

УДК 532.529

© 1991 г.

Л. М. ГАЛИЕВА, Ю. П. ГУПАЛО

О ДВИЖЕНИИ И МАССООБМЕНЕ ПУЗЫРЕЙ УМЕРЕННЫХ РАЗМЕРОВ В ПСЕВДООЖИЖЕННОМ СЛОЕ

На основании приближения пограничного слоя исследуется установившееся движение и массообмен пузырей умеренных размеров в псевдоожигенном слое. Ранее изучались случаи мелких (малые числа Рейнольдса) и крупных (приближение идеальной жидкости) пузырей, что не охватывает наиболее интересные для практики случаи пузырей, соответствующих умеренным числам Рейнольдса (порядка 10^2).

Описание слоя основано на представлении о двойном континууме. Ожижающий агент моделируется идеальной (на масштабах порядка размера пузыря) несжимаемой жидкостью, а совокупность частиц — ньютоновской несжимаемой жидкостью, обладающей малой эффективной вязкостью, такой, что распределение скоростей и давлений фаз мало отличается от их распределений в модели Дэвидсона [1, 2], а возмущения, обусловленные вязкими напряжениями, проявляются лишь в тонком пограничном слое вблизи поверхности пузыря.

Определяются поля скоростей и распределения давлений фаз, скорость всплывания пузыря. Исследуются режимы течения жидкой фазы. Обобщаются результаты исследований по массопереносу к пузырям различных размеров, всплывающим в псевдоожигенных слоях.

1. Постановка задачи о движении пузыря в псевдоожигенном слое при умеренных числах Рейнольдса. Введем обычное предположение, соответствующее практически важному случаю ожижения газом, о том, что плотность дисперсной фазы велика по сравнению с плотностью ожижающего агента. Радиус пузыря мал по сравнению с размерами реактора, так что можно пренебречь влиянием границ слоя и рассматривать движение пузыря в безграничной внешней среде. Положим, что концентрация частиц дисперсной фазы всюду в слое вне пузыря одинакова и достаточно велика, так что инерцией жидкой фазы можно пренебречь. Рассматривается линейное межфазное взаимодействие, т. е. предполагается, что скорости межфазного скольжения малы. Число Рейнольдса $Re = \rho d_s U_b a / \mu_s$, определяемое по скорости всплывания U_b и радиусу a пузыря, концентрации ρ и плотности d_s частиц, так велико, что распределение скоростей при движении пузыря может быть описано в приближении пограничного слоя, аналогичном использованному при анализе движения пузыря в чистой жидкости [3, 4].

Полная система уравнений установившегося двухфазного течения при всплывании пузыря умеренных размеров будет иметь вид

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} = 0, \quad \nabla \mathbf{w} = 0, \quad \nabla p_i + \mathbf{f} = 0 \\ \rho d_s (\mathbf{w} \nabla) \mathbf{w} = -\nabla p_s + d_s \rho \mathbf{g} + \mathbf{f} + \mu_s \Delta \mathbf{w} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v}' = 0, \quad \nabla p_i' = 0 \\ \mathbf{f} = \rho \nabla p_i - \rho (\mathbf{w} - \mathbf{v}) F(\rho) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь \mathbf{v} , \mathbf{w} , p_i , p_s — скорости и давления ожижающего агента и дисперсной фазы, \mathbf{f} — сила межфазного взаимодействия [2]. В системе (1.1), как и везде далее, штрихом отмечены величины, относящиеся к области течения внутри пузыря.

В сферической системе координат r , θ , φ , связанной с центром пузыря и полярной осью, направленной в сторону ускорения силы тяжести \mathbf{g} , при

сделанных предположениях граничные условия на поверхности пузыря имеют вид

$$\begin{aligned} r=a, \quad \varepsilon v_r=v_r', \quad p_f=p_f', \quad w_r=0 \\ -p_s+2\mu_s \frac{\partial w_r}{\partial r}=0, \quad \mu_s \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_r}{\partial \theta} + \frac{\partial w_\theta}{\partial r} - \frac{w_\theta}{r} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь ε — пористость слоя ($\varepsilon=1-\rho$).

Условия (1.3) записаны с учетом симметрии задачи относительно полярной оси. Следует также добавить требования однородности потоков фаз вдали от пузыря и ограниченности скорости жидкой фазы внутри него

$$r \rightarrow \infty, \quad \mathbf{v}=\mathbf{v}_{00}-U_b, \quad \mathbf{w}=-U_b; \quad r < a, \quad |\mathbf{v}'| < \infty \quad (1.4)$$

Здесь \mathbf{v}_{00} — скорость оживающего агента в промежутках между частицами вдали от пузыря.

Поля скоростей и распределения давлений дисперсионной среды и дисперсной фазы, моделируемых идеальными жидкостями, вблизи всплывающего пузыря представляются в виде [1]

$$\begin{aligned} w_{0r}=U_b \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta, \quad w_{0\theta}=-U_b \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \sin \theta \\ v_{0r}=w_{0r}-v_{00} \left(1 + \frac{2a^3}{r^3} \right) \cos \theta; \quad v_{0\theta}=w_{0\theta}+v_{00} \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \theta \\ v_{0r}'=-3\varepsilon v_{00} \cos \theta, \quad v_{0\theta}'=3\varepsilon v_{00} \sin \theta, \quad p_{f0}'=0 \\ p_{f0}=\frac{v_{00}}{k} \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right) \cos \theta, \quad p_{s0}=-\rho d_s \frac{w_0^2}{2} + \rho d_s g r \cos \theta + \text{const} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь k — коэффициент фильтрации.

Предположим, что скорости и давления фаз в модели движения пузыря умеренного размера отличаются от соответствующих выражений в модели Дэвидсона [1] (1.5) на величины $\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1, p_{f1}, p_{s1}$, малые по сравнению с $\mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0, p_{f0}, p_{s0}$. Таким образом

$$\begin{aligned} \mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\mathbf{v}_1, \quad \mathbf{w}=\mathbf{w}_0+\mathbf{w}_1, \quad p_f=p_{f0}+p_{f1}, \quad p_s=p_{s0}+p_{s1} \\ |\mathbf{v}_1| \ll |\mathbf{v}_0|, \quad |\mathbf{w}_1| \ll |\mathbf{w}_0|, \quad |p_{f1}| \ll |p_{f0}|, \quad |p_{s1}| \ll |p_{s0}| \end{aligned} \quad (1.6)$$

Далее индекс 1 для упрощения записи будем опускать, а под величинами $\mathbf{v}, \mathbf{w}, p_f, p_s$ будем подразумевать поправки к скоростям и давлениям фаз.

2. Поля скоростей и распределения давлений фаз. Подставляя выражения (1.5), (1.6) в систему уравнений (1.1) и граничные условия (1.3), (1.4), получаем задачу для определения поправок $\mathbf{v}, \mathbf{w}, p_f, p_s$ к полям скоростей и давлений

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v}=0, \quad \nabla \mathbf{w}=0, \quad \mathbf{v}-\mathbf{w}=-k \nabla p_f \\ \rho d_s [(\mathbf{w}_0 \nabla) \mathbf{w} + (\mathbf{w} \nabla) \mathbf{w}_0] = -\nabla p_s + \mu_s \Delta \mathbf{w} - \nabla p_f \\ r=a, \quad \varepsilon v_r=v_r', \quad p_f=p_f' \\ w_r=0, \quad -p_s+2\mu_s \frac{\partial w_r}{\partial r}=0 \\ \mu_s \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_r}{\partial \theta} + \frac{\partial w_\theta}{\partial r} - \frac{w_\theta}{r} \right) = -\frac{3U_b}{a} \mu_s \sin \theta \\ r \rightarrow \infty, \quad \mathbf{v}=0, \quad \mathbf{w}=0; \quad r < a, \quad |\mathbf{v}'| < \infty \end{aligned} \quad (2.1)$$

Заметим, что в четвертом уравнении опущен член второго порядка малости $(w\nabla)w$. Дальнейшее упрощение этого уравнения возможно на основании предположения о малости толщины пограничного слоя Δ по сравнению с радиусом пузыря a .

Рассмотрим распределение скорости дисперсной фазы вблизи поверхности пузыря при $r \approx a$. Здесь можно ввести переменную $y=r-a$ и считать, что $y \ll a$. Разлагая выражения для значений компонент скорости w_0 (1.5) в ряд по степеням y/a , находим

$$w_{0r} = 3U_b \frac{y}{a} \cos \theta, \quad w_{0\theta} = -\frac{3}{2} U_b \left(1 - \frac{y}{a}\right) \sin \theta \quad (2.2)$$

Подставляя приближенные выражения (2.2) в (2.1) и оценивая по порядку величины все члены, можно получить следующую систему для нахождения поправок к скорости и давлению дисперсной фазы

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_s}{\partial y} &= -\frac{3U_b}{a} w_{0r} d_s \sin \theta \\ \frac{3}{2} U_b \rho d_s \left(-w_{0\theta} \cos \theta - \frac{\partial w_{0\theta}}{\partial \theta} \sin \theta + 2y \frac{\partial w_{0\theta}}{\partial y} \cos \theta \right) &= \mu_s \frac{\partial^2 w_{0\theta}}{\partial y^2} \\ \frac{\partial w_{0y}}{\partial y} + \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (w_{0\theta} \sin \theta) &= 0 \\ y=0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad w_{0y}=0, \quad \mu_s \frac{\partial w_{0\theta}}{\partial y} &= -3 \frac{U_b}{a} \mu_s \sin \theta \\ y \rightarrow \Delta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad w \rightarrow 0; \quad \theta = \pi, \quad w_{0\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

При помощи второго выражения (2.3) можно оценить толщину пограничного слоя Δ . Именно при $y \approx \Delta$ вязкие и конвективные члены должны быть величинами одного порядка. Оценка их дает $\Delta \approx a/\text{Re}^{1/2}$. Толщина пограничного слоя мала по сравнению с радиусом пузыря при $\text{Re} \gg 1$.

Заметим, что задачи о движении дисперсной фазы псевдооживленного слоя и о движении однородной жидкости при всплывании в них пузырей умеренных размеров сходны. Для решения системы (2.3) произведем несколько преобразований, подобных проделанным в [3, 4]. Вводя функцию $F(\theta, y) = (w_{0\theta}/U_b) \sin \theta$ и переходя к переменным Мизеса, перепишем второе уравнение и граничные условия (2.3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \Theta} &= \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 F}{\partial \Psi^2} \\ \frac{\partial F(\Theta, 0)}{\partial \Psi} &= -3, \quad \lim_{\Psi \rightarrow \infty} F(\Theta, \Psi) = 0, \quad F(0, \Psi) = 0 \\ \left(\Theta = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} + \cos \theta - \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right), \quad \Psi = \frac{y}{a} \sin^2 \theta \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Выражение (2.4) представляет собой обычное уравнение типа теплопроводности. Общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} F &= \frac{6\Theta^{1/2}}{\sqrt{\text{Re}}} \text{ierfc} \frac{\Psi}{2(\Theta/\text{Re})^{1/2}} \\ \text{ierfc} x &= \int_x^\infty \text{erfc} z \, dz, \quad \text{erfc} x = 1 - \text{erf} x \end{aligned}$$

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-z^2) dz$$

Вновь возвращаясь к физическим координатам (θ, y) , получаем следующее решение системы (2.3):

$$w_0 = 6U_b \lambda^{1/2} \sin \theta f(y_*)$$

$$w_r = -2U_b \frac{\Delta^2 \lambda^{1/2}}{\sin \theta} \left\{ h'(\theta) \int_0^{y_*} f(t) dt + h(\theta) \left[2 \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{3\lambda \sin \theta} \right] \int_0^{y_*} t f'(t) dt \right\} \quad (2.5)$$

$$p_s = -36\rho d_s U_b^2 \Delta^2 \lambda \sin \theta \int_0^{y_*} f(t) dt$$

$$f(t) = \pi^{-1/2} \exp(-t^2) - t \operatorname{erfc} t, \quad f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$$

$$\lambda(\theta) = \frac{2}{3} \operatorname{cosec}^4 \theta \left(\frac{2}{3} + \cos \theta - \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right), \quad h'(\theta) = \frac{dh(\theta)}{d\theta}$$

$$h(\theta) = 6\lambda^{1/2} \sin^2 \theta, \quad y_* = y / (2\lambda^{1/2} \Delta)$$

Как и в модели фаз — идеальных жидкостей, удовлетворить условию, вытекающему из условия непрерывности полных нормальных напряжений на поверхности пузыря, не удастся. Поправки к распределению скорости и давления дисперсионной среды определяются тем же способом, что и сами скорости в модели [1]

$$v_r = w_r, \quad v_\theta = w_\theta, \quad p_f = 0, \quad p_f' = 0$$

Выражение для скорости всплывания пузыря умеренных размеров, типа предложенного в [4] для газовых пузырьков, всплывающих в чистой жидкости, имеет вид

$$U_b = \frac{\rho d_s g a^2}{9\mu_s}, \quad \operatorname{Re} = \frac{\operatorname{Ar}}{9}, \quad \operatorname{Ar} = \frac{\rho^2 d_s^2 g a^3}{\mu_s^2} \quad (2.6)$$

(Ar — число Архимеда).

На основании выражений для скорости всплывания одиночного пузыря в псевдооживленном слое U_b при $\operatorname{Re} \ll 1$ и $\operatorname{Re} \gg 1$, найденных в [1, 5]

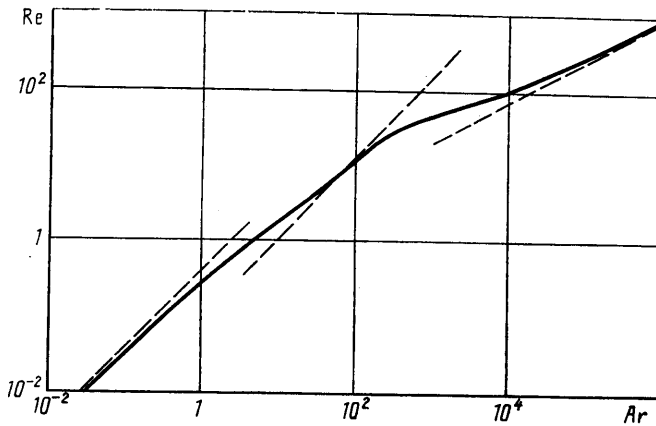
$$\operatorname{Re} \ll 1, \quad U_b = \rho d_s g a^2 / (3\mu_s), \quad \operatorname{Re} = \frac{1}{3} \operatorname{Ar} \quad (2.7)$$

$$\operatorname{Re} \gg 1, \quad U_b = \frac{2}{3} (g a)^{1/2}, \quad \operatorname{Re} = \frac{2}{3} \operatorname{Ar}$$

а также выражения для скорости всплывания пузыря умеренных размеров (2.6), предлагается интерполяционная формула для всего диапазона изменения числа Рейнольдса

$$\operatorname{Re} = \frac{10\operatorname{Ar} + \operatorname{Ar}^2 + 2\operatorname{Ar}^{1/2} \cdot 10^{-2}}{30 + 9\operatorname{Ar} + 3\operatorname{Ar}^2 \cdot 10^{-2}} \quad (2.8)$$

При значениях числа Re порядка 10^2 , для которых справедлива модель движения пузыря умеренных размеров, соотношение (2.8) дает значения



Фиг. 1

скорости U_b , хорошо согласующиеся с экспериментальными данными (см., например, обзор [6]).

Значения скорости U_b , определяемые на основании (2.6) и (2.8), совпадают при $Ar=78,3$; $Re=8,7$.

На фиг. 1 прерывистыми линиями представлены зависимости (2.6), (2.7), а непрерывной линией — (2.8). Заметим, что при Re порядка 10^2 формула (2.6) дает по сравнению с экспериментальными данными и с выражением (2.8) завышенные значения скорости.

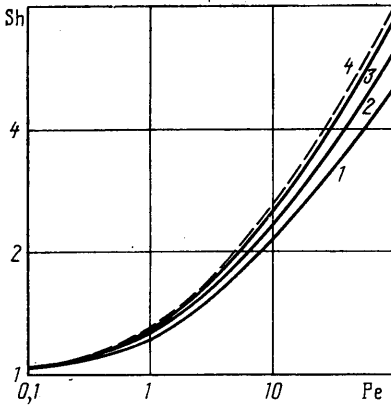
3. Режимы течения оживающего агента в окрестности пузыря. Анализ поля течения жидкой фазы показывает, что при всплывании пузырей умеренных размеров могут существовать два режима течения — проточный и циркуляционный. Проточный режим осуществляется при движении относительно мелких пузырей, скорость всплывания которых меньше скорости псевдооживающего ($\delta = U_b/v_{00} < 1$). Область циркуляции оживающего агента возникает в окрестности относительно более крупных пузырей, всплывающих со скоростью, большей скорости псевдооживающего ($\delta > 1$). Одновременное выполнение условия $\delta < Re^{1/2}$ означает, что пузырь находится внутри области циркуляции вместе с погранслоем, а границей облака является концентрическая с поверхностью пузыря сфера, расположенная вне пузыря, радиус которой a_c определяется так же, как и в модели Дэвидсона [1]

$$(a_c/a)^3 = (\delta + 2)/(\delta - 1) \quad (3.1)$$

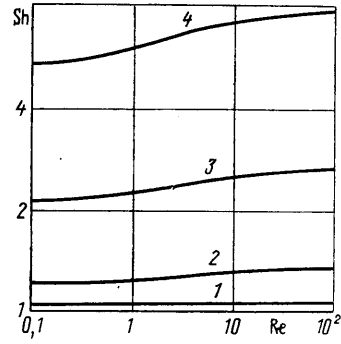
В качестве примера рассмотрим систему воздух ($\mu_f = 1,7 \cdot 10^{-5}$ кг/мс) — стеклянные шарики ($d_s = 2,3 \cdot 10^3$ кг/м³, $a_p = 110$ мкм). В момент начала псевдооживающего концентрация частиц в слое равна 0,5, скорость оживающего агента в промежутках между частицами v_{00} принимает значение 0,326 м/с, а вязкость дисперсной фазы μ_s в соответствии с экспериментальными данными Грейса [7] равна 0,85 кг/мс. Пузыри диаметром менее 4,9 см в такой системе всплывают в проточном режиме. В окрестности пузырей большего диаметра образуется область циркуляции, а условия $\delta < Re^{1/2}$, $Re \gg 1$ заведомо выполнены.

Так, пузырь диаметром 20 см всплывает со скоростью $U_b = 0,65$ м/с ($\delta = 2$; $Re = 88$), толщина погранслоя $\Delta = 1,6$ см, а радиус области циркуляции $a_c = 15,9$ см.

При выполнении условия $\delta < Re^{1/2}$ поля скоростей фаз вне облака в задаче Дэвидсона и задаче о всплывании пузыря умеренных размеров при совпадающих значениях скоростей всплывания U_b и равных скоростях псевдооживающего v_{00} тождественны.



Фиг. 2



Фиг. 3

4. Массоперенос к пузырю в псевдооживленном слое. На основании последнего замечания можно заключить, что результаты решения задачи о массопереносе между пузырями и непрерывной фазой в псевдооживленном слое [8], основанной на гидродинамической модели Дэвидсона [1], можно полностью перенести на задачу о массопереносе к пузырю умеренных размеров. Отличие состоит лишь в способе определения скорости всплывания пузыря U_b . Выпишем, в частности, выражения для числа Шервуда в случае умеренных и бесконечно больших чисел Рейнольдса [8, 9]

$$Pe \gg 1, \quad Sh = \left(\frac{2Pe}{\pi} \right)^{1/2} + \frac{3\sqrt{3}}{8\pi}; \quad Pe \ll 1, \quad Sh = 1 + \frac{Pe}{2} + O(Pe^2) \quad (4.1)$$

В [8] была также предложена интерполяционная формула $Sh = (1 + 2\pi^{-1} Pe)^{1/2}$.

В случае малых чисел Рейнольдса зависимость Sh от Pe имеет вид [9]

$$Pe \gg 1, \quad Sh = \left(\frac{2Pe}{3\pi} \right)^{1/2} + \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}; \quad Pe \ll 1, \quad Sh = 1 + \frac{Pe}{2} + O(Pe^2 \ln Pe) \quad (4.2)$$

Соответствующая интерполяционная формула имеет вид [9]

$$Sh = 1 + \frac{Pe}{2(1 + 1,1Pe^{1/2})} \quad (4.3)$$

Обобщение зависимостей (4.1)–(4.3) на весь интервал изменения чисел Pe и Re хорошо удовлетворяет достаточно простому соотношению

$$Sh = 1 + \frac{Pe}{2 + \varphi(Re)Pe^{1/2}} \quad \varphi(Re) = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \frac{Re + \sqrt{3}}{Re + 1} \quad (4.4)$$

На фиг. 2 линиями 1–4 представлены зависимости числа Sh от Pe , определяемые на основании выражения (4.4) при фиксированных значениях числа Re , равных соответственно 0; 1; 10; ∞ . Зависимости числа Sh от Re при фиксированных значениях Pe , равных 0,1; 1; 10; 10^2 , представлены на фиг. 3 кривыми 1–4.

Таким образом, соотношения (2.8) и (4.4) определяют скорость всплывания пузыря в псевдооживленном слое и безразмерный диффузионный поток на границу области циркуляции оживжающего агента (в случае ее образования) во всем диапазоне изменения параметров пузыря и слоя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дэвидсон И. Ф., Харрисон Д. Псевдооживление твердых частиц. М.: Химия, 1965. 184 с.
2. Бородуля В. А., Гупало Ю. П. Математические модели химических реакторов с кипящим слоем. Минск: Наука и техника, 1976. 207 с.
3. Moore D. W. The boundary layer on a spherical gas bubble // J. Fluid Mech. 1963. V. 16. № 2. P. 161-176.
4. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
5. Бобков Н. Н., Галиева Л. М., Гупало Ю. П. О движении неоднородностей развитого кипящего слоя при малых числах Рейнольдса // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 4. С. 57-65.
6. Псевдооживление/Под ред. Дэвидсона И. Ф. и Харрисона Д. М.: Химия, 1974. 725 с.
7. Grace J. R. The viscosity of fluidized beds // Can. J. Chem. Eng. 1970. V. 48. № 1. P. 30-33.
8. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Сергеев Ю. А. О массообмене между пузырями и непрерывной фазой в псевдооживленном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 4. С. 42-49.
9. Галиева Л. М., Гупало Ю. П. Массоперенос к пакетам и пузырям в псевдооживленном слое при малых числах Рейнольдса // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 4. С. 60-67.

Москва

Поступила в редакцию
26.IX.1990