МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1991

УДК 532. 529.2+532.59

В. А. ГОРОДЦОВ

КОЛЛАПС АСИММЕТРИЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Стратифицированная, расслоенная по плотности жидкость медленнее возвращается к равновесию, чем однородная, т. е. обладает более длительной памятью. Движения в такой среде приводят к структурным долгоживущим плотностным искажениям. Ламинарная диффузия ограничивает темпы перестройки мелкомасштабных неоднородностей. Выживанию крупномасштабных неоднородностей благоприятствует подавление турбулентных процессов в стратифицированной среде. Все это ведет к тому, что многие исходные особенности начальных возмущений, например та или иная анизотропия, продолжают оставаться важными даже тогда, когда породившие их причины уже давно прекратили действовать.

Известным структурообразующим процессом в стратифицированной жидкости является «коллапс» областей перемешанной жидкости [1–3], состоящий в сжатии исходных областей по вертикали, расползании по горизонтали, излучении внутренних волн и вторичном расслаивании среды.

В рамках линейного описания будет дано решение задачи о ламинарном коллапсе, т. е. решение начальной задачи с малыми начальными возмущениями плотности и движениями. В отличие от других публикаций на эту тему особое внимание уделено анализу роли горизонтальной асимметрии возмущений. Причинами такой анизотропии могут быть горизонтальная завихренность начального перемешивания, несимметрия плотностных «травм» среды, внешние сдвиговые течения. Они будут учитываться опосредованно через задание начальной завихренности и «перекоса» плотностных возмущений.

1. Общие представления решения начальной задачи. Решение начальной задачи для малых возмущений гидростатически равновесного состояния однородно стратифицированной (с постоянной частотой плавучести N) безграничной несжимаемой идеальной жидкости, описываемых в приближении Буссинеска, сводится к решению скалярного уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta+N^2\Delta_h\right)f(\mathbf{r},t)=0$$

$$\Delta_h\equiv\Delta-\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

при заданных начальных значениях $f(\mathbf{r},0)$, $\dot f(\mathbf{r},0)\equiv\partial f/\partial t|_{t=0}$. Сила тяжести выделяет вертикальное направление z.

В силу однородности коэффициенты уравнения постоянны и решение представимо разложением Фурье

$$f(\mathbf{r},t)=\int\frac{d^pk}{(2\pi)^p}f(\mathbf{k},t)e^{i\mathbf{kr}}$$

$$f(\mathbf{k},t)=\sum_{\pm}f^{\pm}(\mathbf{k},0)e^{\pm i\omega t}\tag{1.1}$$

$$2f^{\pm}(\mathbf{k},0)=f(\mathbf{k},0)\pm\frac{1}{i\omega}\dot f(\mathbf{k},0)$$

составляющие которого удовлетворяют уравнению гармонического осциллятора с частотой $\omega=Nk_h/k$. Здесь $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}_h$ — волновой вектор и его горизонтальная часть, $k=|\mathbf{k}|$, $k_h=|\mathbf{k}_h|$.

В плоских задачах ($p=2$) удобно использовать в цилиндрических координатах ($x=r\sin\theta$, $z=r\cos\theta$, $k_x=k\sin\chi$, $k_z=k\cos\chi$) разложения в ряды Фурье по угловым переменным

$$f(\mathbf{r},t)=\sum_n f_n(r,t)e^{in\theta},\qquad f(\mathbf{k},t)=\sum_n f_n(k,t)e^{in\chi}$$

$$f_n(r,t)=\int_0^\infty dkkJ_n(kr)\frac{i^n}{2\pi}f_n(k,t)$$

Здесь и далее подразумевается суммирование от $-\infty$ до $+\infty$, если не указано иного.

При этом получаем для плоской внутренней волны и суперпозиции волн, дающей решение начальной задачи, разложения

$$e^{i\mathbf{kr}+i\omega t}=\sum_n\sum_m J_n(kr)J_{n+m}(Nt)e^{in\psi}e^{im\chi}$$

$$f(\mathbf{r},t)=\sum_n\sum_m e^{in\psi}J_m\int_0^\infty\frac{dk}{2\pi}kJ_n(kr)\sum_\pm(\pm1)^m f^\pm_{n-m}(k,0)$$

$$\psi=\theta+\frac{\pi}{2}$$

В каждом члене двойных рядов разделились зависимости от радиальной, угловой и временно́й переменных (обезразмеренный временной аргумент функции Бесселя $J_m(Nt)$ часто будем опускать).

Для начальных условий с конечным числом угловых гармоник ряды становятся однократными. Это происходит также при осреднении по углам, по радиальному лучу и при проверке начальных условий.

Интегральные преобразования Ганкеля, вошедшие в ответ, для многих начальных условий выражаются через специальные функции математической физики.

Благодаря простым симметричным связям между возмущениями плотности и завихренности в плоской задаче

$$\dot\rho(\mathbf{k},t)=-i\omega\frac{N}{gk}\Omega(\mathbf{k},t),\qquad \frac{N}{gk}\dot\Omega(\mathbf{k},t)=-i\omega\rho(\mathbf{k},t)$$

$$\rho_n{}^\pm(k,0)=\frac{1}{2}\rho_n(k,0)\mp\frac{N}{2gk}\Omega_n(k,0)=\mp\frac{N}{gk}\Omega_n{}^\pm(k,0)$$

и ряды Фурье для возмущений плотности и скоростей течения можно преобразовать к виду

$$\rho(\mathbf{r},t)=\sum_n\sum_m J_mR_{nm}(r)e^{in\psi}$$

$$u(\mathbf{r},t)=\frac{ig}{N}\sum_n\sum_m\frac{m}{Nt}J_mR_{nm}(r)e^{in\psi}$$

$$w(\mathbf{r},t)=-\frac{g}{N}\frac{\partial\rho}{\partial Nt}=-\frac{g}{N}\sum_n\sum_m J_m'R_{nm}(r)e^{in\psi}$$

$$R_{nm}(r)=\int_0^\infty dkkJ_n(kr)R_{nm}^\circ(k)$$

$$2\pi R_{nm}^\circ(k)=\rho_{n-m}(k,0)\delta_{m,2s}-\frac{N}{gk}\Omega_{n-m}(k,0)\delta_{m,2s+1}$$

В выражениях для возмущений завихренности и давления входят несколько другие преобразования Ганкеля

$$\Omega(\mathbf{r},t)=\sum_n\sum_m J_m e^{in\psi}\int_0^\infty dkkJ_n(kr)Q_{nm}^\circ(k)$$

$$p(\mathbf{r},t)=\frac{i}{t}\sum_n\sum_m mJ_m e^{in\psi}\int_0^\infty \frac{dk}{k}J_n(kr)Q_{nm}^\circ(k)$$

$$Q_{nm}^\circ(k)=\Omega_{n-m}(k,0)\delta_{m,2s}-\frac{gk}{N}\rho_{n-m}(k,0)\delta_{m,2s+1}$$

Для упрощенного типа начальных условий, содержащих по одной низшей угловой гармонике возмущений завихренности и плотности (такими условиями ограничимся в дальнейшем)

$$\Omega(\mathbf{r},\ 0)=\Omega_0(r),\ \rho(\mathbf{r},\ 0)=\rho_0(r)\cos(\theta-\alpha)$$

$$\Omega_n(k,\ 0)=2\pi\Omega^\circ(k)\delta_{0n},\ \rho_n(k,\ 0)=-i\pi\rho^\circ(k)e^{-in\alpha}\delta_{\pm1,\ n}$$

$$\Omega^\circ(k)=\int_0^\infty drrJ_0(kr)\Omega_0(r),\qquad \rho^\circ(k)=\int_0^\infty drrJ_1(kr)\rho_0(r)$$

$$-R_{nm}^\circ(k)=\frac{N}{gk}\Omega^\circ(k)\delta_{nm}\delta_{m,2s+1}+\frac{i}{2}\rho^\circ(k)e^{\mp i\alpha}\delta_{n,m\pm1}\delta_{m,2s}$$

$$Q_{nm}^\circ(k)=\Omega^\circ(k)\delta_{nm}\delta_{m,2s}+\frac{igk}{2N}\rho^\circ(k)e^{\mp i\alpha}\delta_{n,m\pm1}\delta_{m,2s+1}$$

приведенные выше ряды становятся однократными.

Рассматриваемые начальные условия отражают несколько важных черт реальных возмущений, возникающих при перемешивании ограниченных объемов стратифицированной жидкости. Принято во внимание движение жидких частиц, описываемое их осесимметричным закручиванием $\Omega_0(r)$, и перекос в распределении плотности, характеризуемый углом α.

Лабораторные исследования коллапса обычно проводились в более узкой постановке, без учета начальных движений и при горизонтально-симметричных искажениях распределения плотности. Наблюдения выполнялись после успокоения перемешанной жидкости [4].

В итоге решение начальной задачи представляется рядами

$$\rho(\mathbf{r},t)=\sum_{n=2m+1}\left\{A_n^1J_n\frac{n}{Nt}\cos\alpha\sin n\psi-\left(A_n^1J_n'\sin\alpha+\frac{N}{g}B_n^1J_n\right)\cos n\psi\right\}$$

$$\frac{N^2t}{g}u(\mathbf{r},t)=\sum_{n=2m+1}\left\{A_n^1c_n\cos\alpha\cos n\psi+\left(A_n^1d_n\sin\alpha+\frac{N}{g}B_n^1J_n\right)n\sin n\psi\right\} \tag{1.2}$$

$$\frac{N^2t}{g}\Omega(\mathbf{r},t)=\sum_{n=2m}\left\{-A_n{}^2J_nn\cos\alpha\sin n\psi+Nt\left(A_n{}^2J_n{}'\sin\alpha+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{N}{g}B_n{}^2J_n\right)\cos n\psi\right\},\qquad -\frac{Nt}{g}p(\mathbf{r},t)=\sum_{n=2m}\left\{A_n{}^\circ c_n\cos\alpha\cos n\psi+\right.$$

$$\left.+\left(A_n{}^\circ d_n\sin\alpha+\frac{N}{g}B_n{}^\circ J_n\right)n\sin n\psi\right\}$$

$$c_n\equiv\frac{n^2}{Nt}J_n(Nt)-J_n{}'(Nt),\qquad d_n\equiv J_n{}'(Nt)-\frac{1}{Nt}J_n(Nt)$$

которые можно переписать как удвоенные (кроме членов с $n=0$) полубесконечные. Коэффициентные функции $A_n{}^l=A_n{}^l(r)$, $B_n{}^l=B_n{}^l(r)$ являются преобразованиями Ганкеля начальных распределений (в частности, $A_1{}^1=$ $=\rho_0(r)$, $B_0{}^2=\Omega_0(r)$)

$$A_n{}^l\equiv\int\limits_0^\infty dkk^lJ_n(kr)\rho^\circ(k),\qquad B_n{}^l\equiv\int\limits_0^\infty dkk^{l-1}J_n(kr)\Omega^\circ(k)$$

Возмущения содержат горизонтально-симметричную (члены с функциями

$$\sin(2m+1)\psi=(-1)^m\cos(2m+1)\theta,\ \cos 2m\psi=(-1)^m\cos 2m\theta$$

и антисимметричную части. В отсутствие начальной завихренности и перекоса возмущения плотности остаются симметричными и в дальнейшем.

В дальней волновой зоне вид решения допускает значительные упрощения. Однако для обоснования асимптотики удобнее вернуться к исходному интегральному представлению (1.1). Поскольку осредненная по направлениям волновых векторов элементарная внутренняя волна в плоской задаче выражается через функцию Бесселя

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\chi e^{i\mathbf{kr}\pm i\omega t}=J_0(R_\pm)$$

$$R_\pm{}^2\equiv(kr\pm Nt\sin\theta)^2+N^2t^2\cos^2\theta$$

можно переписать (1.1), например, для плотности в виде

$$\rho(\mathbf{r},t)=\frac{1}{2}\sum_\pm\int\limits_0^\infty dk\left\{\frac{N}{g}\Omega^\circ(k)(\mp1)J_0(R_\pm)+\right.$$

$$\left.+k\rho^\circ(k)\left[kr\cos(\theta-\alpha)\pm Nt\sin\alpha\right]\frac{J_1(R_\pm)}{R_\pm}\right\}$$

С помощью известных «теорем сложения» для цилиндрических функций можно здесь перейти к угловым разложениям. Таким способом получались решения в работах [4, 5]. Следует отметить, что лишь в частном случае $\alpha=0$ эти угловые разложения совпадут с приведенными выше разложениями решения в ряды Фурье.

При больших временах ($Nt|\cos\theta|\gg1$) велики аргументы $R_\pm$ в функциях Бесселя и последние можно заменить тригонометрическими асимптотиками. После этого оценки интегралов в дальней волновой зоне ($r\sim Nt\gg1$)

методом стационарной фазы для возмущений плотности дают

$$\rho(\mathbf{r},t) \approx \frac{\operatorname{sgn}\sin\theta}{r}\frac{N}{g}\Omega^\circ(k)\cos(Nt\cos\theta)+$$
$$+\sin(\theta-\alpha)k\rho^\circ(k)\sin(Nt\cos\theta)\}, \qquad kr=Nt|\sin\theta| \tag{1.3}$$

Горизонтальная асимметрия асимптотики при $\alpha\neq0$, $\Omega\neq0$ очевидна.

Главные члены асимптотик других характеристик в дальней волновой зоне находятся аналогично. Для завихренности получаем

$$\Omega(\mathbf{r},t) \approx \frac{1}{r}\{k\Omega^\circ(k)\cos(Nt\cos\theta)+$$
$$+\frac{g}{N}k^2\rho^\circ(k)\sin(\theta-\alpha)\sin(Nt\cos\theta)\}, \qquad kr=Nt|\sin\theta| \tag{1.4}$$

2. Коллапс возмущений, локализованных в цилиндрической области (*пример 1*). При описании перемешивания начальными возмущениями плотности и завихренности, локализованными в пределах цилиндрической области при $r\leqslant r_0$ ($h(r_0-r)$ – функция Хевисайда, обращающаяся в нуль при $r>r_0$)

$$\begin{aligned}
&\rho_0(r)=-\varepsilon r h(r_0-r), \qquad \rho^\circ(k)=-\frac{\varepsilon r_0^2}{k}J_2(kr_0)\\
&\Omega_0(r)=2\Omega_0 h(r_0-r), \qquad \Omega^\circ(k)=2\Omega_0\frac{r_0}{k}J_1(kr_0)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

эволюция возмущений будет описываться рядами (1.2). Причем внутри цилиндра при $r<r_0$ оказываются отличными от нуля лишь низшие члены рядов с коэффициентами

$$\begin{aligned}
&A_1^1=\rho_0(r), \qquad A_0^0=-\frac{\varepsilon}{2}(r_0^2-r^2)h(r_0-r)\\
&A_0^2+A_2^2=-2\varepsilon h(r_0-r), \quad A_2^2=-\varepsilon r_0\delta(r_0-r)\\
&A_2^\circ=-\frac{\varepsilon}{4r^2}[r^4h(r_0-r)+r_0^4h(r-r_0)]\\
&B_0^2=\Omega_0(r), \qquad B_1^1=\frac{\Omega_0}{r}[r^2h(r_0-r)+r_0^2h(r-r_0)]\\
&B_2^\circ=\frac{\Omega_0}{4r^2}[r^4h(r_0-r)+r_0^2(2r^2-r_0^2)h(r-r_0)]
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Вид решения вне цилиндра $r=r_0$ менее прост, но все остальные коэффициенты выражаются через полиномы Якоби $P_n^{(m,0)}\equiv P_n^{(m,0)}(1-2r_0^2/r^2)$ (в конечном счете – через полиномы Лежандра $P_n=P_n^{(0,0)}$)

$$\begin{aligned}
&A_{2m+1}^1=-\varepsilon\frac{r_0^4}{r^3}P_{m-1}^{(2,0)}, \qquad A_{2m}^0=-\varepsilon\frac{r_0^4}{4mr^2}(P_{m-1}^{(2,0)}+P_{m-2}^{(2,0)})\\
&A_{2m}^2+A_{2m-2}^2=-\varepsilon\frac{r_0^4}{r^4}(2m-1)P_{m-2}^{(2,0)}\\
&B_{2m+1}^1=\Omega_0\frac{r}{2(2m+1)}(P_{m-1}-P_{m+1}), \qquad B_{2m}^2=2\Omega_0\frac{r_0^2}{r^2}P_{m-1}^{(1,0)}\\
&B_{2m}^\circ=\Omega_0\frac{r_0^2}{4m}\left(P_m+P_{m-1}+\frac{r_0^2}{r^2}P_{m-1}^{(2,0)}+\frac{r_0^2}{r^2}P_{m-2}^{(2,0)}\right)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь подразумевается $m \geqslant 1$ в A_{2m+1}^1, B_{2m+1}^1, B_{2m}^2, $m \geqslant 2$ в A_{2m}^0, A_{2m}^2, B_{2m}^0, и эти коэффициенты отличны от нуля лишь при $r \geqslant r_0$.

Таким образом, в пределах исходной цилиндрической области возмущения затухают, осциллируя с частотой плавучести, в соответствии с поведением цилиндрических функций $J_n \equiv J_n(Nt)$

$$\rho = -\varepsilon J_1 \frac{2r}{Nt} \cos\alpha \cos\theta + \left(\frac{N}{g}\Omega_0 J_1 - \varepsilon J_1' \sin\alpha\right) 2r \sin\theta$$

$$\frac{N^2 t}{2g} u = \varepsilon J_2 r \cos\alpha \cos\theta + \left(\frac{N}{g}\Omega_0 J_1 + \varepsilon J_2 \sin\alpha\right) r \cos\theta$$

$$-\frac{N}{2g} w = \varepsilon J_2 \frac{r}{Nt} \cos\alpha \cos\theta + \left(\frac{N}{g}\Omega_0 J_1' - \varepsilon J_1'' \sin\alpha\right) r \sin\theta$$

$$\Omega = 2\Omega_0 J_0 + \frac{g}{N} 2\varepsilon J_1 \sin\alpha$$

$$\frac{Nt}{g} p = \frac{\varepsilon}{2}(r_0^2 - r^2) J_1 \cos\alpha - \frac{\varepsilon r^2}{4}(J_1 + 3J_3)\cos\alpha\cos 2\theta +$$

$$+ \left[\frac{N}{g}\Omega_0 J_2 - \frac{\varepsilon}{4}(J_1 - 3J_3)\sin\alpha\right] r^2 \sin 2\theta$$

В ближней зоне ($r < r_0$) асимметрия возмущений, как видно из этих формул, не только важна, но и вырождается медленнее. Горизонтально-антисимметричная часть возмущений плотности и вертикальной компоненты скорости затухает асимптотически ($Nt \gg 1$) как $(Nt)^{-1/2}$, а симметричная — в Nt раз быстрее.

Возмущения завихренности в ближней зоне (при $r < r_0$) целиком обязаны начальной завихренности и перекосу распределения плотности. С ними же связано возникновение сдвиговой деформации в пределах исходной цилиндрической зоны

$$e_{xz} = \Omega_0 J_2(Nt) + \frac{g}{N} \varepsilon J_1(Nt) \sin\alpha$$

Симметричная (горизонтально) часть начального возмущения плотности вызывает однородное деформационное бессдвиговое течение

$$e_{xx} = -e_{zz} = \frac{g}{N} \varepsilon \cos\alpha \frac{J_2(Nt)}{Nt}$$

Лишь этот частный случай рассматривался в [4] и результаты этой работы следуют из приведенных выше при $\Omega = 0$, $\alpha = 0$.

На границе цилиндрической области $r = r_0$ не исчезают скачки гидродинамических характеристик ($[f] \equiv f(r_0+0) - f(r_0-0)$). Парадоксально, что скачки плотности и скорости осциллируют без изменения амплитуды

$$[\rho] = \varepsilon r_0 \cos(\theta - \alpha) \cos(Nt \sin\theta)$$

$$[u] = -\frac{g}{N} \varepsilon r_0 \cos\theta \cos(\theta - \alpha) \sin(Nt \sin\theta)$$

$$[w] = \frac{g}{N} \varepsilon r_0 \sin\theta \cos(\theta - \alpha) \sin(Nt \sin\theta)$$

Это связано с идеализациями в постановке задачи (линейностью рассмотрения и предположением идеальности жидкости).

Давление и нормальная компонента скорости непрерывны на цилиндрической поверхности $r=r_0$, но под действием начального скачка плотности возникает осциллирующий тангенциальный разрыв скорости, что выражается в осциллирующем росте скачка завихренности и возникновении осциллирующего цилиндрического вихревого слоя.

Разрывность начальных распределений сказывается и на виде дальнего волнового поля, приводя к осцилляциям огибающей внутренних волн (см. (1.3), (1.4) и (2.1)).

3. **Коллапс однородно вращающейся цилиндрической области жидкости** (пример *2*). При локализованном распределении завихренности из примера *1* поле начального течения таковым не является. Поэтому рассмотрим еще ситуацию с локализованным начальным распределением скорости. Начальные плотностные искажения теперь не будем принимать во внимание, поскольку в силу линейности задачи при необходимости можно просто добавить результат предыдущего примера.

Если в начальный момент времени движение жидкости сводится к твердотельному вращению внутри цилиндра радиуса r_0

$$u(\mathbf{r}, 0)=\Omega_0 z h(r_0-r), \quad w(\mathbf{r}, 0)=-\Omega_0 x h(r_0-r)$$

то однородное распределение завихренности из примера *1* дополняется компенсирующим вихревым слоем на поверхности цилиндра

$$\Omega(\mathbf{r}, 0)=2\Omega_0 h(r_0-r)-\Omega_0 r_0 \delta(r-r_0)$$

$$\Omega^0(k)=\Omega_0 r_0^2 J_2(kr_0)$$

и коэффициентные функции разложений решения в ряды Фурье (1.2) также легко находятся, и для возмущений плотности и скорости получаем $A_n^l=0$, $B_1^1=\Omega_0 r h(r_0-r)$

$$B^1_{2m+1}=\Omega_0 \frac{r_0^4}{r^3} P^{(2,0)}_{m-1}\left(1-\frac{2r_0^2}{r^2}\right) h(r-r_0), \qquad m\geq 1$$

$$\frac{g}{2\Omega_0 N}\rho(\mathbf{r}, t)=J_1 r\sin\theta h(r_0-r)+\frac{r_0^4}{r^3}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m J_{2m+1}P^{(2,0)}_{m-1}\sin(2m+1)\theta h(r-r_0)$$

$$u(\mathbf{r}, t)=\frac{g}{N^2 t}\frac{\partial\rho(\mathbf{r}, t)}{\partial\theta}, \qquad w(\mathbf{r}, t)=-\frac{g}{N^2}\frac{\partial\rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \tag{3.1}$$

На цилиндрической поверхности, как и в предыдущем примере, имеют место осциллирующие скачки гидродинамических характеристик. Например

$$[\rho]=-(N\Omega_0 r_0/g)\sin(Nt\sin\theta)$$

и в остальном поведение решения во многом аналогично.

В предыдущем пункте в качестве некоторой характеристики несимметричного перемешивания жидкости задавался перекос начального распределения плотности. Теперь можно привести соображения в пользу сделанного выбора. При начальном твердотельном закручивании жидкости в цилиндре возникают горизонтально асимметричные возмущения плотности (3.1). Причем внутри цилиндра проявляется только первая гармоника (с углом перекоса $\alpha=\pi/2$), а вне его только высшие, которые быстро убывают с расстоянием при небольших временах ($Nt<1$). Ограничиваясь при выборе нового начального условия только первой гармоникой возмущения плотности, придем с добавлением некоторой горизонтально симметричной части к начальным возмущениям плотности примера *1*.

С другой стороны, локализованная в цилиндрической области однородная завихренность примера *1* ведет к появлению при коллапсе первой гармоники плотности и внутри и вне области (см. (1.2) и выражение для B_1^1 в (2.2)). Причем отличительная особенность этого случая в том, что благодаря непрерывности начального нелокального распределения скорости оказываются непрерывными и возникающие возмущения плотности. Отбросив высшие гармоники, используем такое распределение в качестве нового начального условия.

4. **Эволюция непрерывного начального возмущения плотности** (*пример 3*). При начальном распределении

$$\rho(\mathbf{r}, 0)=-\varepsilon r\cos(\theta-\alpha)\left[h(r_0-r)+\frac{r_0^2}{r^2}h(r-r_0)\right]$$

$$\rho^\circ(k) = -\frac{2\varepsilon r_0}{k^2} J_1(kr_0)$$

решение представляется рядами (1.2) с коэффициентами, выражающимися, как и в предыдущих примерах, через полиномы Якоби. Более того, здесь коэффициенты A_n^l совпадают с коэффициентами B_n^l из (2.2), (2.3) при замене Ω на $-\varepsilon$, а коэффициенты, связанные с начальной завихренностью, отсутствуют ($B_n^l=0$). Для возмущений плотности получаем

$$\rho = -\varepsilon r\left(\sin\alpha\frac{\partial}{\partial Nt} + \frac{\cos\alpha}{Nt}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left\{2J_1\sin\theta\left[h(r_0-r) + \frac{r_0^2}{r^2}h(r-r_0)\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}(P_{m-1}-P_{m+1})J_{2m+1}\sin(2m+1)\theta h(r-r_0)\right\}$$

Внутри цилиндра $r=r_0$ решение этого примера полностью совпадает с решением примера *1* в отсутствие начальной завихренности. Различия касаются внешней области и того, что здесь возмущения остаются непрерывными при коллапсе и на самой цилиндрической поверхности $r=r_0$.

Для асимптотики в дальней волновой зоне (см. (1.3))

$$\rho \approx -\frac{2\varepsilon r_0}{k^2 r} J_1(kr_0)\frac{|\sin\theta|}{\sin\theta}\sin(\theta-\alpha)\sin(Nt\cos\theta)$$

$$kr = Nt\,|\sin\theta|$$

по-прежнему характерна осцилляция огибающей внутренних волн, отражающая отсутствие гладкости начального распределения.

Из приведенных решений простейших модельных примеров видно, что горизонтальная асимметрия начальных возмущений существенным образом отражается в поведении как ближних, так и дальних полей возмущений в стратифицированной жидкости, полей внутренних волн.

В рамках описанной общей схемы с применением разложений в ряды Фурье по угловой переменной в цилиндрических координатах легко найти решения и других примеров с упрощенными симметричными и несимметричными начальными распределениями, часть из которых опубликована в работах [5—7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hopfinger E. J.* Turbulence in stratified fluids: A review // J. Geophys. Res. 1987. V. C92. № 5. P. 5287—5303.
2. *Монин А. С.* Теоретические основы геофизической гидродинамики. Л.: Гидрометеоиздат, 1988. 424 с.
3. *Тернер Дж.* Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977. 431 с.
4. *Hartman R. J., Lewis H. W.* Wake collapse in a stratified fluid: linear treatment // J. Fluid Mech. 1972. V. 51. № 3. P. 613—618.
5. *Meng J. C. S., Rottman J. W.* Linear internal waves generated by density and velocity perturbations in a linearly stratified fluid // J. Fluid Mech. 1988. V. 186. P. 419—444.
6. *Городцов В. А.* Эволюция осесимметричных распределений завихренности в идеальной несжимаемой стратифицированной жидкости (линейное описание) // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 4. С. 583—589.
7. *Городцов В. А., Теодорович Э. В.* Линейное описание эволюции (коллапса) симметричных распределений возмущений однородно стратифицированной жидкости // Методы гидрофизических исследований: Матер. 1-й Всесоюз. шк.„ Солнечногорск, октябрь, 1983. Горький, 1984. С. 137—147.

Москва

Поступила в редакцию 29.XI.1990