны нулю)

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial v_0}{\partial y}(\rho_1 v_0+\rho_0 v_1)dy=-\int_0^{2\pi}v_0\frac{\partial}{\partial y}(\rho_1 v_0+\rho_0 v_1)dy=\int_0^{2\pi}v_0\frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 u_0+\rho_0 u_1)dy=$$

$$=-\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial x}\left(\int_0^{2\pi}T_0 A\sin y\sin 2y\,dy+R_* p_\infty{}^2\int_0^{2\pi}\cos y\,dy\right)=0 \tag{2.18}$$

При вычислении этого интеграла последовательно использовано интегрирование по частям с учетом периодичности, уравнение неразрывности (2.10) и полученные выше выражения для ρ_0, ρ_1, u_0, u_1 и v_0. Наконец, равенство

$$\int_0^{2\pi} T_0 A \sin y \sin 2y \, dy = 0 \tag{2.19}$$

которое следует из выражений (1.11) и (2.15) для функций $T_0(y)$ и $A(y)$ окончательно доказывает заключительное утверждение в (2.18). Таким образом, левая часть (2.17) равна

$$\int_0^{2\pi} \rho_0 u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{2\pi} \frac{p_\infty v_1}{T_0} \sin y \, dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{2\pi} \cos y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p_\infty v_1}{T_0}\right) dy$$

В вычислениях вновь было использовано интегрирование по частям и периодичность подынтегрального выражения. Воспользовавшись соотношением (2.16) и тождеством (2.19), получаем

$$\int_0^{2\pi} \rho_0 u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} dy = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\left[R_*p_\infty^2 \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 y}{T_0} dy + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} A(y) \sin^2 2y \, dy\right] \tag{2.20}$$

Из (2.17) и (2.20) окончательно находим искомое выражение для критического числа Рейнольдса потери устойчивости

$$R_*^2 = \frac{1+\lambda/2 - 8\lambda C/(3p_\infty)}{B+\lambda(B-2C)(\lambda p_\infty+3)/4}, \qquad \lambda = \frac{\eta}{2\varkappa p_\infty} \tag{2.21}$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 y \, dy}{1+\lambda \cos^2 y} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}}\right)$$

$$C(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 y \cos^2 y \, dy}{1+\lambda \cos^2 y} = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}} + \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}}\right)\right]$$

В наиболее интересном случае малых чисел Маха из (2.21) получаем асимптотическое выражение для критического числа Рейнольдса

$$R_* \approx \sqrt{2}\left[1 + \frac{5}{96}\frac{\eta}{\varkappa}\left(7 - \frac{5}{2}\frac{\eta}{\varkappa}\right)M^2 + O(M^4)\right]$$

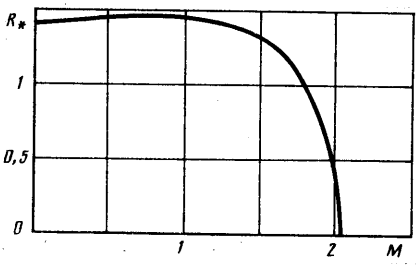
Для упрощения формулы (2.21) полезно использовать соотношение $\eta/\varkappa = \mathrm{Pr}/C_p$, которое по существу является определением числа Прандтля Pr. В одноатомном газе $C_p = 5/2$, а число Прандтля близко к $2/3$ (для максвелловских молекул оно в точности равно $2/3$) [14]. Поэтому в дальнейшем принимаем $\eta/\varkappa = 4/15$. В результате (2.21) принимает следующий вид:

$$R_* = \sqrt{\frac{1+(1/2)\lambda - 20\lambda^2 C}{B + (11/12)\lambda(B-2C)}}, \qquad \lambda = \frac{2M^2}{9} \tag{2.22}$$

График зависимости $R_* = R_*(M)$ представлен на фигуре. Любопытно, что при малых числах Маха величина R_* возрастает, т. е. устойчивость течения повышается. Это следует и из асимптотического разложения формулы (2.22) при малых M

$$R_* \approx \sqrt{2}\left[1+\frac{19}{48}\lambda-\frac{485}{384}\lambda^2+O(\lambda^3)\right]$$

При дальнейшем возрастании числа M критическое число Рейнольдса достигает максимума в точке $M_1=0.8752$, $R_*(M_1)=1,4605$; затем происходит убывание R_* до нуля в точке $M_2=2,0222$. Столь нетривиальная зависимость требует объяснения. В рассматриваемой задаче число Рейнольдса лежит в области малой надкритичности, т. е. оно близко к критическому числу R_*, которое в свою очередь является величиной порядка единицы (например, при $M=0$ находим $R_*=\sqrt{2}$ в полном соответствии с известным результатом [1]). Поскольку приближение сплошной среды работает лишь при малых числах Кнудсена, из известного соотношения $\mathrm{Kn}=M/R$ немедленно заключаем, что гидродинамическое описание в рассматриваемой задаче справедливо лишь при $M\ll 1$, в то время как неожиданное поведение зависимости $R_*=R_*(M)$ наступает в районе $M=O(1)$, т. е. в той области, где уравнения Навье — Стокса в данной задаче уже не справедливы.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мешалкин Л. Д., Синай Я. Г.* Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 6. С. 1140–1143.
2. *Green J. S. A.* Two-dimensional turbulence near the viscous limit // J. Fluid Mech. 1974. V. 62. № 2. P. 373–287.
3. *Непомнящий А. А.* Об устойчивости вторичных течений вязкой жидкости в неограниченном пространстве // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 5. С. 886–891.
4. *Sivashinsky G. I.* Weak turbulence in periodic flow // Physica. Ser. D. 1985. V. 17. № 2. P. 243–255.
5. *Sivashinsky G., Yakhot V.* Negative viscosity effect in large-scale flows // Phys. Fluids. 1985. V. 28. № 4. P. 1040–1042.
6. *Bayly B. J. Yakhot V.* Positive and negative effective viscosity phenomena in isotropic and anisotropic Beltrami flows // Phys. Rev. Ser. A. 1986. V. 34. № 1. B. 381–391.
7. *She Z. S.* Metastability and vortex pairing in the Kolmogorov flow // Phys. Lett. Ser. A. 1987. V. 124. № 3. P. 161–164.
8. *Yakhot V., Sivashinsky G.* Negative viscosity phenomena in three-dimensional flows // Phys. Rev. Ser. A. 1987. V. 35. № 2. P. 815–820.
9. *Brutyan M. A., Krapivsky P. L.* Stability of periodic unidirectional flows in three-dimensions // Phys. Lett. Ser. A. 1991. V. 152. № 3/4. P. 211–214.
10. *Брутян М. А., Крапивский П. Л.* Устойчивость периодического течения в микрополярной жидкости // Инж.-физ. журн. 1991. Т. 60. № 4. С. 670–679.
11. *Брутян М. А., Крапивский П. Л.* Устойчивость течения Колмогорова в вязкоупругой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 4. С. 17–24.
12. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
13. *Обухов А. М.* Течение Колмогорова и его лабораторное моделирование // Успехи мат наук. 1983. Т. 38. № 4. С. 101–111.
14. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 527 с.
15. *Ernst M. N.* Nonlinear model-Boltzmann equations and exact solutions // Phys. Rep. 1981. V. 78. № 1. P. 1–171.
16. *Ernst M. N.* Exact iolutions of the nonlinear-Boltzmann equation // J. Stat. Phys. 1984. V. 34. № 5–6. P. 1001–1017.
17. *Бобылев А. В.* Точные решения нелинейного уравнения Больцмана и теория релаксации максвелловского газа // Теорет. и мат. физика. 1984. Т. 60. № 2. С. 280–310.

Москва

Поступила в редакцию 26.III.1991