

УДК 532.613.013.4:537.84

© 1991 г.

М. П. ЗЕКЦЕР

## **УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ ДВУХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ**

В [1] исследована устойчивость границы раздела двух различных по своим физическим свойствам несмешивающихся проводящих жидкостей, перпендикулярно которой в стационарном состоянии протекает электрический ток, с учетом силы тяжести и джоулева тепловыделения. Внешнее магнитное поле отсутствовало, индуцированным магнитным полем пренебрегалось. Оказалось, что в определенном диапазоне параметров состояние покоя неустойчиво по отношению к малым возмущениям, причем дестабилизирующим фактором является термокапиллярный механизм, обусловленный зависимостью поверхностного натяжения от температуры. При этом поле температур в стационарном состоянии должно быть неоднородным.

Рассматриваемая задача устойчивости связана с практически важной проблемой изучения устойчивости процессов в электролизерах, будучи в некотором смысле модельной по отношению к этому сложному техническому устройству. Ванна электролизера имеет длину  $\sim 10$  м, толщина верхнего слоя (криолита)  $\sim 5$  см, нижнего (жидкого алюминия)  $\sim 30$  см.

В предлагаемой работе проведено исследование устойчивости с учетом индуцированного магнитного поля и силы тяжести. Расчеты выполнены для конкретных значений параметров, соответствующих условиям электролизера. Найдены параметры регулятора с обратной связью, позволяющего стабилизировать неустойчивые стационарные состояния по сигналам датчика, измеряющего отклонение какого-либо параметра от стационарного значения.

1. Рассмотрим два слоя вязких, несжимаемых, электропроводящих, несмешивающихся жидкостей, ограниченных снизу и сверху плоскими бесконечно проводящими электродами, между которыми в стационарном состоянии течет ток плотностью  $j_0$ . Толщина верхнего слоя  $H_1$ , нижнего  $H_2$ . Совместим ось  $X$  с невозмущенной границей раздела сред, а ось  $Y$  направим вверх перпендикулярно электродам.

Состояние, которое исследуется на устойчивость, стационарно и одномерно. Нижняя стенка полагается изотермической, а верхняя адиабатической. На границе раздела сред  $\beta$ , плоской ( $\beta=0$ ) в стационарном состоянии, должны выполняться условия непрерывности касательной составляющей вектора напряженности электрического поля, вектора индукции магнитного поля и, как следствие, нормальной компоненты плотности тока, температуры и теплового потока. Условия для тензора напряжений  $\Pi$  будут выписаны с учетом искривления границы раздела сред (давление Лапласа  $p_L$ ) и зависимости поверхностного натяжения  $\Sigma$  от температуры, определяющей термокапиллярную конвекцию, которая является причиной потери устойчивости. Все теплофизические характеристики: плотность  $\rho$ , кинематическая вязкость  $\nu$ , проводимость  $\sigma$ , теплопроводность  $\chi$  и температуропроводность  $a$ , будем считать, как и в [1], постоянными и различными для двух сред.

Каждая из сред описывается системой уравнений магнитной гидродинамики

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \nabla) \mathbf{U} = - \frac{\nabla P^*}{\rho} + \frac{1}{4\pi\rho} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} + \nu \Delta \mathbf{U} + \mathbf{g}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{U} - (\mathbf{U} \nabla) \mathbf{B} + \nu_m \Delta \mathbf{B} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{U} \nabla) T = a \Delta T + \frac{a \nu_m}{4\pi\chi} (\text{rot } \mathbf{B})^2$$

$$\text{div } \mathbf{U} = 0, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad P^* = P + \frac{B^2}{8\pi}, \quad \nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$$

Плотность тока  $\mathbf{j}$  и электрическое поле  $\mathbf{E}$  можно восстановить по соотношениям

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{B}, \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c} \mathbf{U} \times \mathbf{B} \quad (1.2)$$

Уравнения (1.1) и (1.2) должны быть дополнены условиями на электродах и на границе раздела сред

$$y = H_j; \quad U_j = 0, \quad \frac{\partial T_1}{\partial y} = 0, \quad T_2 = T_w, \quad E_{\tau j} = 0, \quad j = 1, 2 \quad (1.3)$$

$$y = \beta; \quad [E_{\tau}] = 0, \quad [\mathbf{B}] = 0, \quad [T] = 0, \quad \left[ \chi \frac{\partial T}{\partial n} \right] = 0 \quad (1.4)$$

$$[\Pi_n] = p_L, \quad [\Pi_{\tau}] = \frac{\partial \Sigma}{\partial \tau}, \quad [\mathbf{U}] = 0$$

Здесь  $\tau$  и  $n$  — соответственно касательное и нормальное к границе раздела сред координатные направления. Квадратные скобки обозначают, что берется разность значений соответствующей величины с одной и другой стороны границы раздела.

Система (1.1)–(1.2) имеет стационарное решение, соответствующее покоящейся жидкости

$$\mathbf{U} = 0, \quad T = T(y), \quad j = -e_y j_0, \quad B = e_z B(x), \quad P^* = P^*(y)$$

Это связано с тем, что пондеромоторная сила оказывается потенциальной и приводит лишь к перераспределению давления. В явном виде решения для давления и температуры с учетом (1.3)–(1.4) выписаны в [1]. Магнитное поле линейно зависит от координаты.

Линеаризуем (1.1) относительно полученного стационарного состояния

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= -\frac{\nabla p^*}{\rho} + \frac{B}{4\pi\rho} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial z} + \frac{1}{4\pi\rho} b_x \frac{d\mathbf{B}}{dx} + \nu \Delta \mathbf{u} \\ \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} &= \nu_m \Delta \mathbf{b} + B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} - u_x \frac{d\mathbf{B}}{dx} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \Delta \theta - u_y \frac{dT}{dy} + \frac{2\nu_m a}{4\pi\chi} \left[ \frac{dB}{dx} \left( \frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x} \right) \right]$$

$$\text{div } \mathbf{U} = 0, \quad \text{div } \mathbf{b} = 0, \quad \frac{dB}{dx} = \frac{4\pi}{c} j_0$$

Из (1.5) видно, что в общем случае возмущения скорости трехмерные. Упростим задачу и будем рассматривать возмущения следующего вида:

$$\mathbf{u} = e_x u_x(x, y) + e_y u_y(x, y), \quad \theta = \theta(x, y), \quad b = e_z b(x, y), \quad p^* = p^*(x, y)$$

Будем искать решение (1.5) вида  $\exp(ikx + \lambda t)$ , где  $k$  — волновое число, а  $\lambda$  — спектральный параметр с амплитудами, зависящими от координаты  $Y$ . Переходя от компонент скорости к функции тока  $W$ , получим для

безразмерных амплитуд систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\lambda(W'' - k^2W) &= v^*(W^{IV} - 2k^2W'' + k^4W) \\ \lambda b &= v^*R(b'' - k^2b) - W'\end{aligned}$$

(1.6)

$$\begin{aligned}\lambda\theta &= \frac{v^*}{Pr}(\theta'' - k^2\theta) + ikW(\tau^* - Ny) + \frac{2Nv^*}{Pr}ikb \\ R &= \frac{v_m}{v}, \quad N = \frac{j_0^2 H_1}{\sigma\chi\tau_1}, \quad Pr = \frac{v}{a}, \quad \tau = \frac{dT(0)}{dy}\end{aligned}$$

В качестве характерных значений при обезразмеривании приняты для  $W - v_1$ , для  $\theta - \tau_1 H_1$ , для  $b - 4\pi j_0 H_1 / c$ , для координаты  $- H_1$ , для времени  $- H_1^2 / v_1$ . Здесь и ниже  $v^*$ ,  $\rho^*$ ,  $\tau^*$  и  $\chi^*$  — значения соответствующих величин, отнесенных к параметрам 1-й среды. Система уравнений (1.6) имеет следующее решение:

$$\begin{aligned}W &= C_1 e^{ky} + C_2 e^{-ky} + C_3 e^{ry} + C_4 e^{-ry} \\ b &= C_5 e^{sy} + C_6 e^{-sy} + \frac{k}{\lambda}(-C_1 e^{ky} + C_2 e^{-ky}) + \frac{r}{\lambda(R-1)}(C_3 e^{ry} - C_4 e^{-ry}) \\ \theta &= C_7 e^{qy} + C_8 e^{-qy} + \frac{ikN}{\lambda} \left\{ C_1 \left( -y + \frac{\tau^*}{N} - \frac{4kv^*}{\lambda Pr} \right) e^{ky} + \right. \\ &+ C_2 \left( -y + \frac{\tau^*}{N} + \frac{4kv^*}{\lambda Pr} \right) e^{-ky} + \frac{Pr}{Pr-1} \left[ C_3 \left( -y + \frac{\tau^*}{N} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{2rv^*}{\lambda} \left( \frac{1}{Pr(R-1)} - \frac{1}{Pe-1} \right) \right) e^{ry} + C_4 \left( -y + \frac{\tau^*}{N} - \frac{2rv^*}{\lambda} \left( \frac{1}{Pr(R-1)} - \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. - \frac{1}{Pe-1} \right) \right) e^{-ry} \right] - \frac{2v^*R}{1-RPr} (C_5 e^{sy} + C_6 e^{-sy}) \left. \right\} \\ r^2 &= k^2 + \frac{\lambda}{v^*}, \quad s^2 = k^2 + \frac{\lambda}{v^*R}, \quad q^2 = k^2 + \frac{\lambda Pr}{v^*}\end{aligned} \quad (1.7)$$

Возмущение давления легко восстановить, используя уравнение движения. После обезразмеривания по характерной величине  $\rho_1 v_1^2 / H_1^2$  получим

$$p^* = i\rho^*\lambda(C_1 \exp(ky) - C_2 \exp(-ky)) \quad (1.8)$$

Для определения неизвестных коэффициентов  $C_i$ , входящих в (1.7), воспользуемся линеаризованными граничными условиями (1.3), (1.4)

$$y = h_j; \quad W_j = 0, \quad W_j' = 0, \quad \theta_1' = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad b_j' = 0$$

$$y = \beta; \quad W_1 = W_2 = -\frac{\lambda\beta}{ik}, \quad W_1' = W_2'$$

(1.9)

$$p_1 + 2ikW_1' = p_2 + 2ikW_2' \rho_2^* v_2^* - \beta(G + MQ)$$

$$W_1' + k_2 W_1 = \rho_2^* v_2^* (W_2' + k^2 W_2) - \frac{k}{i} M(\beta + \theta_1)$$

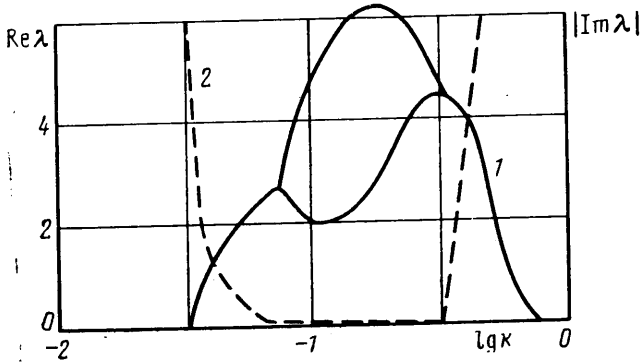
$$\theta_1 = \theta_2 + (\tau_2^* - 1)\beta, \quad \theta_1' - N_1 \beta = \chi_2^* (\theta_2' - N_2 \beta)$$

$$b_1 = b_2, \quad b_1' = b_2'$$

$$G = \frac{(\rho_2 - \rho_1)gH_1^3}{\rho_1 v_1^2}, \quad M = \frac{\tau_1 H_1^2 \varepsilon}{\rho_1 v_1^2}, \quad Q = \frac{\Sigma}{\tau_1 H_1 \varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{\partial \Sigma}{\partial T}$$

Здесь  $G$  — число Грасгофа,  $M$  — число Марангони. Уравнения (1.9) образуют систему однородных алгебраических уравнений, нетривиальное решение которой существует, если ее определитель равен нулю.

Расчеты проводились для безразмерных параметров, соответствующих реальному электролизеру:  $R_1=2,67 \cdot 10^9$ ,  $R_2=2 \cdot 10^7$ ,  $Pr_1=0,19$ ,  $Pr_2=0,0144$ ,  $N_1=0,3$ ,  $N_2=10^{-6}$ ,  $\nu_2^*=0,25$ ,  $\rho_2^*=1,14$ ,  $\chi_2^*=4$ ,  $\tau_2^*=0,25$ ,  $G=8 \cdot 10^7$ ,  $M=7 \cdot 10^5$ ,  $Q=8,1$ .



На графике (фигура) приведены зависимости действительной (сплошная линия 1) и мнимой (штриховая линия 2) частей параметра  $\lambda$  от волнового числа  $k$  в области неустойчивости.

Представляет интерес сравнение результатов [1] и настоящей работы. Общий вывод таков: система с учетом индуцированного магнитного поля оказывается более устойчивой, чем при наличии лишь потенциальных электрических возмущений. Изменился и характер спектра в неустойчивой области: от чисто действительного в [1] до комплексного здесь. Сама область неустойчивости сдвинута в область меньших значений волнового числа. Что касается качественных закономерностей, исследованных в [1], например влияние толщин слоев на устойчивость системы, то они остались теми же. Можно лишь отметить, что полученное численное значение для толщины  $H_2$ , при которой возникает неустойчивость, в рассматриваемой постановке ближе к реально существующим (25 см здесь и 10 см в [1]; расчеты проводились при  $H_1=5$  и  $H_2=30$  см).

2. Перейдем теперь к рассмотрению задачи стабилизации неустойчивых стационарных состояний. Пусть размер системы в продольном направлении (по оси  $X$ ) есть  $L$ . Применяя для решения (1.6) разложение по тригонометрическим функциям от  $X$ :  $W$  и  $b$  — по синусам, а  $\theta$  — по косинусам, получим систему уравнений, эквивалентную (1.9), в которой мнимую единицу надо заменить единицей. Безразмерный волновой вектор при этом определится как  $k = \pi n H_1 / L$ , где  $n$  — любое натуральное число. Отсюда следует, что сдвиг области неустойчивости в область меньших  $k$  эквивалентен увеличению порога устойчивости по параметру  $L$  (от нескольких десятков сантиметров в [1] до нескольких метров).

Используемое для решения представление функций в виде ряда имеет место для адиабатической, диэлектрической непроницаемой боковой стенки с проскальзыванием. Последнее условие не вполне физично. Но это, во-первых, плата за колоссальное упрощение, позволяющее довести до числа решение задачи, а во-вторых, вдали от концов, как показывают многочисленные расчеты, используемое разложение вполне приемлемо.

Решение задачи стабилизации неустойчивого стационарного состояния, изложенное ниже, основано на методе [3]. Суть его состоит во введении в систему некоторых малых возмущений, амплитуда которых регулируется обратной связью. Задача считается решенной, если построен такой ре-

гулятор, что спектр системы объект — регулятор не имеет корней в правой полуплоскости комплексной области  $\lambda$ .

Будем рассматривать регулятор, осуществляющий граничное управление, при котором через верхний электрод подается по определенному закону нестационарный поток тепла. Временной закон изменения теплового потока вырабатывается регулятором по данным измерительной системы (датчика), следящей за каким-либо параметром. Предположим, что датчик измеряет возмущение границы раздела сред в некоторой точке  $x_1$ . Введение такого регулятора приведет в математической постановке задачи к изменению одного граничного условия (1.9)

$$y=1, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial y} = g(x)u(\lambda) \quad (2.1)$$

Функция  $g(x)$ , определяющая неоднородность управляющего взаимодействия вдоль границы, должна быть задана. Ниже будем полагать, что  $g(x)$  — ступенчатая функция

$$g(x) = g_0, \quad 0 \leq x \leq a; \quad g(x) = 0, \quad \frac{L}{H_1} > x > a$$

где  $a$  — варьируемый параметр. Функция  $u(\lambda)$  связана с нестационарной функцией  $U(t)$  обычным в преобразовании Лапласа образом:  $U(t) = u(\lambda) \exp(\lambda t)$ .

Потребуем в соответствии с [3] и принятым устройством датчика, чтобы функция  $u(\lambda)$  имела вид  $u(\lambda) = Q(\lambda)\beta(\lambda, x_1)$ . Здесь  $Q(\lambda)$  — передаточная функция блока обратной связи, а  $\beta$  — возмущение границы раздела сред. Введем рассмотрение вектор-функцию  $Z$ , отвечающую исходным уравнениям и видоизмененным с учетом (2.1) граничным условиям при  $u(\lambda) = 1$ . Тогда система объект — регулятор будет устойчивой, если уравнение [3]

$$Q(\lambda)Z_\beta(\lambda, X_1) = 1 \quad (2.2)$$

не имеет корней, отвечающих условию  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ ;  $Z_\beta(\lambda, x_1)$  — возмущение границы  $\beta$  в т.  $x_1$ , определенное как компонента вектор-функции  $Z$ .

Рассматриваемый регулятор одноканальный. Построение такого регулятора решает задачу, если исходная система (1.9) имеет неустойчивые моды с кратностью только единица [4]. Здесь под кратностью понимается число неустойчивых мод, соответствующих одному и тому же значению  $\lambda$ . Проведенные в первой части расчеты показали (фигура), что рассматриваемая система может иметь неустойчивые моды даже с кратностью четыре, что требует построения четырехканального регулятора. Однако такая ситуация является вырожденной в том смысле, что небольшим изменением параметров, например длины  $L$ , можно добиться перехода в состояние только с однократно неустойчивыми модами. Исходя из этого, будем задавать параметры так, чтобы существовали только однократно неустойчивые моды.

Построим функцию  $Q(\lambda)$ , удовлетворяющую условию отсутствия у уравнения (2.2) корней с  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ . Будем искать  $Q(\lambda)$  в классе дробно-рациональных функций в виде

$$Q(\lambda) = \alpha_0 \left[ 1 + \alpha_0 \left( \sum_i \frac{\alpha_i}{\lambda - \mu_i} + D(\lambda) \right) \right]^{-1} \quad (2.3)$$

Здесь  $\alpha_0$  — произвольная константа, а  $D(\lambda)$  — некоторая дробно-рациональная функция, подлежащая определению.

Функция  $D(\lambda)$  по своему смыслу должна аппроксимировать аналитическую функцию  $Z_0(\lambda)$ , которую можно представить в виде

$$Z_0(\lambda) = Z(\lambda) - \sum_{i=1}^N \frac{C_i}{\lambda - \lambda_i} \quad (2.4)$$

Здесь  $\lambda_i$  — собственное значение, удовлетворяющее условию  $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ , известное из решения исходной спектральной задачи. Коэффициенты  $C_i$  являются вычетами функции  $Z(\lambda)$  в точках  $\lambda_i$ . Для их определения воспользуемся известным соотношением для вычета функции типа  $f(\lambda) = \varphi(\lambda)/\psi(\lambda)$ , где  $\varphi(\lambda)$  и  $\psi(\lambda)$  — регулярные в

окрестности точки  $\lambda_i$ , причем для  $\psi(\lambda)$  значение  $\lambda_i$  есть простой полюс

$$\operatorname{res} \left[ \frac{\varphi(\lambda)}{\psi(\lambda)} \right] = \frac{\varphi(\lambda_i)}{\psi'(\lambda_i)} \quad (2.5)$$

Функция  $Z(\lambda)$  может быть представлена в виде отношения двух определителей, которые отвечают условиям, предъявляемым к  $\Phi(\lambda)$  и  $\psi(\lambda)$ . Отсюда следует, что (2.5) можно использовать для определения коэффициентов  $C_i$ .

Предлагаемый ниже способ [4] построения  $D(\lambda)$  основан на свойствах интерполяционных полиномов Лагранжа, последовательность которых сходится к интерполируемой функции. Введем функцию  $\xi = (\lambda - a_0)/(\lambda + a_0)$ , конформно отображающую правую полуплоскость  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$  на единичный круг  $|\xi| = 1$ ;  $a_0$  — произвольная положительная постоянная. Выберем некоторое число  $N_k$  узлов интерполяции, равномерно распределенных по единичной окружности. Тогда функции  $D(\lambda)$  может быть представлена в виде

$$D(\lambda) = \sum_{m=1}^{N_k+1} S(\lambda, m) Z_0(\lambda_m); \quad S(\lambda, m) = \sum_{l=0}^{N_k} \left( \frac{\xi(\lambda)}{W_m} \right)^l$$

Здесь  $\lambda_m$  — значение спектрального параметра  $\lambda$  в  $m$ -м узле интерполяции,  $W_m = \exp(2\pi i m / (N_k + 1))$ ,  $S(\lambda, m)$  — полиномы Лагранжа.

Постоянные  $\mu_i$  определяются как корни уравнения

$$\prod_{i=1}^N (\lambda - \lambda_i) + V(\lambda) = 0$$

$$V(\lambda) = \sum V_{1i}(\lambda) V_2(\lambda_i)$$

$$V_{1i}(\lambda) = \frac{\omega_i(\lambda)}{\omega_i(\lambda_i)} - \frac{\omega_i'(\lambda_i)}{\omega_i(\lambda_i)} (\lambda - \lambda_i); \quad \omega_i(\lambda) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (\lambda - \lambda_j)$$

$$V_2(\lambda_i) = - \frac{1}{\alpha_0 C_i} \prod_{j=1}^{2N} (\lambda_i - \Lambda_j) \left[ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (\lambda_i - \lambda_j) \right]^{-1}$$

где  $N$  — число неустойчивых мод с собственными значениями  $\lambda_i$ ,  $\Lambda_j$  — произвольная константа, отвечающая единственному условию  $\operatorname{Re} \Lambda_j < 0$ . После того как значения констант  $\mu_i$  определены, находим постоянные  $\alpha_i$

$$\alpha_i = \frac{1}{\alpha_0} \prod_{j=1}^{2N} (\mu_i - \Lambda_j) \left[ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (\mu_i - \mu_j) \prod_{j=1}^N (\mu_i - \lambda_j) \right]^{-1}$$

Рассмотрим в качестве примера ситуацию, когда имеются две неустойчивые моды. В этом случае

$$\mu_{1,2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{4} - V - \lambda_1 \lambda_2}$$

$$V = - \frac{C_2(\lambda_1 - \Lambda_1)(\lambda_1 - \Lambda_2)(\lambda_1 - \Lambda_3)(\lambda_1 - \Lambda_4) - C_1(\lambda_2 - \Lambda_1)(\lambda_2 - \Lambda_2)(\lambda_2 - \Lambda_3)(\lambda_2 - \Lambda_4)}{\alpha_0(\lambda_1 - \lambda_2)C_1C_2}$$

Проведенные расчеты показали, что поставленная задача стабилизации рассматриваемого неустойчивого стационарного состояния решается

введением регулятора со следующими параметрами:  $a=0,75$ ;  $a_0=1$ ;  $\Lambda_j=-5$ ;  $N_k=3$ ;  $\alpha_0=10$ .

Таким образом, на основании проведенных расчетов, один вариант которых представлен выше, можно утверждать, что в некотором диапазоне параметров исследуемая система двух сред становится неустойчивой по отношению к малым возмущениям. Неустойчивое состояние стабилизируется введением специального регулятора с обратной связью, параметры которого определены, исходя из требования устойчивости системы объект — регулятор. Аналогичным образом могут быть застabilизированы и другие неустойчивые состояния системы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бучин В. А., Зекцер М. П. Термокапиллярная неустойчивость границы раздела двух несмешивающихся жидкостей при наличии объемных источников тепла // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 5. С. 156–160.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
3. Бучин В. А. Стабилизация неустойчивого режима работы химического реактора с рециклом как объекта с распределенными параметрами посредством сосредоточенных систем управления // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 3. С. 11–24.
4. Бучин В. А. Стабилизация неустойчивого состояния равновесия жидкости, подогреваемой снизу // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 6. С. 15–27.

Москва

Поступила в редакцию  
15.IV.1991