

УДК 532.546

© 1991 г.

Э. Н. БЕРЕСЛАВСКИЙ

О НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ ФИЛЬТРАЦИИ В ПЛОТИНАХ С ВЕРТИКАЛЬНЫМ ВЕРХОВЫМ ОТКОСОМ, ДРЕНИРОВАННЫХ В ОСНОВАНИИ

В работах [1–3] рассматривается плоская установившаяся фильтрация в однородном грунте через дренированную плотину с вертикальным верховым откосом, расположенную на горизонтальном водонепроницаемом основании. В данной статье на основе единообразного метода решения исследуются два случая фильтрации в подобных плотинах: при наличии на их верховом откосе частично непроницаемой вертикальной стенки (плотина 1) или при ее отсутствии (плотина 2).

В отличие от [1–3], где расходным фактором является только поступление вод в дренаж, здесь учитывается также и их испарение со свободной поверхности потока. Дается анализ влияния физических параметров модели на основные фильтрационные характеристики и приводится сравнение результатов численных расчетов для плотин 1 и 2. Отмечается возможность применения полученных результатов для решения некоторых задач фильтрации в двухслойной среде [4–7].

1. **Плотина 1.** Область фильтрации $ABCD$ плоскости z схематично представлена на фиг. 1, *а*. Здесь L — длина непроницаемой стенки AB , сопрягающейся с водопором, и H — высота воды в верхнем бьефе. Принимаем $\psi=0$ вдоль AB и $\varphi=-H$ вдоль водоприемной части плотины BC , где $\omega = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал, отнесенный к коэффициенту фильтрации грунта κ (φ — потенциал скорости фильтрации, ψ — функция тока). Тогда на свободной поверхности CD должны выполняться условия $\varphi=-y$, $\psi=-\epsilon x - Q$, где ϵ и Q — соответственно интенсивность испарения и расход воды, отнесенные к κ . Требуется определить форму свободной поверхности CD , расход воды Q , а также ширину l дренажа AD . Исследование осуществляется в терминах приведенных величин z и ω , связанных с одноименными фактическими величинами z_f и ω_f посредством равенств $z = z_f/H$, $\omega = \omega_f/(\kappa H)$.

Для решения используется метод П. Я. Полубариновой-Кочкиной [3], основанный на применении аналитической теории дифференциальных уравнений. Согласно [3], вводятся верхняя полуплоскость ξ (фиг. 2, *а*), комплексная скорость $w = d\omega/dz$ (фиг. 2, *б*) и функции

$$Z = dz/d\xi, \quad F = d\omega/d\xi \quad (1.1)$$

которые подлежат определению.

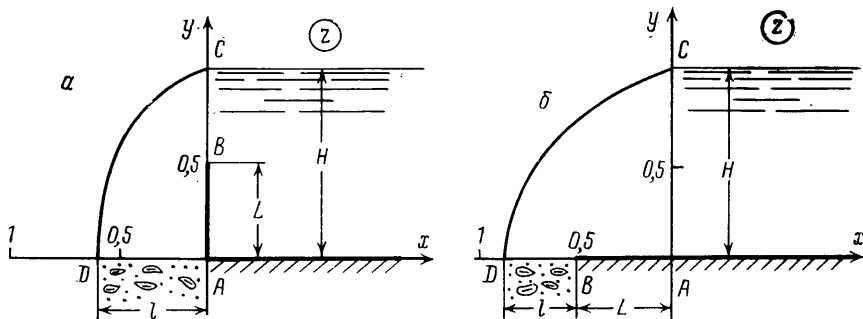
Перейдем к новой вспомогательной переменной t по формуле

$$\xi = \sin^2 t \quad (1.2)$$

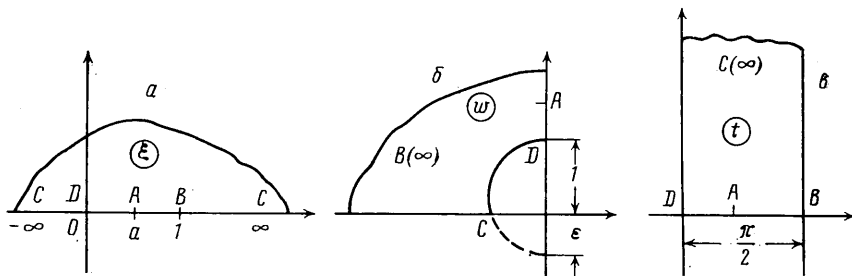
область изменения которой представлена на фиг. 2, *в*. Учитывая поведение функций (1.1) в окрестностях особых точек [3], а также (1.2), получим параметрическое решение задачи в виде

$$\frac{dz}{dt} = C \frac{\sin \nu(\pi - 2t)}{\sin \nu \sqrt{a} - \sin^2 t} \quad \frac{d\omega}{dt} = Ci \frac{\cos \nu(\pi - 2t)}{\cos \nu \sqrt{a} - \sin^2 t} \quad (1.3)$$

$$C > 0, \quad \nu = \pi^{-1} \operatorname{arctg} \sqrt{\epsilon}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Решение (1.3) содержит два неизвестных параметра отображения: C и a , определяющих длину непроницаемой стенки L и глубину воды в верхнем бьефе H . Интегрирование уравнений (1.3) по всему контуру области t , внутри которой функции $z(t)$ и $\omega(t)$ аналитичны (что является контролем вычислений), приводит к параметрическим уравнениям соответствующих участков модели. После нахождения параметров отображения получаем

$$\begin{aligned}
 l &= \frac{C}{\sin v\lambda} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2v \arcsin \sqrt{1-k'^2 \sin^2 t})}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 t}} dt \\
 Q &= \varepsilon l + \frac{C}{\cos v\lambda} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2v \arcsin \sqrt{1-k'^2 \sin^2 t})}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 t}} dt \\
 a &= k'^2, \quad 0 < k' < 1
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Приведем здесь параметрические уравнения свободной поверхности CD

$$\begin{aligned}
 x &= -l + \frac{C \operatorname{ctg} v\lambda}{1-2v} \int_0^1 \frac{1-t^{2v\lambda}}{\sqrt{1-(2-4k'^2)t^\lambda+t^{2\lambda}}} dt \\
 y &= \frac{C}{1-2v} \int_0^1 \frac{1+t^{2v\lambda}}{\sqrt{1-(2-4k'^2)t^\lambda+t^{2\lambda}}} dt, \quad 0 \leq t \leq 1 \\
 \lambda &= \frac{2}{1-2v}
 \end{aligned}$$

На фиг. 1, a изображена кривая депрессии, рассчитанная при $H=1$, $L=0,5$ и $\varepsilon=0,001$.

H	l	Q	L	l	Q	ε	l	Q
1	0,576	0,690	0,1	0,736	1,772	0,0001	0,576	0,689
	0,386	0,799		0,645	1,754		0,386	0,798
3	2,175	4,328	0,5	0,576	0,690	0,01	0,573	0,692
	1,779	4,365		0,386	0,799		0,383	0,802
5	3,680	8,859	0,7	0,391	0,405	0,1	0,551	0,713
	3,242	8,882		0,311	0,629		0,357	0,838

2. Плотина 2. Область движения в этом случае схематично представлена на фиг. 1, б, где теперь через L обозначено расстояние по водоупору от верхнего откоса плотины до дренажа. Область комплексной скорости w имеет тот же вид, что и в разд. 1. Таким же остается и решение (1.3), но при $a=k'^{-2}$. Соответствующие фильтрационные характеристики и параметрические уравнения свободной поверхности имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 l &= \frac{C}{\sin v\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin v(\pi-2t)}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 t}} dt \\
 Q &= \varepsilon(L+l) + \frac{C}{\cos v\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos v(\pi-2t)}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 t}} dt \quad (2.1) \\
 x &= -(L+l) + \frac{C \operatorname{ctg} v\pi}{1-2v} \int_t^1 \frac{1-t^{2v\lambda}}{\sqrt{k'^2 + (4-k'^2)t^\lambda + t^{2\lambda}}} dt \\
 y &= \frac{C}{1-2v} \int_t^1 \frac{1+t^{2v\lambda}}{\sqrt{k'^2 + (4-k'^2)t^\lambda + t^{2\lambda}}} dt, \quad 0 \leq t \leq 1
 \end{aligned}$$

На фиг. 1, б изображена кривая депрессии, рассчитанная при тех же значениях параметров H , L и ε , что и для фиг. 1, а.

3. Анализ численных результатов. В таблицу сведены результаты расчетов фильтрационных характеристик l и Q , выполненных по формулам (1.4) (верхняя строка) и (2.1) (нижняя строка) соответственно для плотин 1 и 2 при некоторых значениях H , L и ε . В каждом из разделов таблицы изменению подвергается один из указанных параметров, а остальные фиксируются при тех же значениях, что и на фиг. 1.

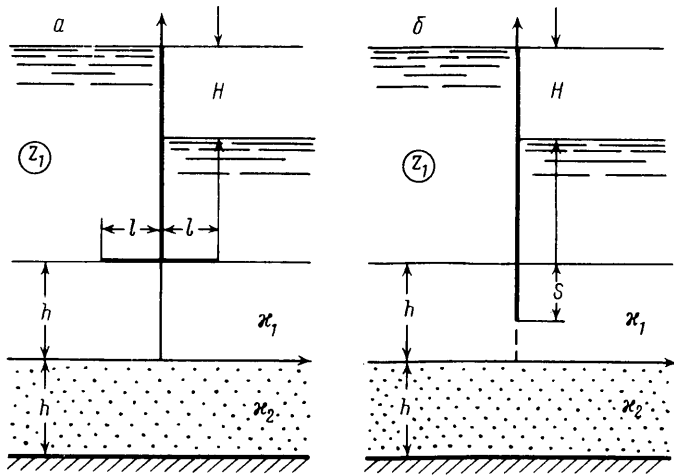
Сопоставление приведенных данных позволяет сделать следующие выводы.

1. В случае плотины 1 ширина дренажа l больше, причем разница составляет около 50% при $H=1$ и всех значениях параметра ε . При пятикратном увеличении параметра H эта разница уменьшается до 14%.

2. При малых размерах стенки L ($L \ll H$) расход в случае плотины 1 больше, а при $L \geq H/2$ — меньше, чем в случае плотины 2. Для последней расход в 1,01–1,16 раз больше также и при варьировании параметров H и ε .

3. В обоих случаях испарение оказывает весьма малое влияние на картину течения, поскольку приводит к незначительным изменениям величин l и Q .

4. О решении некоторых задач фильтрации в двухслойной среде. Рассмотренные выше случаи плотин помимо самостоятельного интереса могут быть также использованы при решении некоторых задач фильтрации в



Фиг. 3

двухслойной среде, исследованных ранее в [4–7]. Применяя обратный прием, предложенный в [8], можно показать, что задача о фильтрации под флютбетом шириной $2l$ в двух горизонтальных слоях грунта (с коэффициентами фильтрации κ_1 и κ_2) одинаковой мощности h с горизонтальной линией раздела в плоскости z_1 (фиг. 3, а) эквивалентна задаче о фильтрации через плотину 1. Случаю же фильтрации под заглубленным шпунтом длины S в той же двухслойной среде (фиг. 3, б) соответствует задача о фильтрации через плотину 2.

Решение сформулированных задач в двухслойной среде с учетом (1.2) имеет вид (в обозначениях [4–6])

$$\frac{d\omega_1}{dt} = -C \frac{\cos v(\pi - 2t)}{\cos v\sqrt{a - \sin^2 t}}, \quad \frac{d\omega_2^*}{dt} = C \frac{\sin v(\pi - 2t)}{\sin v\sqrt{a - \sin^2 t}}$$

$$\xi = a \sin^2(\pi z_1 / 2hi), \quad \epsilon = \kappa_2 / \kappa_1$$

Здесь ω_1 и ω_2 — комплексные потенциалы в верхнем и нижнем слоях; $\omega_2 = \omega_2^*$, где, согласно [8], через ω_2^* обозначено аналитическое продолжение функции $\omega_2(\xi)$ из нижней полуплоскости в верхнюю через любой из отрезков отрицательной части вещественной оси плоскости ξ . При этом в первом случае $a = k'^2$, $k' = [\text{ch}(\pi l / 2h)]^{-1}$, $k = \sqrt{1 - k'^2} = \text{th}(\pi l / 2h)$ и формулы (1.4) совпадают с формулами (1.30)–(1.33) книги [4, с. 299–301], во втором $a = k'^2$, $k' = \cos(\pi S / 2h)$, $k = \sin(\pi S / 2h)$ и формулы (2.1) после некоторых преобразований приводятся к формулам (2.3)–(2.6) той же книги (с. 304–305). Таким образом, получаются точные решения П. Я. Полубариновой-Кочинной, только иным путем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нумеров С. Н. О фильтрации в земляных плотинах с дренажем на водонепроницаемых основаниях // Изв. НИИ Гидротехники. 1939. Т. 25. С. 115–136.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. О непрерывном изменении годографа скорости в плоском установившемся движении грунтовых вод // Докл. АН СССР. 1939. Т. 24. № 4. С. 327–330.
3. Полубаринова-Кочина П. Я., Фалькович С. В. Теория фильтрации жидкостей в пористых средах // ПММ. 1947. Т. 11. № 6. С. 629–674.

4. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
5. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Простейшие случаи движения грунтовой воды в двух слоях с различными коэффициентами фильтрации // Изв. АН СССР. ОТН. 1939. № 6. С. 75–88.
6. *Полубаринова-Кочина П. Я.* О простейших случаях фильтрации в двухслойной среде // Докл. АН СССР. 1940. Т. 26. № 8. С. 746–749.
7. *Полубаринова-Кочина П. Я.* О фильтрации в неоднородном (двухслойном) грунте // Инж. сб. 1941. Т. 1. Вып. 2. С. 313–320.
8. *Калинин Н. К.* Сведения некоторых задач о фильтрации в двухслойной среде к задачам о фильтрации в однородном грунте // Докл. АН СССР. 1943. Т. 40. № 5. С. 204–207.

Ленинград

Поступила в редакцию
11.II.1991