

УДК 532.516

© 1991 г.

Ю. Я. БОЛДЫРЕВ

К ПРОБЛЕМЕ ПОСТРОЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ РЕЙНОЛЬДСА ГАЗОВОЙ СМАЗКИ

При численном решении уравнения Рейнольдса газовой смазки в случае опор с периодическим микропрофилем возникают значительные трудности при большом числе микропериодов. По этой причине предпринимались усилия для построения асимптотического аналога уравнения Рейнольдса, получаемого при числе микропериодов, растущем до бесконечности. Однако большинство из полученных предельных уравнений ограничены либо макрогеометрией опоры (сфера, цилиндр и т. д.), либо характером ее микрогеометрии.

В ряде работ предельное уравнение получено для произвольной микрогеометрии смазочного слоя, однако при этом сделаны предположения физического характера. Здесь приведен вывод асимптотического уравнения, свободный от ограничений как на макрогеометрию опоры, так и на характер микрогеометрии ее периода и не использующий дополнительных физических предположений.

1. Одним из способов создания эффективного смазочного слоя в гидрогазодинамических опорах является профилирование смазываемой поверхности спиральными микроканавками. Поле давления в формируемом с помощью микроканавок смазочном слое описывается уравнением Рейнольдса гидрогазодинамической теории смазки [1], которое запишем в следующей безразмерной дивергентной форме:

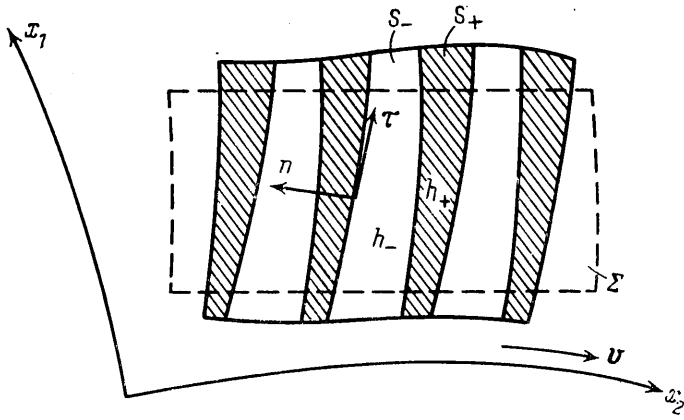
$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{Q}) + \sigma \frac{\partial}{\partial t}(h\rho) = 0, \quad \mathbf{Q} = -h^3 \nabla p + \Lambda h \mathbf{v} \quad (1.1)$$

$$\sigma = \frac{12\mu L_0^2}{h_0^2 p_a T}, \quad \Lambda = \frac{6\mu L_0 U_0}{h_0^2 p_a} \quad (1.2)$$

Здесь \mathbf{Q} — нормированный вектор объемного расхода; σ и Λ — числа сдвигания и сжимаемости; ρ , p — плотность и давление в смазочном слое, отнесенные к соответствующим значениям во внешней среде ρ_a и p_a ; h — местная толщина смазочного слоя, отнесенная к характерной толщине h_0 ; \mathbf{v} — местный вектор скорости скольжения, величина которого нормирована по характерной скорости U_0 ; μ — динамический коэффициент вязкости газа; t и T — безразмерное время и его масштаб; L_0 — характерный размер; div и ∇ — двумерные операторы дивергенции и градиента (определяемые вдоль поверхности смазочного слоя).

Уравнение (1.1) обычно дополняют соотношением баротропности $\rho = p^n$, где в случае несжимаемой смазки $n=0$, а в изотермическом случае $n=1$.

2. Обозначим символом Ω смазываемую поверхность и рассмотрим элемент поверхности Σ с нанесенной на ней микрогеометрией (фиг. 1). Элемент Σ такой, что $\operatorname{mes} \Sigma \ll \operatorname{mes} \Omega$ (mes — лебегова мера), однако его размеры велики по отношению к характерному размеру периодической микроструктуры, а векторные поля \mathbf{Q} и ∇p в его пределах предполагаем однородными с точностью до величин $O(\operatorname{mes} \Sigma)$. Предположим также, что в пределах Σ частично располагаются N периодов микрогеометрии профиля



Фиг. 1

с $\text{mes } S$ каждый, т. е. $\text{mes } \Sigma = N \text{mes } S$. Обозначим индексами плюс и минус средние значения величины функции профиля n в микроканавке и на перемычке, которая, являясь частью микропериода, отделяет их друг от друга (фиг. 1), и определим эти средние значения следующим образом:

$$\langle h_{\pm}^M \rangle = \frac{1}{\text{mes } S_{\pm}} \int_{S_{\pm}} h_{\pm}^M dx_1 dx_2, \quad |M| \geq 1$$

где S_+ и S_- — поверхности, занятые микроканавками и перемычками в пределах $S = S_+ \cup S_-$. Тогда для среднего значения h^M в пределах Σ найдем

$$\langle h^M \rangle = \frac{N}{\text{mes } \Sigma} (\text{mes } S_+ \langle h_+^M \rangle + \text{mes } S_- \langle h_-^M \rangle) \approx \kappa \langle h_+^M \rangle + (1 - \kappa) \langle h_-^M \rangle \quad (2.1)$$

$$\kappa = \frac{\text{mes } \Sigma_+}{\text{mes } \Sigma} + O(\text{mes } \Sigma), \quad 1 - \kappa = \frac{\text{mes } \Sigma_-}{\text{mes } \Sigma} + O(\text{mes } \Sigma) \quad (2.2)$$

где Σ_+ и Σ_- имеют смысл, аналогичный S_+ и S_- , а функция κ характеризует предельную концентрацию микроканавок в данной точке Ω .

В дальнейшем будем использовать подходы, развитые при исследовании математических моделей композитных сред [2, 3].

Введем локальную систему координат (n, τ) — нормаль и касательную к линии разрыва h , разделяющей область микроканавки и выступа в пределах микропериода. Воспользовавшись непрерывностью давления и нормальной компоненты расхода на линии разрыва γ , запишем

$$(\nabla p, \tau)_+ = (\nabla p, \tau)_-, \quad (\mathbf{Q}, \mathbf{n})_+ = (\mathbf{Q}, \mathbf{n})_- \quad (2.3)$$

где символом $(,)$ обозначено скалярное произведение векторов.

Определим средние значения векторов $\langle \mathbf{Q}_+ \rangle$ и $\langle \nabla p_+ \rangle$ в пределах S_+

$$\langle \mathbf{Q}_+ \rangle = \frac{1}{\text{mes } S_+} \int_{S_+} \mathbf{Q} dx_1 dx_2, \quad \langle \nabla p_+ \rangle = \frac{1}{\text{mes } S_+} \int_{S_+} \nabla p dx_1 dx_2$$

Также определим $\langle \mathbf{Q}_- \rangle$ и $\langle \nabla p_- \rangle$. Тогда среднее значение величин $\langle \mathbf{Q} \rangle$ и $\langle \nabla p \rangle$ в области Σ будет вычисляться с помощью соотношений, аналогичных формуле (2.2)

$$\langle \mathbf{Q} \rangle = \kappa \langle \mathbf{Q}_+ \rangle + (1 - \kappa) \langle \mathbf{Q}_- \rangle, \quad \langle \nabla p \rangle = \kappa \langle \nabla p_+ \rangle + (1 - \kappa) \langle \nabla p_- \rangle \quad (2.4)$$

Установим связь между предельными векторами $\langle \mathbf{Q} \rangle$ и $\langle \nabla p \rangle$, для которых как следствие соотношений (2.3) справедлива непрерывность $\langle \nabla p \rangle$ в направлении, касательном к линиям разрыва, а $\langle \mathbf{Q} \rangle$ в направлении, нормальном к ним. Из второго уравнения системы (1.4), учитывая однородность \mathbf{Q} и ∇p в областях S_+ и S_- и используя осредненные величины (2.4), найдем

$$\langle \langle \nabla p \rangle, \mathbf{n} \rangle = \kappa \langle \langle -h_+^{-3} \mathbf{Q}_+ + \Lambda h_+^{-2} \mathbf{v} \rangle, \mathbf{n} \rangle + (1-\kappa) \langle \langle -h_-^{-3} \mathbf{Q}_- + \Lambda h_-^{-2} \mathbf{v} \rangle, \mathbf{n} \rangle \quad (2.5)$$

Для слагаемых, содержащих вектор расхода \mathbf{Q} , имеем следующее выражение:

$$\frac{\kappa}{\text{mes } S_{+s_+}} \int (h_+^{-3} \mathbf{Q}_+, \mathbf{n}) dx_1 dx_2 + \frac{1-\kappa}{\text{mes } S_{-s_-}} \int (h_-^{-3} \mathbf{Q}_-, \mathbf{n}) dx_1 dx_2$$

Перейдем от поверхностных интегралов к криволинейным, пренебрегая членами высшего порядка малости и учитывая (2.2) и (2.3)

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa}{\text{mes } S_+} \int (h_+^{-3} \mathbf{Q}_+, \mathbf{n})|_{\gamma} \delta n_+ dr + \frac{1-\kappa}{\text{mes } S_-} \int (h_-^{-3} \mathbf{Q}_-, \mathbf{n})|_{\gamma} \delta n_- dr = \\ & = \int \left(h_+^{-3} \kappa \frac{\delta n_+}{\text{mes } S_+} + h_-^{-3} (1-\kappa) \frac{\delta n_-}{\text{mes } S_-} \right) (\mathbf{Q}, \mathbf{n})|_{\gamma} dr \end{aligned}$$

Здесь δn_+ и δn_- означают местную ширину (по нормали к γ) канавки и выступа, а dr — элемент дуги проекции линии разрыва γ на Ω . При $\text{mes } \Sigma \rightarrow 0$ и $N \rightarrow \infty$ последний криволинейный интеграл будет стремиться к величине $\langle h^{-3} \rangle \langle \langle \mathbf{Q} \rangle, \mathbf{n} \rangle$.

Таким образом выражение (2.5) принимает следующий окончательный вид:

$$\langle \langle \nabla p \rangle, \mathbf{n} \rangle = -\langle h^{-3} \rangle \langle \langle \mathbf{Q} \rangle, \mathbf{n} \rangle + \Lambda \langle h^{-2} \rangle (\mathbf{v}, \mathbf{n}) \quad (2.6)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \langle \langle \mathbf{Q} \rangle, \boldsymbol{\tau} \rangle &= (\kappa \langle \mathbf{Q}_+ \rangle + (1-\kappa) \langle \mathbf{Q}_- \rangle, \boldsymbol{\tau}) = \\ &= -\langle h^{-3} \rangle \langle \langle \nabla p \rangle, \boldsymbol{\tau} \rangle + \Lambda \langle h \rangle (\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Формулы (2.6) и (2.7) показывают, что искомая связь между предельными векторами $\langle \mathbf{Q} \rangle$ и $\langle \nabla p \rangle$ устанавливается соотношением

$$\langle \mathbf{Q} \rangle = -\mathbf{D} \cdot \langle \nabla p \rangle + \Lambda \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{D} = \lambda_1 \mathbf{a}\mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b}\mathbf{b}, \quad \mathbf{R} = \mu_1 \mathbf{a}\mathbf{a} + \mu_2 \mathbf{b}\mathbf{b} \quad (2.9)$$

где \mathbf{D} и \mathbf{R} — симметричные тензоры второго ранга, точкой обозначено скалярное произведение тензора на вектор, а $\mathbf{a}\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}\mathbf{b}$ — диады. Собственными векторами \mathbf{D} и \mathbf{R} являются векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} , направленные по \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$, а λ_1, λ_2 и μ_1, μ_2 — соответствующими им собственными числами. Соотношения (2.6) и (2.7) позволяют найти эти собственные числа

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \langle h^{-3} \rangle^{-1}, \quad \lambda_2 = \langle h^3 \rangle \\ \mu_1 &= \langle h^{-2} \rangle \langle h^{-3} \rangle^{-1}, \quad \mu_2 = \langle h \rangle \end{aligned} \quad (2.10)$$

Итак, найдено предельное (при $N \rightarrow \infty$ и $\text{mes } \Sigma \rightarrow 0$) описание поведения эквивалентного смазочного слоя в локальных координатах $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau})$ при произвольной поточечной концентрации микроканалов κ .

Перейдем к исходной ортогональной системе координат (x_1, x_2) с коэффициентами Ламе L_1 и L_2 , учитывая, что направление вектора скорости \mathbf{v} совпадает с направлением оси x_2 и во всех практически важных случаях ее безразмерное значение пропорционально соответствующему этой оси коэффициенту Ламе $U = L_2$, т. е. $\mathbf{v} = U \mathbf{i}_2$. Пусть местный угол наклона век-

тора τ к направлению скольжения равен β (фиг. 2). Тогда формулы преобразования при переходе от локальных координат к исходным таковы

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}_1 \cos \beta - \mathbf{i}_2 \sin \beta, \quad \mathbf{b} = \mathbf{i}_1 \sin \beta + \mathbf{i}_2 \cos \beta$$

Подставляя последние выражения в соотношения (2.9), найдем с учетом (2.10)

$$\mathbf{D} = A \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 + E (\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1) + A' \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{R} = C \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + B (\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1) + B' \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2$$

$$A = \langle h^3 \rangle \sin^2 \beta + \langle h^{-3} \rangle^{-1} \cos^2 \beta, \quad A' = \langle h^{-3} \rangle^{-1} \sin^2 \beta + \langle h^3 \rangle \cos^2 \beta$$

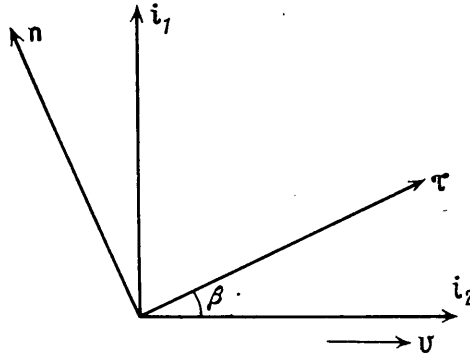
$$B = (\langle h \rangle - \langle h^{-2} \rangle \langle h^{-3} \rangle^{-1}) \frac{\sin 2\beta}{2}, \quad B' = \langle h \rangle \cos^2 \beta + \langle h^{-2} \rangle \langle h^{-3} \rangle^{-1} \sin^2 \beta$$

$$E = (\langle h^3 \rangle - \langle h^{-3} \rangle^{-1}) \frac{\sin 2\beta}{2}, \quad C = \langle h \rangle \sin^2 \beta + \langle h^{-2} \rangle \langle h^{-3} \rangle^{-1} \cos^2 \beta$$

Окончательно выражение для вектора расхода (2.8), записанное в произвольных ортогональных координатах (x_1, x_2) , приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{Q} \rangle = & -[A \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + E (\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1) + A' \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2] \left(\frac{\mathbf{i}_1}{L_1} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\mathbf{i}_2}{L_2} \frac{\partial p}{\partial x_2} \right)_0 + \\ & + \Lambda [C \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + B (\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1) + B' \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2] U \mathbf{i}_2 = - \left(\frac{A}{L_1} \frac{\partial p}{\partial x_1} - \frac{E}{L_2} \frac{\partial p}{\partial x_2} - \Lambda B U \right)_0 \mathbf{i}_1 - \\ & - \left(\frac{A'}{L_2} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{E}{L_1} \frac{\partial p}{\partial x_1} - \Lambda B' U \right)_0 \mathbf{i}_2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

где индекс 0 указывает на предельное «сглаженное» значение компонент вектора градиента. Записывая уравнение неразрывности системы (1.1)



Фиг. 2

применительно к среде, описываемой соотношением (2.11), определим предельное значение массы газа $\langle h \rho \rangle$ в объеме Σh . С точностью до членов $o(\text{mes } \Sigma)$ найдем, учитывая непрерывность ρ и используя формулу (2.2)

$$\langle h \rho \rangle = (\kappa \langle h_+ \rangle + (1 - \kappa) \langle h_- \rangle) \rho_0 = \langle h \rangle \rho_0$$

Уравнение неразрывности для осредненных характеристик смазочного слоя имеет вид

$$\text{div}(\rho_0 \langle \mathbf{Q} \rangle) + \sigma \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 \langle h \rangle) = 0$$

Подставляя сюда выражение для Q (2.11) и исключая p_0 с помощью соотношения $p = p^n$, получим следующее уравнение для предельного распределения давления p_0 :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_1} \left[p_0^n \left(A \frac{L_2}{L_1} \frac{\partial p_0}{\partial x_1} + E \frac{\partial p_0}{\partial x_2} - B \Lambda U L_2 \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[p_0^n \left(A' \frac{L_1}{L_2} \frac{\partial p_0}{\partial x_2} + E' \frac{\partial p_0}{\partial x_1} - B' \Lambda U \right) \right] = \sigma L_1 L_2 \frac{\partial}{\partial t} (p_0^n \langle h \rangle) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Частные разновидности уравнения (2.12) были получены в работах отечественных и зарубежных авторов [4–10] применительно к той или иной геометрии опоры. Первой в ряду этих исследований была работа Уинпла [4], с именем которого, как правило, и связывают уравнение типа (2.12). В большинстве упомянутых работ накладываются какие-либо ограничения на микрогеометрию канавок, что сужает область применимости полученных в этих работах уравнений.

Особняком в этом отношении стоят работы [9, 10], где приведены уравнения для произвольной микрогеометрии канавок. В [9] предельное уравнение получено «на физическом уровне строгости», при этом, вообще говоря, остается открытым вопрос об однозначном вычислении осредненной функции $\langle h^m \rangle$ по формуле (2.2). Дело в том, что для сглаживания используется «одномерное осреднение», итог которого в таком случае связан с направлением осреднения, а в качестве последнего выбирается либо направление скольжения, либо направление нормали к линии разрыва функции h . Получаемая при этом функция h будет лишь в частных случаях совпадать со значением, определяемым соотношением (2.1). Заметим в связи с этим, что формула (2.1) определяет h как предельную концентрацию микроканавок в данной точке смазочного слоя.

Результаты работы [10] следует рассматривать как один из возможных подходов использования методов осреднения дифференциальных уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами [11, 12] применительно к уравнению Рейнольдса.

3. Продемонстрируем результаты использования уравнения (2.12) на примере расчета осевой подъемной силы, развиваемой в сферической газовой опоре при чисто осевых перемещениях.

Опора состоит из двух симметрично расположенных полусферических подшипников, внутренние полусферы которых неподвижны и скреплены между собой; внешние — вращаются с постоянной угловой скоростью ω и представляют собой цельную конструкцию (ротор). Для обеспечения осевой подъемной силы на неподвижных внутренних полусферах нанесен периодический профиль в виде спиральных микроканавок.

В качестве характерных масштабов при вычислении числа сжимаемости Λ по формуле (1.2) выберем радиус внутренней полусферы $L_0 = R_0$, а для h_0 — разность радиусов внешней и внутренней полусфер $h_0 = R_1 - R_0$. За масштаб скоростей примем $U_0 = \omega R_0$.

Профилированные зоны имеют вид поясов, расположенных в шести областях изменения полярного угла θ : $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ для нижнего и $\pi - \theta_2 \leq \theta \leq \pi - \theta_1$ для верхнего. При $\theta = \theta_0$ и $\theta = \pi - \theta_0$ полусферы имеют полюсные отверстия, на линиях которых, так же как и на границах, примыкающих к экватору ($\theta = \theta_2$ и $\theta = \pi - \theta_2$), давление равно давлению окружающей среды. Спиральные канавки ориентированы таким образом, что нагнетание газа происходит от экватора к полюсу у каждого из подшипников.

Предположим, что спиральные микроканавки имеют постоянную абсолютную ширину, — технология изготовления таких канавок является относительно простой. Поперечное сечение канавок будем считать прямоугольным. Очевидно, что зазор h будет зависеть не только от полярного, но также и от меридионального угла φ , т. е. $h = h(\theta, \varphi)$.

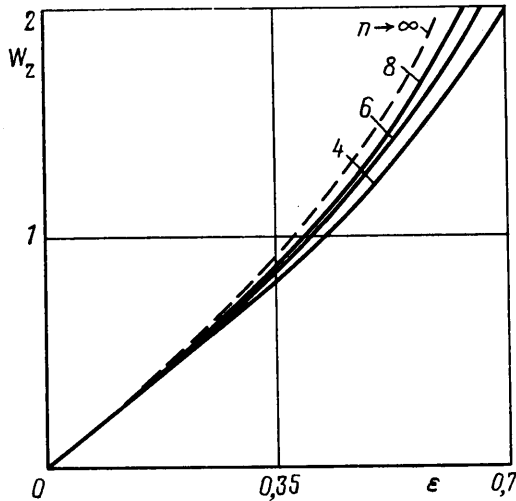
В случае чисто осевых перемещений ротора функция h может быть записана в виде $h(\theta, \varphi) = 1 - \varepsilon \cos \theta + \Delta f(\theta, \varphi)$, где $f(\theta, \varphi)$ — периодическая функция угла φ (период $2\pi N$, где N — число канавок в каждом профилированном поясе), Δ — постоянная относительная глубина канавок, ε — относительный эксцентриситет. За масштаб Δ и ε принята постоянная h_0 . Микроканавки направлены вдоль окружностей, которые удалены от центра внутренней сферы на расстояние $R_0 \rho$ ($0 \leq |\rho| \leq 1$), лежат в плоскостях, составляющих угол γ ($0 \leq \gamma \leq \pi/2$) с плоскостью экватора.

Нормированная по величине $p_a R_0^2$ осевая подъемная сила вычисляется по формуле

$$W_z = \int_{\Omega} p \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi$$

где Ω ограничена пределами $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_2$ и $\pi - \theta_2 \leq \theta \leq \pi - \theta_0$ при $\theta \leq \varphi \leq 2\pi$.

Сложный характер микрогеометрии профилированной поверхности вынуждает использовать вариационно-разностные схемы [13] для численного интегрирования уравнения Рейнольдса (1.1). На фиг. 3 приведены зависимости W_z от эксцентриситета ϵ для $N=4, 6, 8$ в случае опоры со следующими параметрами: $\theta_0=30^\circ$, $\theta_1=50^\circ$, $\theta_2=90^\circ$, $\Delta=1,5$, и для безразмерной относительной ширины канавок $\kappa(\theta_2)=0,474$ ($\kappa(\theta)=\kappa(\theta_2)/\sin \theta$), $\rho=0,3827$ и $\gamma=25^\circ$. Сопоставление их с кривой $N \rightarrow \infty$, полученной с помощью уравнения (2.12), показывает на удовлетворительное совпадение как качественного, так и количественного характера даже при незначительных N (результаты представлены для $\Lambda=25$).



Фиг. 3

Принимая во внимание существенно большую простоту в решении задачи с помощью асимптотического уравнения (2.12), которое является обыкновенным дифференциальным уравнением, можно сделать вывод об эффективности его применения для расчета опор со сложной микрогеометрией. Отметим также, что с ростом числа микроканавок N трудность численного решения уравнения Рейнольдса (1.1) значительно возрастает. В то же время полученные с его помощью поле давления и интегральные характеристики становятся все менее отличны (с ростом N) от вычисленных с использованием уравнения (2.12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. С. 847.
2. Лурье К. А., Федоров А. В., Черкаев А. В. О существовании решений некоторых задач оптимального проектирования стержней и пластин: Препринт № 668. Л.: ФТИ, 1980. С. 43.
3. Лурье К. А., Черкаев А. В. Точные оценки проводимости композитов, образованных двумя изотропными проводящими средами, взятыми в заданной пропорции: Препринт № 783. Л.: ФТИ, 1982. С. 33.
4. Whipple R. T. P. The inclined groove bearing. AERE Rept t/R 622 (Revised). United Kingdom Atomic Energy Authority. Res. Group. Atomic Energy Res. Establishment. Harwell. Berkshire, 1958.
5. Маланоски С. Б., Пэн К. Г. Статические и динамические характеристики упорного подшипника со спиральными канавками // Теоретические основы инженерных расчетов: Тр. амер. о-ва инж.-мех. Сер. F. 1965. Т. 87. № 3. С. 13-26.

6. Бурговиц А. Г., Емельянов А. В. Определение несущей способности упорного газового подшипника со спиральными канавками произвольного поперечного профиля // *Машиноведение*. 1967. № 4. С. 108–116.
7. Воор Д. Ш., Чау К. Я. Характеристики газовых радиальных подшипников со спиральными канавками // *Теоретические основы инженерных расчетов: Тр. амер. о-ва инж.-мех.* 1965. Т. 87. № 3. С. 37–49.
8. Левина Г. А. Приближенное решение задачи о распределении давления в слое газовой смазки сферического подшипника // *Сб. науч. тр. Челяб. политехн. ин-та*. 1971. № 101. С. 82–94.
9. Сипенков И. Е. и др. Разработка и исследование газовых опор без стационарного наддува для электрофизических агрегатов // *Отчет по теме № 6199/504904*. Л.: ЛПИ, 1981. С. 154.
10. Элрод. Теория тонкого смазочного слоя для ньютоновской жидкости на поверхностях с бороздчатыми шероховатостями или канавками // *Тр. амер. о-ва инж.-мех. Сер. F Проблемы трения и смазки*. 1973. Т. 95. № 4. С. 91–97.
11. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., Ха Тьен Нгоан. Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов. // *Успехи мат. наук*. 1979. Т. 34. № 5. С. 65–133.
12. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. С. 352.
13. Болдырев Ю. Я., Григорьев Б. С. Численное решение уравнения Рейнольдса газовой смазки с помощью метода конечных элементов // *Машиноведение*. 1982. № 5. С. 78–84.

Ленинград

Поступила в редакцию
23.IV.1990