

УДК 532. 526.4

© 1991 г.

**В. М. ЗУБАРЕВ**

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕДОТРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ПОГРАНИЧНОМ  
СЛОЕ НА ОСНОВЕ РАЗЛИЧНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ  
МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ**

Работа посвящена численному моделированию пространственного турбулентного пограничного слоя, возникающего на плоской пластине перед препятствием, когда имеется неблагоприятное поле градиента давления, создающее сильное вторичное течение и трехмерный отрыв. Течение такого рода исследовалось численно и экспериментально [1–2].

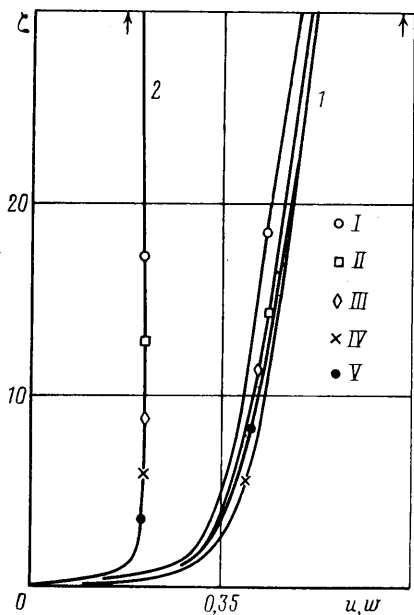
В данной статье рассмотрена задача о пространственном турбулентном пограничном слое несжимаемой жидкости, развивающемся перед круговым цилиндром, установленным перпендикулярно на плоской пластине. Набегающий однородный поток ориентирован нормально передней кромке пластины. Моделирование турбулентности осуществлялось с помощью пяти различных изотропных алгебраических моделей вихревой вязкости. Уравнения пограничного слоя решались численно неявным конечно-разностным методом второго порядка точности.

Проведено сопоставление основных характеристик течения, полученных на основе выбранных моделей турбулентности, для числа Рейнольдса набегающего потока  $Re_\infty = 10^7$ .

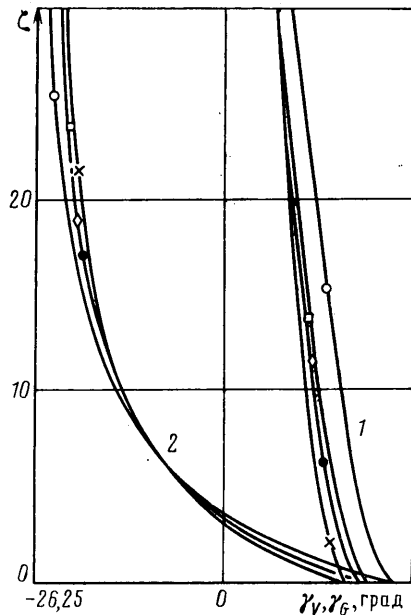
Изучается течение в пространственном турбулентном пограничном слое несжимаемой жидкости, образующемся на плоской пластине перед круговым цилиндром, при обтекании ее однородным потоком без угла скольжения. Система уравнений трехмерного течения для осредненных характеристик турбулентного пограничного слоя (при обычных предположениях теории пограничного слоя Прандтля) в произвольной криволинейной системе координат, нормально связанной с поверхностью обтекаемого тела, имеет вид [3]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^1} (v^1 \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial x^2} (v^2 \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial x^3} (v^3 \sqrt{g}) = 0 \quad (1) \\ & v^1 \frac{\partial v^1}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial v^1}{\partial x^2} + v^3 \frac{\partial v^1}{\partial x^3} + \Gamma_{11}^1 (v^1)^2 + \Gamma_{22}^1 (v^2)^2 + \\ & + 2\Gamma_{12}^1 v^1 v^2 = \frac{1}{\rho g} \left( -g_{22} \frac{\partial p}{\partial x^1} + g_{12} \frac{\partial p}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left( \nu \frac{\partial v^1}{\partial x^3} - \langle v^1 v^3 \rangle \right) \\ & v^1 \frac{\partial v^2}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial v^2}{\partial x^2} + v^3 \frac{\partial v^2}{\partial x^3} + \Gamma_{11}^2 (v^1)^2 + \Gamma_{22}^2 (v^2)^2 + \\ & + 2\Gamma_{12}^2 v^1 v^2 = \frac{1}{\rho g} \left( -g_{11} \frac{\partial p}{\partial x^2} + g_{12} \frac{\partial p}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left( \nu \frac{\partial v^2}{\partial x^3} - \langle v^2 v^3 \rangle \right) \end{aligned}$$

Здесь  $v^i$  – контравариантная составляющая вектора скорости соответственно вдоль оси  $x^i$  ( $i=1-3$ );  $x^1, x^2, x^3$  – криволинейная система координат (линия  $x^1=0$  соответствует кромке пластины,  $x^3=0$  – уравнение ее поверхности,  $x^2=0$  – плоскость симметрии);  $\Gamma_{jk}^i$  – символы Кристоффеля;  $g_{ij}$  – ковариантные компоненты симметричного метрического тензора,  $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ ;  $p$  – статическое давление;  $\rho$  – плотность жидкости;  $\nu$  – ки-



Фиг. 1



Фиг. 2

нematический коэффициент молекулярной вязкости жидкости; угловые скобки означают осреднение по времени, штрихи относятся к пульсационным компонентам скорости.

Граничные условия ставятся следующим образом. На поверхности пластины — условия прилипания, на внешней границе пограничного слоя задаются составляющие скорости  $v_e^1$ ,  $v_e^2$  из соответствующей задачи невязкого обтекания кругового цилиндра [4]. В начальном сечении  $x^1=0$  задаются профили скорости  $v^1$  и  $v^2$ , получающиеся из системы уравнений (1) с занулением производных по координате  $x^1$  и условием прилипания на стенке. В плоскости  $x^2=0$  ставятся условия симметрии  $v^2=0$ ,  $\partial v^1/\partial x^2=0$ .

При замыкании уравнений (1) турбулентного движения применяются концепции вихревой вязкости Буссинеска, длины пути смешения Прандтля и гипотеза изотропной турбулентной вязкости:

$$\tau_t^1 = -\rho \langle v^1 v^{3'} \rangle = \mu_t \frac{\partial v^1}{\partial x^3}, \quad \tau_t^2 = -\rho \langle v^2 v^{3'} \rangle = \mu_t \frac{\partial v^2}{\partial x^3}$$

$$\mu_t = f(|G|), \quad G = \left( \frac{\partial v^1}{\partial x^3}, \frac{\partial v^2}{\partial x^3} \right)$$

здесь  $\mu_t$  — динамический коэффициент турбулентной вязкости; длина пути смешения — скалярная функция своих аргументов и задается у разных авторов различными формулами.

Связь с физическими контравариантными компонентами скорости осуществляется по формулам

$$v^{*1} = v^1 \sqrt{g_{11}}, \quad v^{*2} = v^2 \sqrt{g_{22}}, \quad v^{*3} = v^3$$

При преобразовании уравнений (1) к безразмерному виду в качестве масштабов длины и скорости использовались радиус цилиндра  $R$  и скорость невозмущенного потока  $U_\infty$ . Уравнения пространственного турбулентного пограничного слоя и граничные условия задачи с помощью

замены переменных из работы [5] приводились к виду, удобному для численного интегрирования. В работе использовался семиточечный шаблон неявной схемы второго порядка точности по всем координатным направлениям. Расстояние от острой кромки пластины до оси цилиндра составляло  $4R$ . Число Рейнольдса  $Re_\infty = U_\infty R / \nu$  набегающего потока было  $10^7$ . Течение считалось турбулентным при  $x^+ > 0$ .

Для расчетов турбулентного режима течения применялись следующие алгебраические модели турбулентности (далее нумерация значков на фиг. 1 соответствует номеру используемой модели).

1. Двухслойная модель Себечи — Смита использует в пристеночной области модифицированный множитель Ван Дрифта  $A^*$  для течений с градиентом давления и учитывает влияние малых чисел Рейнольдса  $Re_{\theta_{11}}$  во внешней части пограничного слоя для формулы Клаузера [6]

$$\begin{aligned} v_t &= v_{t1}, \quad v_{t1} \leq v_{t0}; \quad v_t = v_{t0}, \quad v_{t1} > v_{t0} \\ v_{t1} &= l_1^2 |G|, \quad l_1 = \kappa_1 x^3 D_1, \quad D_1 = 1 - \exp(-x^{3+}/A^*) \\ x^{3+} &= \frac{x^3 u_\tau}{\nu}, \quad u_\tau = \left( \frac{|\tau|_w}{\rho} \right)^{1/2}, \quad \frac{|\tau|}{\rho} = (v^1 + v^2) |G| \\ A^* &= \frac{26}{N}, \quad N = (1 - 11,8p^+)^{1/2}, \quad p^+ = -\frac{\nu}{\rho u_\tau^3} \frac{dp}{ds} \\ v_{t0} &= \alpha \int_0^{\delta} (Q_e - Q) dx^3 \gamma_1, \quad \gamma_1 = \left[ 1 + 5,5 \left( \frac{x^3}{\delta} \right)^6 \right]^{-1} \\ Q &= |V|, \quad V = (v^1, v^2), \quad \tau = (\tau^1, \tau^2) \\ \alpha &= 0,0168, \quad Re_{\theta_{11}} \geq 5000; \quad \alpha = 0,0168 \frac{1,55}{1 + \Pi}, \quad 425 < Re_{\theta_{11}} < 5000 \\ \Pi &= 0,55 [1 - \exp(-0,243\chi^{1/2} - 0,298\chi)], \quad \chi = \frac{Re_{\theta_{11}}}{425} - 1 \end{aligned}$$

$$Re_{\theta_{11}} = \frac{\theta_{11} v_e^4}{\nu}, \quad \theta_{11} = \int_0^{\delta} \frac{v^1}{v_e^4} \left( 1 - \frac{v^1}{v_e^4} \right) dx^3$$

Здесь и далее для принятых в теории турбулентности величин использованы одинаковые буквенные обозначения:  $l_1$  — соответствует длине пути смещения;  $D_1$  — демпфирующий множитель Ван Дрифта, учитывающий влияние близости стенки и градиента давления;  $u_\tau$  — динамическая скорость, определенная параметрами потока на стенке;  $|\tau|_w$  — полное трение на стенке;  $p^+$  — безразмерный параметр градиента давления;  $V$  — вектор скорости в пограничном слое, параллельный стенке;  $G$  — вектор градиента скорости в пограничном слое;  $s$  — координата, отсчитываемая вдоль линии тока внешнего невязкого течения;  $\delta$  — толщина пограничного слоя, определенная координатой  $x^3$ , при которой скорость  $v^1$  отличалась бы на 0,5% от скорости  $v_e^4$  внешнего невязкого течения;  $\gamma_1$  — коэффициент перемежаемости Клебанова, характеризующий перемежаемость вблизи границы пограничного слоя;  $\theta_{11}$  — интегральная толщина потери импульса профиля скорости основного течения;  $\kappa_1 = 0,41$  — эмпирическая константа Кармана. Модуль вектора  $S$ , параллельного стенке, с двумя составляющими  $S^1, S^2$  находится обычным образом

$$|S| = [(S^1)^2 g_{11} + 2S^1 S^2 g_{12} + (S^2)^2 g_{22}]^{1/2}$$

Переход от формулы для  $v_{t1}$  к  $v_{t0}$  определяется из условия непрерывности вихревой вязкости  $v_t$  как функции переменной  $x^3$ .

II. Однослойная модель турбулентности работы [7]. Изменение внесено в показатель демпфирующего множителя  $D_2$ , где характерной скоростью является не динамическая скорость на стенке, а локальная динамическая скорость  $u_{\tau}^*$ , определенная значениями параметров в потоке. В качестве характерного масштаба длины взята длина пути смещения  $l_2$ , которая дается простым аналитическим выражением

$$v_t = l_2^2 D_2^2 |G|, \quad l_2 = L_1 \delta \operatorname{th} \left( \frac{\kappa_1 x^3}{L_1 \delta} \right)$$

$$D_2 = 1 - \exp \left( - \frac{l_2 u_{\tau}^*}{\kappa_1 \nu A^+} \right), \quad u_{\tau}^* = \left( \frac{|\tau|}{\rho} \right)^{1/2}, \quad A^+ = 26$$

Здесь  $L_1 = 0,085$  — асимптотическое значение относительной длины пути смещения  $l_2/\delta$  в случае больших величин  $x^3$ .

III. В основе этой модели лежит формула длины пути смещения из работы [7]. В демпфирующий множитель Вап Дриста введена поправка Себечи [6] на влияние градиента давления. Пример расчета с использованием этой модели дается в статье Мюллера из [1]

$$v_t = l_2^2 D_1^2 |G|$$

IV. Модель Болдуина — Ломакса [8] имеет двухслойную структуру. Отличие ее от модели I заключается в том, что вместо формулы Клаузера для внешней области использовано соотношение, которое не требует задания толщины пограничного слоя и скорости на его внешней границе. Это позволяет исключить источник погрешности при расчете вихревой вязкости во внешней части пограничного слоя

$$v_{t1} = l_1^2 |G|, \quad l_1 = \kappa_2 x^3 D_1$$

$$v_{t0} = \alpha c_{cp} F_w \gamma_2, \quad F_w = x_{\max}^3 F_{\max}$$

$$\gamma_2 = \left[ 1 + 5,5 \left( \frac{c_h x^3}{x_{\max}^3} \right)^6 \right]^{-1}, \quad F = x^3 D_1 |G|$$

Здесь  $F(x^3)$  — функция для определения масштаба длины  $x_{\max}^3$  и масштаба скорости  $F_{\max}$  во внешней части пограничного слоя;  $F_{\max}$  — максимум функции  $F$ ;  $x_{\max}^3$  — значение  $x^3$ , при котором достигается величина  $F_{\max}$ ;  $\kappa_2 = 0,4$  — константа Кармана;  $\alpha = 0,0168$  — коэффициент Клаузера;  $c_{cp} = 1,6$  — дополнительный эмпирический коэффициент;  $c_h = 0,3$  и  $\gamma_2$  — константа и коэффициент перемежаемости Клебанова. Отметим, что для оригинальной модели Болдуина — Ломакса в выражение для функции  $F$  входит модуль завихренности, который в приближении пограничного слоя совпадает с модулем градиента скорости  $|G|$ . При вычислении вихревой вязкости переход от формул для внутренней области к формулам для внешней области осуществляется аналогично модели I.

Следует подчеркнуть, что, согласно алгебраическим моделям турбулентности I—IV, эффективный коэффициент переноса определяется формулой  $v_{\text{eff}} = \nu + v_t$ .

V. Модель взята из работы [9]. Эффективный кинематический коэффициент вязкости  $v_{\text{eff}}$  представляется суперпозицией коэффициентов молекулярной и турбулентной вязкости

$$v_{\text{eff}} = k_1 \nu + k_2 v_t, \quad k_1 = \left[ 1 + \frac{\operatorname{Re}_{\tau}^2}{\operatorname{Re}_{\tau}^{*2}} \right]^{-1}, \quad k_2 = \operatorname{Re}_{\tau}^2 \left[ \operatorname{Re}_{\tau}^{*2} \left( 1 + \frac{\operatorname{Re}_{\tau}^2}{\operatorname{Re}_{\tau}^{*2}} \right) \right]^{-1}$$

$$\text{Re}_\tau = \frac{l_s(|\tau|/\rho)^{1/2}}{\nu}, \quad \text{Re}_* = \text{Re}_*^\circ [1 + a_1 b_1 p^*]^{-1}$$

$$p^* = \frac{\nu}{\rho u_\tau^3} \frac{dp}{ds}, \quad \frac{|\tau|}{\rho} = \nu_{\text{eff}} |\mathbf{G}|, \quad a_1 = 5,15, \quad b_1 = 5,86$$

$$\text{Re}_*^\circ = \text{Re}_*^\infty, \quad a < 1,57; \quad \text{Re}_*^\circ = 10 + 3(a-4) + b_0(a-a_0)^2, \quad 1,57 < a < a_0$$

$$\text{Re}_*^\circ = 10 + 3(a-4), \quad a_0 < a < 4; \quad \text{Re}_*^\circ = 10, \quad a \geq 4$$

$$\text{Re}_*^\infty = 154, \quad a_0 = 3,2, \quad b_0 = 57, \quad a = 1 \text{ г Re}_{\theta_{11}}$$

Конечный результат для  $\nu_{\text{eff}}$  получается в форме соотношения, справедливого поперек всего пограничного слоя

$$\nu_{\text{eff}} = \nu \Phi^*, \quad \Phi^* = \frac{\text{Re}_A^2 - \text{Re}_*^2 + [(\text{Re}_A^2 - \text{Re}_*^2)^2 + 4 \text{Re}_*^2 \text{Re}_A]^{1/2}}{2 \text{Re}_A}$$

$$\text{Re}_A = \frac{l_s^2 |\mathbf{G}|}{\nu}, \quad l_s = L_2 \delta \left[ 1 - \exp\left(-\frac{2\kappa_2 x^3}{L_2 \delta}\right) \right] \left[ 1 + \exp\left(-0,75 \frac{2\kappa_2 x^3}{L_2 \delta}\right) \right]^{-1}$$

Здесь  $\text{Re}_\tau$ ,  $\text{Re}_A$  — локальные числа Рейнольдса;  $\text{Re}_*^\circ$  — локальное критическое число Рейнольдса, определяющее местоположение границы перехода от ламинарного режима течения к турбулентному;  $\text{Re}_*$  — локальное критическое число Рейнольдса, которое характеризует толщину вязкого подслоя и зависит от параметра градиента давления;  $p^*$  — безразмерный параметр градиента давления;  $L_2 = 0,1$  — значение относительной длины пути смещения вблизи внешней границы пограничного слоя.

Ниже приводится сравнение результатов расчета основных параметров пограничного слоя, полученных на основе указанных алгебраических моделей вихревой вязкости. Используются следующие обозначения безразмерных величин:

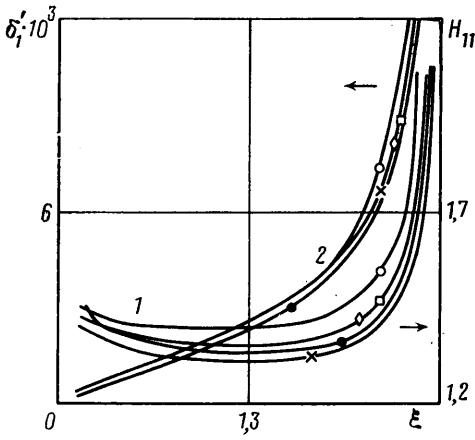
$$\xi = \frac{x^1}{R}, \quad \eta = \frac{x^2}{R}, \quad \zeta = \frac{x^3}{x^1} (\text{Re}_{x1})^{1/2}, \quad \text{Re}_{x1} = \frac{x^1 \nu_e^{-1}}{\nu}$$

$$u = \frac{\nu^{*1}}{U_\infty}, \quad w = \frac{\nu^{*2}}{U_\infty}, \quad \varphi = \frac{\nu^1}{u_\tau}, \quad \beta = x^3 +$$

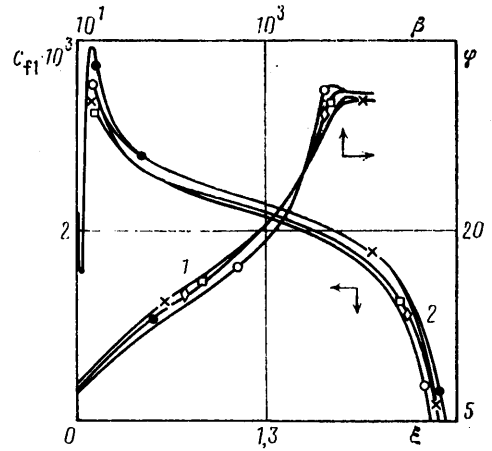
$$c_{f1} = \frac{\tau_w^1}{0,5\rho(\nu_e^1)^2}, \quad c_{f2} = \frac{\tau_w^2}{0,5\rho(\nu_e^1)^2}$$

На фиг. 1 показано сопоставление типичных профилей продольной  $u$  и поперечной  $w$  составляющих вектора скорости в пограничном слое. Выбранное сечение пограничного слоя с координатами  $\xi = 2,4$ ,  $\eta = 0,4$  принадлежит области сильного растекания развитого турбулентного потока. Цифрами 1 и 2 отмечены соответственно величины  $u_e$  и  $w_e$ , соответствующие внешнему невязкому течению. Средняя скорость вторичного течения составляет примерно  $1/3$  от средней скорости основного потока. Незначительное различие для профиля продольной составляющей вектора скорости наблюдается только у модели турбулентности I. Модели II—V дают для профиля скорости  $u$  практически одинаковый результат. Скорость вторичного течения  $w$  имеет слабо выраженный максимум, находящийся вблизи стенки. Расчеты скорости  $w$  показывают, что по всем моделям результаты попадают на одну кривую.

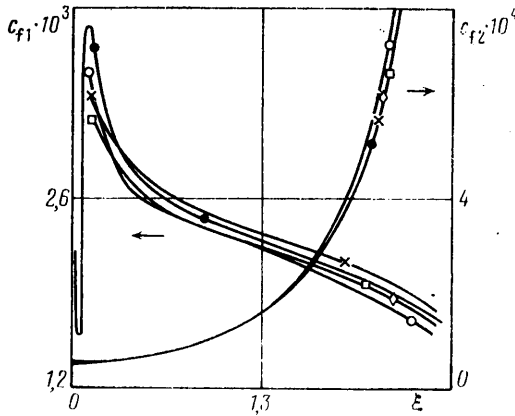
На фиг. 2 для того же сечения пограничного слоя приводятся профили углов скоса вектора скорости  $\gamma_v$  (обозначены цифрой 1) и вектора градиента скорости  $\gamma_G$  (цифра 2), которые отсчитываются от направления линии тока внешнего невязкого течения в рассматриваемом поперечном сечении



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

пограничного слоя. Стрелка вверх показывает асимптотическое значение угла скоса  $\gamma_G$ , которое соответствует внешней границе пограничного слоя. Расчеты дают монотонное возрастание углов скоса при приближении к стенке. Величина максимального угла скоса потока у стенки для всех моделей варьируется от 19 до 24°. Модель I завышает значения угла направления потока, а модель IV незначительно занижает величину  $\gamma_V$ . Модель V имеет величину  $\gamma_V$ , близкую к той, что получается в моделях II и III.

Результаты расчета  $\gamma_G$  показывают, что используемая модель I разворачивает вектор  $\mathbf{G}$  у стенки в данном сечении пограничного слоя на больший угол по сравнению с другими моделями. Однако эта же модель реализует более быстрый переход к направлению линии тока невязкого течения во внешней части пограничного слоя. По другим моделям различие опять наблюдается около поверхности пластины.

Изменение интегральных характеристик турбулентного пограничного слоя в плоскости симметрии дается на фиг. 3. Здесь показаны следующие величины:  $H_{11}$  — формпараметр (кривые 1), равный отношению толщины вытеснения основного потока  $\delta_1$  к толщине потери импульса  $\theta_{11}$  для профиля продольной составляющей вектора скорости, и толщина вытеснения

$\delta_1'$  (кривые 2). Интегральная толщина  $\delta_1$  определяется следующей формулой:

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left( 1 - \frac{v^4}{v_e^4} \right) dx^3, \quad \delta_1' = \frac{\delta_1}{R}$$

Поведение величин  $H_{11}$  и  $\delta_1$  характерно для плоского течения перед отрывом.

На фиг. 4 цифрой 1 отмечены профили скорости основного течения, построенные в полулогарифмических координатах закона стенки  $\varphi$ ,  $\beta$ . Взято то же самое сечение пограничного слоя. Наблюдается небольшое расхождение кривых на длинном логарифмическом участке и значительный разброс в зоне следа. Результаты расчетов профиля скорости в области логарифмического закона стенки по моделям II, III, V располагаются между точками кривых моделей I и IV. Укажем на совпадение кривых у двух моделей IV и V во внешней части пограничного слоя, где важную роль играют многие параметры внешнего течения. Сравнение в координатах подобия результатов расчетов профилей скорости основного течения для других сечений пограничного слоя показывает, что все упрощенные алгебраические модели хорошо согласуются между собой.

Согласно расчетам в плоскости симметрии на фиг. 4 (кривые 2), локальный коэффициент поверхностного трения  $c_{f1}$  по продольной координате  $\xi$  убывает до нуля при перемещении от края пластины в область торможения внешнего потока. Расчеты по моделям I—III дают достаточно близкие результаты в области выше по потоку от точки отрыва. Незначительное различие наблюдается у модели I, которая приводит к более раннему предсказанию отрыва. Во всех случаях расчет течения начинался от острой кромки пластины, где формировался ламинарный профиль скорости. Ламинарную, переходную и турбулентную области решения системы уравнений пограничного слоя удастся проследить на модели турбулентности V для коэффициента трения  $c_{f1}$ . Видно, что непосредственно у передней кромки пластины располагается узкая область перехода, где ламинарный режим течения перестраивается в турбулентный. Величина коэффициента трения  $c_{f1}$  резко возрастает в точке перехода и, достигнув максимума в точке  $\xi \approx 0,1$ , начинает снижаться. Переход моделируется для локальных чисел Рейнольдса  $2,8 \cdot 10^5 \leq \text{Re}_{x1} \leq 9,3 \cdot 10^5$ . Рассчитанные с помощью моделей турбулентности IV и V распределения  $c_{f1}$  свидетельствуют о завышении значений коэффициента трения. В то же время результаты этих двух моделей в области перед отрывом прекрасно совпадают.

На фиг. 5 сравниваются распределения двух компонент трения на стенке, рассчитанных вне плоскости симметрии. Здесь показаны изменения локальных коэффициентов поверхностного трения  $c_{f1}$  (кривые 1) и  $c_{f2}$  (кривые 2) в зависимости от координаты  $\xi$  при  $\eta = 0,4$ . Появление второго течения, вызванного полем давления, не меняет характерного поведения коэффициента поверхностного трения  $c_{f1}$  в плоскости  $\eta = 0,4$ . Коэффициент трения  $c_{f1}$  является убывающей функцией координаты  $\xi$ . Кривые зависимости  $c_{f1}(\xi)$ , отвечающие разным алгебраическим моделям турбулентности, вне плоскости симметрии повторяют порядок их расположения при  $\eta = 0$ , а различие между точками кривых становится менее заметным. Расчеты локального коэффициента трения  $c_{f2}$  по продольной координате у всех моделей приводят к достаточно близкому предсказанию его величины, которая на порядок меньше величины  $c_{f1}$ .

Проведенный анализ результатов свидетельствует о продуктивном использовании всех пяти алгебраических моделей вихревой вязкости. Расчеты показывают, что модели II, III имеют близкие результаты для основных характеристик пограничного слоя. Модели IV и V — различной

структуры, тем не менее определяют параметры возникшего турбулентного течения одинаковым образом. Можно выделить модели II, III и V, в которых дается удобное определение  $v_t$  единым выражением, справедливым поперек всего пограничного слоя, и где соответственно упрощается логика вычислений, поскольку в противном случае необходимо учитывать в процессе итераций монотонное поведение  $v_t$  вблизи стенки, чтобы осуществить непрерывный переход от одной формулы к другой. Наконец, модели турбулентности, использующие гипотезу длины пути смешения, хорошо описывают течения, для которых предполагается, что турбулентность находится в состоянии локального равновесия, т. е. вне области отрыва.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трехмерные турбулентные пограничные слои. М.: Мир, 1985. 383 с.
2. *Formery M., Détery J.* Méthode aux différences finies pour le calcul en mode inverse de la couche limite turbulente tridimensionnelle // *Rech. Aérosp.* 1981. № 5. P. 303–313.
3. *Хиршель Э. Х., Кордулла В.* Сдвиговое течение сжимаемой жидкости. Численный расчет пограничного слоя. М.: Мир, 1987. 253 с.
4. *Кочин Н. Е., Кибель Н. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.
5. *Шевелев Ю. Д.* Пространственные задачи вычислительной аэрогидродинамики. М.: Наука, 1986. 367 с.
6. *Cebeci T., Smith A. M. O.* Analysis of turbulent boundary layers. N. Y.: Acad. press, 1974. P. 404.
7. *Michel R., Quémarc C., Cousteix J.* Solutions de similitude pour les couches limites turbulentes avec gradient de pression en fluide compressible // *Rech. Aérosp.* 1971. № 6. P. 323–333.
8. *Baldwin B. S., Lomax H.* Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows // *AIAA Pap.* 1978. № 257. P. 8.
9. *Алексин В. А., Совершинный В. Д.* Численный расчет турбулентного пограничного слоя с резким изменением граничных условий // *Турбулентные течения.* М.: Наука, 1977. С. 55–63.

Москва

Поступила в редакцию  
11.XII.1990