

УДК 532.552.75.013.4

© 1991 г.

П. И. САНЬКОВ, Е. М. СМЕРНОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ И НЕПОДВИЖНЫМИ ДИСКАМИ

В локально-однородной постановке с использованием метода нормальных мод решается линейная задача устойчивости течения вязкой жидкости между вращающимися и неподвижным параллельными дисками. Основное течение полагается автомодельным по радиальной координате. Система уравнений шестого порядка, выведенная для амплитудных функций возмущений, интегрируется методом конечных разностей. Рассчитаны характеристики устойчивости по отношению к возмущениям четырех типов.

Эксперименты [1] указывают на многообразие вторичных режимов течения между вращающимися и неподвижными дисками. В [2] для постановки линейной задачи устойчивости такого течения предложено использовать локально-однородное приближение, успешно применявшееся ранее при анализе устойчивости пограничного слоя на открытом вращающемся диске [3–5]. В [6] при решении задачи устойчивости полагается, что основное течение между дисками автомодельно по радиусу.

В настоящей работе излагаются результаты вычислений, дополняющих и уточняющих [6]. Впервые проводится детальное сопоставление рассчитанных пределов устойчивости и критических параметров возмущений с опытными данными.

1. Основное течение. Пусть вязкая несжимаемая жидкость находится в зазоре между безграничными параллельными дисками, один из которых (нижний) вращается с постоянной угловой скоростью ω , а другой неподвижен. Расстояние между дисками обозначим через s . Начало цилиндрической системы координат r, θ, z поместим в центр плоскости вращающегося диска. Основное стационарное течение обладает свойствами осевой симметрии и автомодельности по радиальной координате [7]

$$V_r = \omega r g(\eta), \quad V_\theta = \omega r \varphi(\eta), \quad V_z = -2\omega s f(\eta) \quad (1.1)$$

$$\frac{P}{\rho} = \omega^2 s^2 \Pi(\eta) + \frac{1}{2} \Lambda \omega^2 r^2, \quad \eta = \frac{z}{s}$$

где: $\Lambda = \text{const}$, P — давление. Подстановка (1.1) в уравнение Навье — Стокса приводит к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$g = f', \quad g''/\gamma + 2fg' - g^2 = \Lambda - \varphi^2 \quad (1.2)$$

$$\frac{\varphi''}{\gamma} + 2f\varphi' - 2g\varphi = 0, \quad \Pi' = -2\frac{g'}{\gamma} - 2gf$$

Здесь $\gamma = \omega s^2/\nu$ — параметр вращения, штрихом обозначено дифференцирование по η . Граничные условия к (1.2) имеют вид

$$f = g = 0, \quad (\varphi = 1, \eta = 0), \quad (\varphi = 0, \eta = 1) \quad (1.3)$$

Численные решения задачи (1.2), (1.3) находились по методу установления; аппроксимация производных по η конечными разностями имела второй порядок точности.

При $\gamma > 220$ решение задачи (1.2), (1.3) не единственно [8]: для $\gamma = 625$ получено 20 решений [9]. Однако практический интерес представляют лишь решения Бэтчелора [7] и Стюартсона [10]. Первое из них, являясь непрерывным продолжением из области $\gamma < 220$, описывает течение с вращающимся ядром и двумя пристенными пограничными слоями; при очень больших γ ядро вращается как твердое тело с угловой скоростью, равной $0,313\omega$. В решении Стюартсона скорости имеют существенное значение только в тонком слое у вращающегося диска.

Задачи устойчивости основного течения, описываемого решением Стюартсона, фактически сводятся к задачам для слоя на открытом вращающемся диске. Вследствие изложенного в настоящей работе решение задачи устойчивости при $\gamma > 220$ проводилось для основного течения, описываемого решением Бэтчелора.

2. Линейная задача устойчивости. Имея в виду результаты экспериментов [1] и следуя [3], введем криволинейную ортогональную неподвижную систему координат x, y, z , начало которой находится в плоскости вращающегося диска на окружности радиуса r_0 ; координатные линии x_1 и z_1 располагаются вдоль логарифмических спиралей, угол ϵ между направлением радиуса и координатной линией x_1 положителен при отсчете против часовой стрелки. Связь x_1, y_1, z_1 с цилиндрическими координатами r, θ, z , коэффициенты Ляме и их производные по координатам задаются соотношениями

$$\begin{aligned} x_1 &= r_0 [\ln(r/r_0) \cos \epsilon + (\theta - \theta_0) \sin \epsilon], & y_1 &= z, \\ z_1 &= r_0 [\ln(r/r_0) \sin \epsilon - (\theta - \theta_0) \cos \epsilon] \\ H_x &= H_z = r/r_0 \equiv H_0, & H_y &= 1 \\ \frac{\partial H_0}{\partial x_1} &\rightarrow \frac{\cos \epsilon}{r_0}, & \frac{\partial H_0}{\partial z_1} &\rightarrow \frac{\sin \epsilon}{r_0}, & \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_1^2} &\rightarrow \frac{\cos^2 \epsilon}{r_0^2} \\ \frac{\partial^2 H_0}{\partial z_1^2} &\rightarrow \frac{\sin^2 \epsilon}{r_0^2}, & \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_1 \partial z_1} &\rightarrow \frac{\cos \epsilon \sin \epsilon}{r_0^2} & (r \rightarrow r_0) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Бесконечно малые возмущения скорости u и давления p в окрестности $r=r_0$ будем считать независимыми от координаты z_1 и периодическими по x_1 и времени t

$$\begin{aligned} u &= \{u_*(y_1), v_*(y_1), w_*(y_1)\} \exp[i(\alpha x_1 - \beta t)] \\ p &= p_*(y_1) \exp[i(\alpha x_1 - \beta t)] \end{aligned} \quad (2.2)$$

Вывод амплитудных уравнений осуществим в следующей последовательности. Введем безразмерные переменные и выпишем формулы для основного течения

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1}{r_0}, & y &= \frac{y_1}{s}, & z &= \frac{z_1}{r_0}, & U &= \frac{U_1}{\omega r_0}, & V &= \frac{V_1}{\omega s}, & W &= \frac{W_1}{\omega r_0} \\ U &= r U_e / r_0, & U_e &= g(y) \cos \epsilon + \varphi(y) \sin \epsilon, & V &= -2f(y) \\ W &= r W_e / r_0, & W_e &= g(y) \sin \epsilon - \varphi(y) \cos \epsilon \\ \frac{\partial U}{\partial x} &= U_e \cos \epsilon, & \frac{\partial U}{\partial z} &= U_e \sin \epsilon, & \frac{\partial W}{\partial x} &= W_e \cos \epsilon, & \frac{\partial W}{\partial z} &= W_e \sin \epsilon & (r=r_0) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Соотношения (2.2), (2.3) подставим в линеаризованные уравнения Навье — Стокса, записанные для u_*, v_*, w_*, p_* в системе x_1, y_1, z_1 , и с учетом (2.1) проведем оценку отдельных слагаемых в предположении малости величин $1/\text{Re} = \nu/\omega r_0 s$, $\kappa_0 = s/r_0 = \gamma/\text{Re}$.

Слагаемые, которые имеют множители порядка κ_0^2 , κ_0/Re , κ_0^2/Re , опустим. Исключим из уравнений амплитудную функцию давления и в членах порядка κ_0 значение r заменим на r_0 . В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} (U_* - c)\Delta v_* - U_*'' v_* + \frac{i}{k \text{Re}} \Delta \Delta v_* = \frac{\gamma}{\text{Re}} \left\{ [U_*' \sin \varepsilon - 2W_*' \cos \varepsilon] w_* + \right. \\ \left. + [(U_* + c) \sin \varepsilon - 2W_* \cos \varepsilon] w_*' + \frac{i}{k} [(c \cos \varepsilon + W_* \sin \varepsilon) v_*'' + \right. \\ \left. + W_*' v_*' \sin \varepsilon + (V \Delta v_*)'] \right\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} (U_* - c) w_* + \frac{i}{k \text{Re}} \Delta w_* - \frac{i}{k} W_*' v_* = \frac{\gamma}{\text{Re}} \left\{ \frac{i}{k} [(U_* \cos \varepsilon + W_* \sin \varepsilon) w_* + \right. \\ \left. + V w_*'] - \frac{2}{k^2} (W_* \cos \varepsilon - U_* \sin \varepsilon) v_*' \right\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$iku_* + v_*' + \frac{\gamma}{\text{Re}} (u_* \cos \varepsilon + w_* \sin \varepsilon) = 0 \quad (2.6)$$

$$k = \frac{\alpha s}{H_0}, \quad c = c_r + ic_i = \frac{\beta H_0}{\alpha \omega r_0}, \quad \Delta = \frac{d^2}{dy^2} - k^2$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по y . Граничные условия к (2.4) – (2.6) имеют вид

$$v_* = v_*' = w_* = 0 \quad (y=0, y=1) \quad (2.7)$$

Уравнения (2.4), (2.5) несколько отличны от приведенных в [2, 6]. Это отличие устраняется, если в правых частях уравнений использовать приближенные соотношения

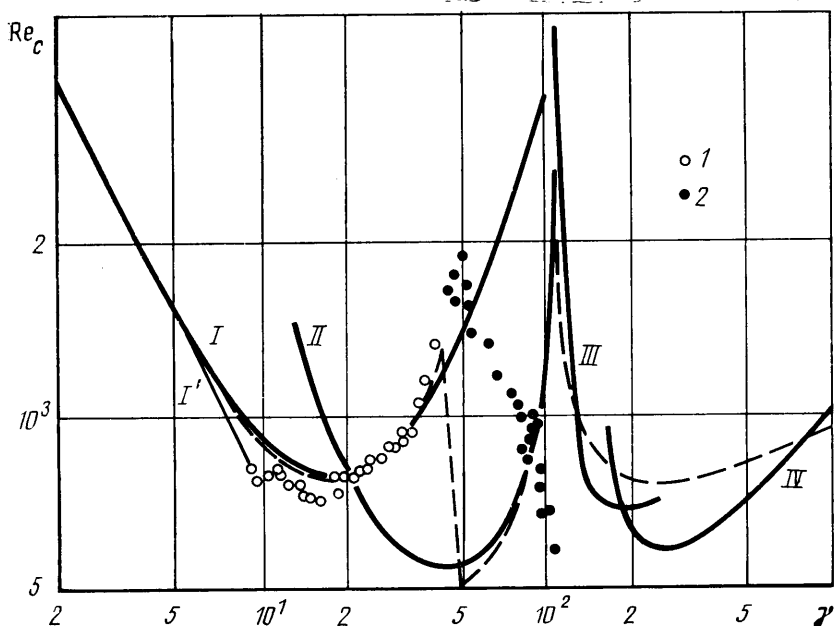
$$(U_* - c)\Delta v_* - U_*'' v_* \simeq 0, \quad (U_* - c)\Delta w_* - \frac{i}{k} W_*' v_* \simeq 0$$

следующие из (2.4), (2.5) при $\text{Re} \rightarrow \infty$.

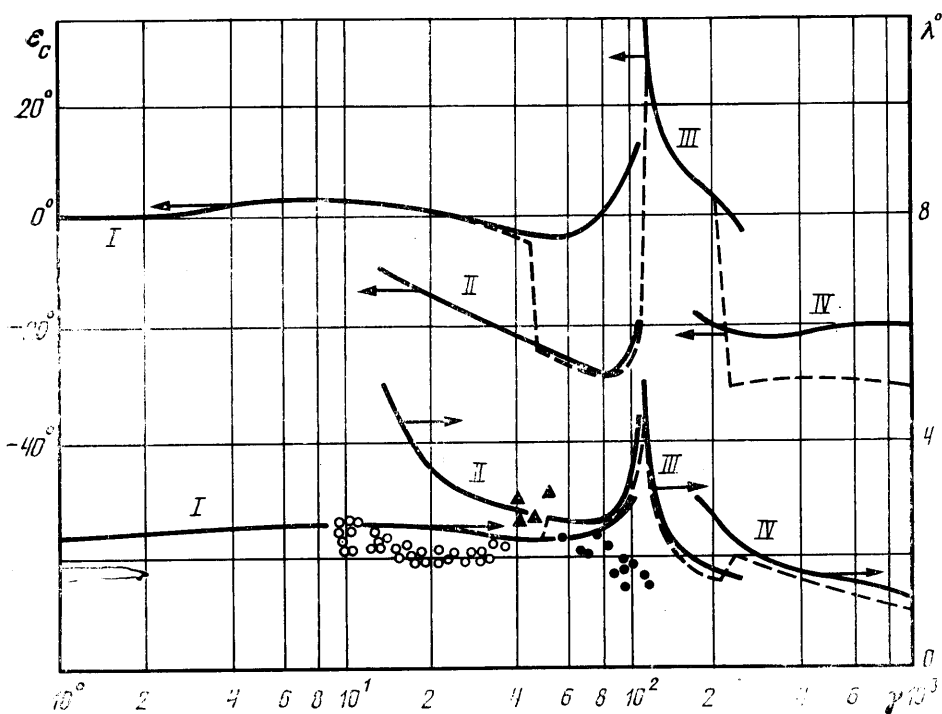
Собственные значения и собственные функции рассчитывались методом конечных разностей при использовании алгоритма матричной прогонки. Применялась сетка с шагом по y , равным 0,01. Основное течение определялось численным решением задачи (1.2), (1.3).

3. Результаты вычислений. Рассчитанные пределы устойчивости основного течения по отношению к возмущениям четырех типов изображены на фиг. 1 сплошными линиями; Re_c – минимальное критическое число Рейнольдса при заданном значении γ . Соответствующие Re_c критические значения угла ε_c и безразмерной длины волны $\lambda^\circ = (\lambda/s)_c$ приведены на фиг. 2.

При $\gamma < 21$ наиболее опасны возмущения, волновой вектор которых составляет с местным радиусом-вектором небольшой угол – положительный или отрицательный, в зависимости от величины γ . Данные возмущения назовем возмущениями типа I (предел устойчивости на фиг. 1 и характеристики на фиг. 2 помечены той же цифрой). Фазовая скорость для них положительна и при $\gamma < 50$ не превышает по величине 3% локальной линейной скорости поверхности вращающегося диска. В интервале $21 < \gamma < 112,5$ основное течение оказывается неустойчивым прежде всего относительно возмущений типа II, для которых угол ε_c отрицателен, и, например, при $\gamma = 90$ составляет величину $-28,5^\circ$. Эти возмущения имеют вид спиральных волн, бегущих в сторону меньших значений радиуса со-

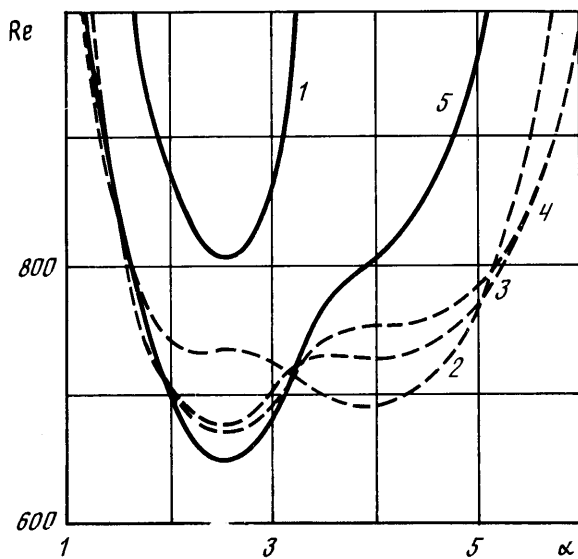


Фиг. 1

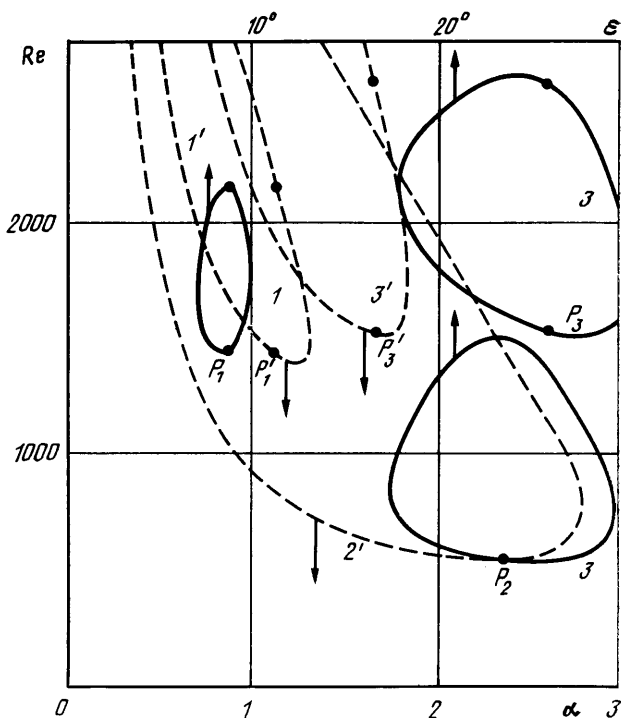


Фиг. 2

скоростью $c, \approx -0,06\omega_0$. При $\gamma \geq 112,5$ критическим становится третий вид возмущений. Их фазовая скорость при $\gamma = 112,5$ положительна, а по мере увеличения γ она уменьшается и при $\gamma = 140$ меняет знак. Угол ϵ_c для возмущений типа III также существенно меняется с ростом γ . Наконец, при $\gamma > 190$ предел устойчивости основного потока определяется возму-



Фиг. 3



Фиг. 4

щениями типа IV. Эти возмущения имеют весьма высокое значение $c_r \simeq -0,24\omega r_0$ и большой отрицательный угол $\varepsilon_c \simeq -21^\circ$.

Характерные особенности нейтральных поверхностей в пространстве $(Re, \alpha, \varepsilon)$ иллюстрируются на фиг. 3 для возмущений типа I, III и IV и на фиг. 4 для возмущений типа II. Кривая 1 на фиг. 3 получена для возмущений I при $\gamma=16$ и представляет собой сечение нейтральной поверхности плоскостью $\varepsilon=\text{const}=-1,4^\circ$. При пересечении поверхности плоскостями $\alpha=\text{const}$ получены аналогичные кривые (здесь не приводятся).

Результаты вычислений показывают, что нейтральная поверхность $Re(\alpha, \epsilon)$ для возмущений типа I имеет один минимум. Нейтральные кривые на плоскостях (Re, α) и (Re, ϵ) незамкнуты: критическое число Рейнольдса неограниченно возрастает при удалении от точки минимума.

Нейтральная поверхность для возмущений типа III и IV является обшей. Это означает, что в определенном интервале значений γ она имеет два локальных минимума, соответствующих указанным возмущениям. При изменении γ нейтральная поверхность трансформируется так, что при $\gamma \leq 170$ остается единственный минимум, отвечающий возмущениям III, а при $\gamma \geq 240$ — минимум, отвечающий возмущениям IV. Иллюстрацией этому служит фиг. 3: кривые 2–4 получены для $\gamma = 200, 240, 260$ сечением нейтральной поверхности плоскостью $\epsilon = 3,4^\circ$, а кривая 5 — для $\gamma = 200$ сечением плоскостью $\epsilon = -19,7^\circ$. Как и в случае возмущений I, нейтральные кривые для возмущений III, IV незамкнуты.

Интересная особенность нейтральной поверхности $Re(\alpha, \epsilon)$ выявлена для возмущений II. Эта поверхность имеет форму пальца, конец которого загнут в сторону больших значений α вблизи точки минимума. Таким образом, нейтральные кривые на плоскости (Re, ϵ) оказываются замкнутыми. Для иллюстрации на фиг. 4 представлены сечения нейтральной поверхности плоскостями $\alpha = \text{const}$ (сплошные линии) и $\epsilon = \text{const}$ (штриховые линии): кривые 1, 1' получены соответственно при $\alpha = 1,13$, $\epsilon = -12,3^\circ$ для $\gamma = 13,31$; 2, 2' — при $\alpha = 2,34$, $\epsilon = -22,0^\circ$ для $\gamma = 45,0$; 3, 3' — при $\alpha = 1,69$, $\epsilon = -25,4^\circ$ для $\gamma = 102,05$; точкам P_1, P_2 соответствуют точки P_1', P_2' . Отметим, что с уменьшением γ область существования растущих возмущений типа II сужается и полностью вырождается при $\gamma \approx 10$.

Приведем также данные, позволяющие для всех типов возмущений оценить величину инкремента в зависимости от числа Рейнольдса. Ниже приведены результаты расчетов для следующих вариантов:

Тип	I	II	III	IV
γ	16	45	130	230
ϵ°	-1,4	-21,8	16,3	-21,9
α	2,7	2,34	2,66	2,89

В таблице представлены значения c_i для указанных выше типов.

Re	c_i			
	I	II	III	IV
500	-0,0159	-0,00151	-0,0249	-0,0051
600	-0,0085	0,00088	-0,0162	0,0002
700	-0,0036	0,00201	-0,0096	0,0037
800	-0,0002	0,00252	-0,0047	0,0061
900	0,0023	0,00260	-0,0009	0,0081
1000	0,0044	0,00242	0,0021	0,0096
1200	0,0076	0,00175	0,0056	0,0120
1400	—	0,00071	—	—
1600	—	-0,00059	—	—

Анализируя зависимость $c_i(Re)$, а нагляднее — зависимость $c_i(Re/Re_c)$, можно заключить, что в окрестности $Re = Re_c$ темп нарастания c_i с увеличением числа Рейнольдса практически одинаков для возмущений типа I, III, IV, но существенно меньше для типа II. Более того, в соответствии с отмеченной спецификой формы нейтральной поверхности величина c_i для возмущений II ограничена сверху весьма небольшим значением.

4. Обсуждение. Сопоставим полученные результаты с известными расчетными и опытными данными. Попутно приведем результаты наших экспериментов, дополняющие [4].

На фиг. 1 штриховой линией без номера нанесена граница устойчивости основного течения, полученная в [6]. Как видно, она состоит из фрагментов пределов устойчивости по отношению к возмущениям разного типа. Приемлемое совпадение значений Re_c , полученных в настоящей работе и в [6], нарушается при $\gamma \geq 150$. Вместе с тем значения ϵ_c , $(c_r)_c$ и λ° близки вплоть до $\gamma \approx 230$ (данные [6] воспроизводятся на фиг. 2 штриховыми линиями). На интервале $230 \leq \gamma \leq 1000$ имеются существенные количественные расхождения: нами получено приблизительно на 40% меньшее по абсолютной величине значение угла ϵ_c и на 25% большая длина волны. В целом же согласие с результатами [6] можно признать удовлетворительным. Сопоставление с данными [2] не представляется возможным, так как в этой работе не исследовалась устойчивость соответствующего (автомодельного) основного течения.

В [1] экспериментально определены границы на плоскости (Re, γ) , переход через которые сопровождается развитием вихревых систем A или B (по классификации [1]). Граница для вихрей A отмечена на фиг. 1 точками 1, граница для вихрей B — точками 2. Теми же значками на фиг. 2 показаны измеренные в опытах значения длины волны. Есть все основания отождествить возмущения типа I с волнами в виде вихрей A . Результаты вычислений и измерений хорошо согласуются между собой, особенно в интервале $16 \leq \gamma \leq 40$. Правда, в опытах было зафиксировано развитие стоячих волн с волновым вектором, направленным по радиусу ($\epsilon = 0$), однако такое небольшое расхождение можно отнести на счет нелинейных эффектов. Отметим, что значения Re_c , вычисленные для рассматриваемых возмущений при $\epsilon = 0$ и ϵ_c , различаются не более чем на 2% во всем интервале изменения γ .

Расхождение расчетных и опытных значений Re_c до 13% при $\gamma \leq 16$ обусловлено, по-видимому, погрешностями эксперимента: в этом случае приходилось иметь дело с весьма узкими зазорами, для которых становится заметным влияние неточности измерения s и отклонения поверхности каждого из дисков от плоскости. Расчетами подтвержден вывод [1] о том, что при $\gamma \rightarrow 0$ критическое число $Re_c \rightarrow a/\gamma$, где постоянная $a \approx 7820$ (прямая I' на фиг. 1).

Наблюдавшиеся в опытах [1] спиральные вихри B не удается непосредственно отождествить с каким-либо решением спектральной задачи (2.4)–(2.7). Однако такие отличительные особенности, как сильная зависимость $Re_c(\gamma)$ в узком диапазоне изменения γ (фиг. 1) и положительный, близкий к 14° угол ϵ_c , позволяют предположить, что возмущения типа III и вихри B относятся к одному классу растущих возмущений. Сдвиг границы устойчивости для вихрей B вниз и в сторону меньших γ от предела III можно связать с влиянием на критическое число Рейнольдса тех отклонений от автомодельности, которые имеют место в реальном течении. Не исключено также, что вихри B возбуждаются возмущениями малой, но конечной амплитуды. Для выяснения данных вопросов требуется проведение специальных исследований.

Развитие возмущений типа II в опытах [1] не зарегистрировано. После завершения вычислений нами были проведены дополнительные визуальные наблюдения на той же жидкостной установке. Развитие возмущений типа II удалось зафиксировать лишь при значениях γ , близких к 45. Этот результат соответствует расчетным данным, согласно которым наименьшее критическое значение числа Рейнольдса достигается как раз при $\gamma \approx 45$.

При визуализации алюминиевыми чешуйками уровень контрастности образований, отождествляемых с возмущениями типа II, был существенно ниже, чем для вихрей A и B . Этот факт объясняет, почему возмущения II не были зарегистрированы ранее в опытах [1]. На фиг. 5 пред-



Фиг. 5

ставлен фотоснимок картины течения при $\gamma=38,4$. На периферии дисков располагаются вихри *A*. Ближе к центру — система спиральных волн, имеющих угол $\epsilon \simeq -22^\circ$. Эта система является результатом развития возмущений типа II. Дополнительным тому подтверждением служит соответствие измеренной в опытах длины волны (треугольники на фиг. 2) ее расчетным значениям. Радиус раздела волновых систем I и II соответствует $Re \simeq 1200$, т. е. критическому значению для возмущений I. Отсюда следует вывод о том, что развитие последних подавляет возмущения второго типа.

При $\gamma \gtrsim 500$ предел устойчивости по отношению к возмущениям IV описывается зависимостью $Re_c \simeq 32\sqrt{\gamma}$, чему соответствует значение $Re_c^* \equiv (\omega r^2/\nu) = 1024$. Полученная зависимость означает, что развивающиеся возмущения сосредоточиваются в выделяющихся при $\gamma \gg 1$ пограничных слоях с характерной толщиной порядка величины $\sqrt{\nu/\omega}$. Вид собственных функций, рассчитанных для возмущений IV, показывает, что эти возмущения развиваются в слое у неподвижного диска. В экспериментах [11], посвященных исследованию устойчивости течения в слое Бёдевадта [12], волны регистрировались при значениях локального параметра $\Omega r^2/\nu > 300 \dots 400$. Пересчет к скорости ω по формуле $\Omega = 0,313\omega$, определяющей угловую скорость ядра течения, дает значения $Re^* = (1 \dots 1,3) \cdot 10^3$, хорошо согласующееся с приведенным выше расчетным значением Re_c для возмущений IV. Развитие возмущений в пограничном слое у вращающегося диска наблюдается при существенно больших значениях числа Рейнольдса [4, 6]. Использованный в настоящей работе метод решения спектральной задачи оказался непригодным для соответствующих расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Саньков П. И., Смирнов Е. М. Бифуркации и переход к турбулентности в зазоре между вращающимися и неподвижным параллельными дисками // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 5. С. 28–36.
2. Szeri A. Z., Giron A., Scheider S. J., Kaufman H. N. Flow between rotating disks. Pt 2. Stability // J. Fluid Mech. 1983. V. 134. P. 133–154.
3. Gregory N., Stuart J. T., Walker W. S. On the stability of three-dimensional boundary layers with application to the flow due to a rotating disk // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1955. V. 248. № 943. P. 155–185.
4. Kobayashi R., Kohama Y., Takamada Ch. Spiral vortices in boundary layer transition regime on a rotating disk // Acta Mech. 1980. V. 35. P. 71–82.
5. Malik M. R., Wilkinson S. P., Orszag S. A. Instability and transition in rotating disk flow // AIAA Journal. 1981. V. 19. № 9. P. 1131–1138.
6. Itoh M., Murata A. On the stability of the flow between a rotating disk and a stationary disk // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. 1985. V. B51. № 472. P. 3902–3910.
7. Batchelor G. K. Note on a class of solutions of the Navier-Stokes equations representing steady rotationally-symmetric flow // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1951. V. 4. № 1. P. 29–41.
8. Mellor G. L., Chapple P. J., Stokes V. K. On the flow between a rotating and a stationary disk // J. Fluid Mech. 1968. V. 31. № 1. P. 95–112.
9. Holodniok M., Kibiček M., Hlavaček V. Computation of the flow between two rotating coaxial disks: multiplicity of steady-state solutions // J. Fluid Mech. 1981. V. 108. P. 227–240.
10. Stewartson K. On the flow between two rotating coaxial disks // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1953. V. 49. № 2. P. 333–341.
11. Savas Ö. Circular waves on a stationary disk in rotating flow // Phys. Fluids. 1983. V. 26. № 12. P. 3445–3448.
12. Bödewadt U. T. Die Drehströmung über festem Grunde // ZAMM. 1940. B. 20. № 5. S. 241–253.

Поступила в редакцию
19.IV.1990

Ленинград