

УДК 532.5.013.4:534.1

© 1991 г.

**Д. В. ЛЮБИМОВ, А. А. ЧЕРЕПАНОВ**

## **ДИНАМИЧЕСКАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ РЭЛЕЕВСКОЙ КАПИЛЛЯРНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ**

Рассматривается влияние высокочастотных вибраций на устойчивость цилиндрической поверхности раздела жидкостей. В отсутствие внешних воздействий такая поверхность неустойчива, если длина жидкого цилиндра превышает длину нормального сечения границы раздела. Показано, что вибрации, поляризованные по кругу в плоскости нормального сечения, могут подавить развитие неустойчивости при сколь угодно большой длине жидкого цилиндра. Исследовано влияние соотношения плотностей жидкостей и размеров жесткой внешней оболочки на устойчивость системы. Показано, что вибрации могут стабилизировать цилиндрическую поверхность раздела, только если радиус оболочки не слишком велик по сравнению с радиусом жидкого цилиндра. Критическое значение отношения радиусов примерно равно 1,58 и не зависит от отношения плотностей жидкостей.

Пусть сосуд, содержащий несмешивающиеся несжимаемые жидкости, совершает вибрационно-поступательное движение с круговой поляризацией, т. е. каждая точка сосуда движется по закону

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + i\mathbf{a} \cos \omega t + j\mathbf{a} \sin \omega t \quad (1)$$

где  $\mathbf{R}_0$  — координаты точки сосуда в собственной системе отсчета, а ортогональные единичные векторы  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  и амплитуда вибраций  $\mathbf{a}$  не зависят от  $t$ .

Уравнения движения каждой жидкости в системе отсчета, в которой сосуд неподвижен, принимают в этом случае вид

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + a \omega^2 (\mathbf{i} \cos \omega t + \mathbf{j} \sin \omega t), \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

Хотя каждая точка сосуда движется по круговой траектории, в (2) не появляется сила Кориолиса, так как связанная с сосудом система координат не меняет своей ориентации.

Уравнения (2) необходимо дополнить граничными условиями. На твердой стенке должны быть выполнены условия прилипания, а на поверхности раздела жидкостей, описываемой уравнением  $F(\mathbf{r}, t) = 0$ , — условия непрерывности скорости, баланса напряжений и кинематическое условие

$$[\mathbf{v}] = 0, \quad [\sigma] \mathbf{n} - [p] \mathbf{n} = \alpha \mathbf{n} \text{ div } \mathbf{n} \\ \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla F = 0 \quad (3)$$

Здесь  $\sigma$  — тензор вязких напряжений,  $\alpha$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $\mathbf{n} = \nabla F / |\nabla F|$  — вектор нормали к поверхности раздела, квадратными скобками обозначена величина скачка соответствующей переменной на поверхности раздела.

При достаточно высоких частотах вибраций ( $\omega \gg v/L^2$ ,  $v$  — кинематическая вязкость,  $L$  — характерный размер) и малых амплитудах ( $a \ll L \langle \rho \rangle / \delta \rho$ ,  $\langle \rho \rangle$  — средняя плотность,  $\delta \rho$  — разность плотностей жидкостей) мож-

но эффективно разделить движение на осредненное и пульсационное и получить для них замкнутую систему уравнений и граничных условий. Техника осреднения аналогична описанной в [1], поэтому приведем лишь результат.

С точностью до малых поправок поле скорости может быть представлено в виде

$$\mathbf{v} = a\omega (\mathbf{V}_c \sin \omega t - \mathbf{V}_s \cos \omega t) + \mathbf{u} \quad (4)$$

где осредненная скорость  $\mathbf{u}$  и амплитуды пульсационных скоростей  $\mathbf{V}_c$ ,  $\mathbf{V}_s$  — «медленные» функции времени, т. е. характерные времена их изменения велики по сравнению с периодом вибраций. Поля  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{V}_c$ ,  $\mathbf{V}_s$  удовлетворяют уравнениям со следующими условиями на твердой стенке:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = - \frac{1}{\rho} \nabla \Pi + \nu \Delta \mathbf{u}$$

$$\text{rot } \mathbf{V}_c = 0, \quad \text{rot } \mathbf{V}_s = 0$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0, \quad \text{div } \mathbf{V}_c = 0, \quad \text{div } \mathbf{V}_s = 0$$

$$\Pi = p + \frac{1}{4} \rho b^2 (V_c^2 + V_s^2), \quad b = a\omega \quad (5)$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad V_{cn} = 0, \quad V_{sn} = 0 \quad (6)$$

Для амплитуд пульсаций скорости ставятся условия непротекания, а не прилипания, поскольку в используемом приближении приходится пренебрегать вязким скин-слоем.

На границе раздела выполняются условия

$$[\rho \mathbf{W}_c] \times \mathbf{n} = 0, \quad [\rho \mathbf{W}_s] \times \mathbf{n} = 0$$

$$[\mathbf{u}] = 0, \quad [\mathbf{W}_c] \mathbf{n} = 0, \quad [\mathbf{W}_s] \mathbf{n} = 0$$

$$-[\sigma] \mathbf{n} + \frac{b^2}{4} (\mathbf{W}_c^{(1)} \mathbf{W}_c^{(2)} + \mathbf{W}_s^{(1)} \mathbf{W}_s^{(2)}) [\rho] \mathbf{n} + [\Pi] \mathbf{n} + \alpha \mathbf{n} \text{ div } \mathbf{n} = 0 \quad (7)$$

Здесь использованы обозначения  $\mathbf{W}_c = \mathbf{V}_c + \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{W}_s = \mathbf{V}_s + \mathbf{j}$ , тензор вязких напряжений  $\sigma$  вычисляется по осредненному полю скорости, верхний индекс в скобках различает жидкости.

Применим полученные уравнения и граничные условия к задаче об устойчивости цилиндрического столба жидкости.

Пусть столб жидкости, представляющий собой круговой цилиндр радиуса  $R_1$ , окружен слоем жидкости с другой плотностью. Вся система помещена в твердую цилиндрическую оболочку радиуса  $R_2$ , коаксиальную с внутренним жидким цилиндром. В отсутствие поля тяжести и других внешних воздействий такое состояние с цилиндрической поверхностью раздела является равновесным. Это равновесие неустойчиво относительно осесимметричных возмущений, если длина жидкого цилиндра достаточно велика (рэлеевская капиллярная неустойчивость). Если внешняя жидкость имеет плотность большую, чем внутренняя, развитие неустойчивости можно предотвратить, приведя систему во вращение вокруг собственной оси. При обратном соотношении плотностей вращение приводит к дополнительной дестабилизации, поскольку к капиллярной неустойчивости добавляется неустойчивость Рэлея — Тейлора в поле центробежных сил. В [2] рассмотрена устойчивость описываемой системы при линейных вибрациях высокой частоты вдоль оси симметрии системы. В этом случае возникает еще один дестабилизирующий механизм, связанный в конечном счете с неустойчивостью Кельвина — Гельмгольца.

Обсудим теперь влияние на устойчивость системы вибраций круговой поляризации (1), причем орты  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  ортогональны оси цилиндрической обо-

лочки. Будем называть квазиравновесием состояние, в котором осредненное движение отсутствует, в то время как пульсационные компоненты скорости отличны от нуля.

Сформулируем задачу о квазиравновесии, полагая в (5)–(7)  $\mathbf{u}=0$  и  $\partial/\partial t=0$ . Поля  $\mathbf{W}$  в каждой из жидкостей удовлетворяют уравнениям со следующими условиями на твердой стенке и границе раздела:

$$\operatorname{rot} \mathbf{W}=0, \quad \operatorname{div} \mathbf{W}=0 \quad (8)$$

$$W_{cr}^{(2)} = \cos \beta, \quad W_{sr}^{(2)} = \sin \beta \quad (9)$$

$$r=1+\zeta(z, \beta)$$

$$W_{cn}^{(1)} = W_{cn}^{(2)}, \quad W_{sn}^{(1)} = W_{sn}^{(2)}$$

$$W_{ct}^{(1)} = \rho W_{ct}^{(2)}, \quad W_{st}^{(1)} = \rho W_{st}^{(2)}$$

$$B(\rho-1) [\mathbf{W}_c^{(1)} \mathbf{W}_c^{(2)} + \mathbf{W}_s^{(1)} \mathbf{W}_s^{(2)}] + \operatorname{div} \mathbf{n}=0 \quad (10)$$

Здесь индексом 1 отмечены величины, относящиеся к внутренней, а индексом 2 – к внешней жидкости, использована цилиндрическая система координат  $z, r, \beta$ , в качестве единицы длины выбрана величина  $R_1$  и введены обозначения  $\rho=\rho_2/\rho_1$  – относительная плотность наружной жидкости,  $B=b^2 \rho_1 R_1/4\alpha$  – вибрационный параметр.

Задача (8)–(10) допускает решение с цилиндрической поверхностью раздела  $\zeta=0$ , при этом отличные от нуля компоненты полей  $\mathbf{W}$  имеют вид

$$W_{sr}^{(1)} = (q+1)\lambda \sin \beta, \quad W_{sr}^{(2)} = \left(1 + \frac{q}{r^2}\right) \lambda \sin \beta$$

$$W_{cr}^{(1)} = (q+1)\lambda \cos \beta, \quad W_{cr}^{(2)} = \left(1 + \frac{q}{r^2}\right) \lambda \cos \beta$$

$$W_{s\beta}^{(1)} = (q+1)\lambda \cos \beta, \quad W_{s\beta}^{(2)} = \left(1 - \frac{q}{r^2}\right) \lambda \cos \beta$$

$$W_{c\beta}^{(1)} = -(q+1)\lambda \sin \beta, \quad W_{c\beta}^{(2)} = -\left(1 - \frac{q}{r^2}\right) \lambda \sin \beta \quad (11)$$

$$q = \frac{\rho-1}{\rho+1}, \quad R = \frac{R_2}{R_1}, \quad \lambda = \frac{R^2}{q+R^2}$$

Рассмотрим теперь задачу о малых возмущениях решения (11), не выходящих из класса квазиравновесных решений. Вводя потенциалы  $\varphi, \psi$  для возмущений полей  $\mathbf{W}_s, \mathbf{W}_c$ , линеаризуя задачу (8)–(10) около решения (11) и снося граничные условия на невозмущенную поверхность раздела, получим, что  $\varphi$  и  $\psi$  удовлетворяют уравнению Лапласа, с граничными условиями  $r=R$

$$\varphi_r^{(2)} = \psi_r^{(2)} = 0 \quad (12)$$

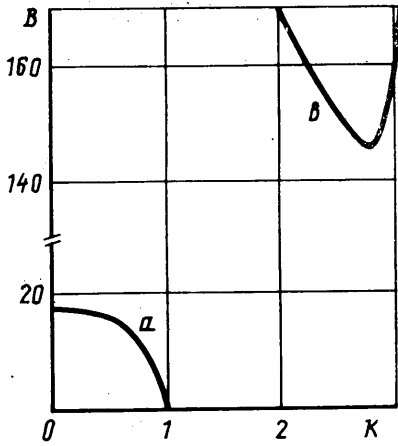
и  $r=1+\zeta(z, \beta)$

$$\varphi_r^{(1)} - \varphi_r^{(2)} = -2q\lambda(\zeta \sin \beta)_\beta, \quad \psi_r^{(1)} - \psi_r^{(2)} = 2q\lambda(\zeta \cos \beta)_\beta$$

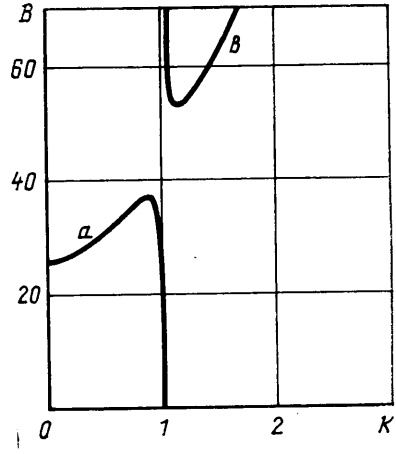
$$\varphi^{(1)} - \rho\varphi^{(2)} = 2\rho q\lambda\zeta \cos \beta, \quad \psi^{(1)} - \rho\psi^{(2)} = 2\rho q\lambda\zeta \sin \beta$$

$$2B\rho q\lambda \left[ \cos \beta \left( \varphi_r^{(1)} + \frac{1}{\rho} \psi_\beta^{(1)} \right) + \sin \beta \left( \psi_r^{(1)} - \frac{1}{\rho} \varphi_\beta^{(1)} \right) \right] + [\zeta + \zeta_{s\beta} + \zeta_{zz}] = 0 \quad (13)$$

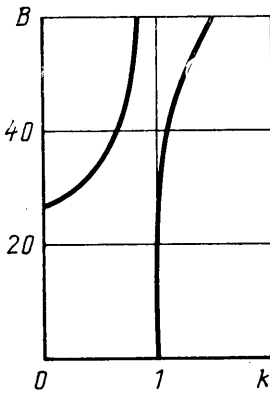
где нижний индекс означает дифференцирование по соответствующей переменной.



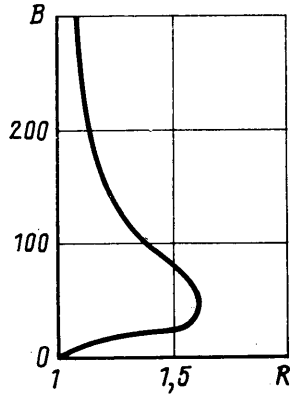
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Условия существования нетривиального решения задачи (12)–(13) определяют бифуркационную поверхность в пространстве параметров, которая является одновременно поверхностью нейтральной устойчивости.

Для периодических по угловой переменной  $\beta$  и координате  $z$  решений с азимутальным числом  $m$  и волновым числом  $k$  уравнение этой поверхности имеет вид

$$2B\rho^2 q^2 \lambda^2 \left[ kI_m(Q_{m+1} + Q_{m-1}) - \frac{(\rho-1)(m+1)}{\rho} I_{m+1}Q_{m+1} + \frac{(\rho-1)(m-1)}{\rho} I_{m-1}Q_{m-1} \right] - 1 + k^2 + m^2 = 0 \quad (m \geq 1) \quad (14)$$

$$Q_{m+1} = \frac{I_m + \vartheta_{m\pm 1} K_m}{(\rho-1) I'_{m\pm 1} (I_{m\pm 1} - \vartheta_{m\pm 1} K_{m\pm 1}) - 1/K\vartheta_{m\pm 1}}, \quad \vartheta_m = \frac{I'_m(KR)}{K'_m(KR)}$$

где  $I_m(k)$ ,  $K_m(k)$  – модифицированные функции Бесселя. Для осесимметричных возмущений (с  $m=0$ ) вместо (14) имеем

$$4B\rho^2 q^2 \lambda^2 \frac{(I_0 + \vartheta_1 K_0)(\rho K I_0 - (\rho-1)I_1)}{Q_1} - 1 + k^2 = 0 \quad (15)$$

В качестве примера на фиг. 1–3 приведены определяемые формулой (15) нейтральные кривые  $B(k)$  для  $\rho=0,8$  и различных значений  $R$  (1,3; 1,5; 1,6 соответственно), штриховкой выделены области неустойчивости. При  $B=0$  цилиндрическая поверхность раздела неустойчива по отношению к длинноволновым возмущениям с  $k < 1$ . Вибрации подавляют длинноволновые возмущения, и выше кривой  $a$  (фиг. 1) малые возмущения затухают. С другой стороны, вибрации приводят к появлению нового типа неустойчивости (кривая  $b$ ) — образованию волнового рельефа. При малых значениях отношения радиусов оболочки и поверхности раздела существует интервал значений вибрационного параметра  $B$ , в котором подавлены длинноволновые возмущения и еще не возбуждаются коротковолновые. Этот интервал сужается по мере роста  $R$  (фиг. 2) и при  $R$ , превышающем критическое значение  $R_* \approx 1,578$ , области неустойчивости перекрываются и стабилизация цилиндрической поверхности раздела становится невозможной. Заметим, что  $R_*$  не зависит от отношения плотностей. На фиг. 4 приведена зависимость интервала устойчивости от отношения радиусов  $R$  для  $\rho=0,8$ . Верхняя ветвь графика соответствует минимумам  $B(k)$  на кривых  $b$ , нижняя — максимумам на кривых  $a$ .

Расчеты показывают, что несимметричные возмущения ( $m=0$ ) менее опасны и не влияют на общую картину устойчивости.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Любимов Д. В., Черепанов А. А. О возникновении стационарного рельефа на поверхности раздела жидкостей в вибрационном поле // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 6. С. 8–13.
2. Брисман В. А., Любимов Д. В., Черепанов А. А. Устойчивость поверхности раздела вращающихся жидкостей в осевом вибрационном поле // Численное и экспериментальное моделирование гидродинамических явлений в невесомости. Свердловск: УрО АН СССР, 1988. С. 18–26.

Пермь

Поступила в редакцию  
7.II.1991