МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1991

УДК 532.526.2

С. Т. КОСТИЧ

МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ТОНКИХ ТЕЛАХ ВРАЩЕНИЯ

Рассматривается проблема ламинарного и стационарного пограничного слоя несжимаемой жидкости на удлиненных, тонких телах вращения при осесимметричном обтекании в тех случаях, когда не следует пренебрегать отношением толщины пограничного слоя к радиусу поперечного сечения тела. С этой целью выполнена универсализация уравнения пограничного слоя на тонких телах вращения на основании метода Лойцянского.

1. Универсализация уравнения пограничного слоя на тонких телах вращения. На основании принятой физической модели основные уравнения для ламинарного стационарного осесимметричного пограничного слоя несжимаемой жидкости при произвольном соотношении толщины пограничного слоя к радиусу поперечного сечения тела имеют вид

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=U\frac{dU}{dx}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(ru)+\frac{\partial}{\partial y}(rv)=0 \tag{1.1}$$

$$r=r_0(x)+y,\qquad u=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad v=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial x}$$
$$y=0,\quad u=v=0;\quad y\to\infty,\quad u\to U(x) \tag{1.2}$$

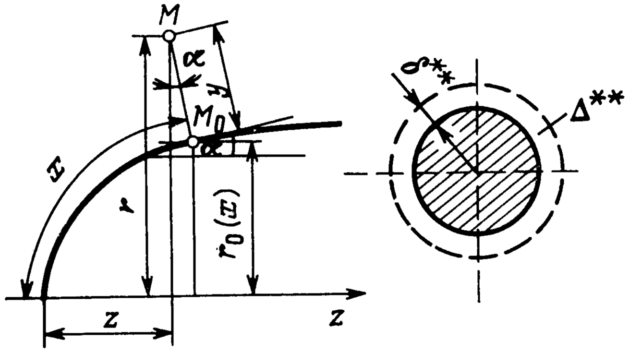
Здесь x — координата, измеренная вдоль контура от точки остановки; y — координата, нормальная, к контуру тела; $u(x, y)$, $v(x, y)$ — составляющие скорости в x- и y-направлениях; $U(x)$ — продольная скорость на внешней границе пограничного слоя; $\psi(x, y)$ — функция тока; $r_0(x)$ — радиус поперечного сечения тела; ν — кинематический коэффициент вязкости (фиг. 1).

Универсализация системы (1.1) будет выполнена на основании метода Лойцянского [1] при условии, что полученное универсальное уравнение для особого случая тонкого длинного цилиндра не может быть приведено к уравнению Керла [2]. Подробное обоснование этого условия приводится в [4]. Уравнение импульса имеет вид [3]

$$\frac{d\Delta^{**}}{dx}+\frac{U'}{U}\Delta^{**}(2+H)=\frac{2\pi r_0}{\rho U^2}\eta_w \tag{1.3}$$

$$\Delta^*=2\pi\int_0^\infty r\left(1-\frac{u}{U}\right)dy,\qquad \Delta^{**}=2\pi\int_0^\infty r\frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy$$

$$H=\frac{\Delta^*}{\Delta^{**}},\qquad \eta_w=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}$$



Фиг. 1

Здесь μ — динамический коэффициент вязкости; ρ — плотность; Δ^*, Δ^{**} — площади вытеснения и потери импульса; η_w — напряжение трения на поверхности тела.

Для дальнейшего рассмотрения вводятся физические величины z и h

$$z=\frac{1}{\nu}\left(\frac{\Delta^{**}}{2\pi r_0}\right)^2, \qquad h=\frac{\Delta^{**}}{\pi r_0^{\,2}} \tag{1.4}$$

Величина z для тонкого тела применялась в [3] и удовлетворяет уравнению импульса (1.3). Величина h представляет отношение площади потери импульса к площади соответствующего поперечного сечения тонкого тела вращения (фиг. 1) и характерна только для тонких тел. Легко показать, что величина h в случае толстого тела стремится к нулю.

При универсализации системы уравнений (1.1) использованы следующие преобразования независимых переменных и безразмерной функции тока Φ:

$$x\equiv x; \qquad \xi=\frac{2\pi r_0 B_0}{\Delta^{**}}\,y\left(1+\frac{y}{2r_0}\right)$$

$$\psi(x,y)=\frac{U\Delta^{**}}{2\pi B_0}\,\Phi[\xi;\ \{f_k\};\ \{g_k\}]$$

где B_0 — нормирующая константа, а члены совокупностей параметров $\{f_k\}$ и $\{g_k\}$ являются функциями от x. В рассматриваемой проблеме в задаче даются две физические величины: $U(x)$ и $r_0(x)$, и по этой причине функция тока Φ будет зависеть и от независимой переменной ξ и от двух совокупностей параметров: $\{f_k\}$ и $\{g_k\}$.

В одной совокупности параметров доминирующим будет изменение величины $U(x)$, а в другой — величины $r_0(x)$. Под выражением «доминирующее изменение» понимается n-я производная физических величин ($n=1, 2, \ldots$), что предполагает в общем случае достаточную дифференцируемость функций $U(x)$ и $r_0(x)$.

После введения выражений для $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в систему уравнений (1.1) и (1.2) получаем

$$\frac{\partial^3\Phi}{\partial\xi^3}+\frac{2}{B_0}\sqrt{\frac{g_1}{f_1}}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}\right)+\frac{F+2f_1}{2B_0^2}\Phi\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}+\frac{f_1}{B_0^2}\left[1-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{B_0^2}\sum_{k=1}^{\infty}\theta_k\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\,\partial f_k}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}\frac{\partial\Phi}{\partial f_k}\right)+$$

$$+\frac{1}{B_0^2}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\,\partial g_k}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}\frac{\partial\Phi}{\partial g_k}\right)$$

$$\xi=0:\quad \Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}=0,\qquad \xi\to\infty:\quad \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\to 1 \tag{1.5}$$

$$F=2\left[B_0\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}\right)_{\xi=0}-f_1(2+H)\right],\qquad f_k=U^{k-1}U^{(k)}Z^k$$

$$g_k=\nu U'U^{k-1}Z^{k+1}\left(\frac{1}{r_0^2}\right)^{(k-1)}$$

$$\theta_k=\left[kF+(k-1)f_1+k\frac{g_2}{g_1}\right]f_k+f_{k+1}$$

$$(1.6)$$

$$\varphi_k=\left[(k+1)F+(k-1)f_1+\frac{f_2}{f_1}+(k+1)\frac{g_2}{g_1}\right]g_k+g_{k+1},\qquad H=\frac{\Delta^{**}}{\pi r_0^2}=2\sqrt{\frac{g_1}{f_1}}$$

Уравнение (1.5) — универсальное уравнение пограничного слоя на удлиненных, тонких телах вращения. Так же как и в [1], здесь должно быть решено дополнительное уравнение первого порядка

$$\frac{dZ}{dx}=\frac{F}{U}+\frac{1}{U}\frac{g_2}{g_1},\qquad Z=Z_0\quad (x=x_0)$$

2. Определение элементов для числового решения и анализ полученных числовых решений универсального уравнения при одно-, двух- и трехпараметрическом приближении. Для решения универсального уравнения (1.5) следует ввести определенные ограничения. Уравнение (1.5) будет численно решаться при условии $f_i=0$ $(i=2,\ldots,k)$. Принимается, что при условии $g_1\neq 0$ и $g_2\neq 0$ не выполняется локализация по g_1, т. е. g_2. Параметры $g_1\neq 0$ и $g_2\neq 0$, а $g_i=0$ при $i=3,\ldots,k$. Приведенные ограничения обеспечивают приведение уравнения общего вида (1.5) к виду, обеспечивающему возможность получения трехпараметрического приближения ($f_1\neq 0$, $g_1\neq 0$, $g_2\neq 0$)

$$\frac{\partial^3\Phi}{\partial\xi^3}+\frac{2}{B_0}\sqrt{\frac{g_1}{f_1}}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}\right)+\frac{F+2f_1}{2B_0^2}\Phi\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}+\frac{f_1}{B_0^2}\left[1-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{B_0^2}\left(F+\frac{g_2}{g_1}\right)f_1\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\,\partial f_1}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}\frac{\partial\Phi}{\partial f_1}\right)+$$

$$+\frac{1}{B_0^2}(2Fg_1+3g_2)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\,\partial g_1}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}\frac{\partial\Phi}{\partial g_1}\right)+$$

$$+\frac{1}{B_0^2}\left(3F+f_1+3\frac{g_2}{g_1}\right)g_2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\,\partial g_2}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}\frac{\partial\Phi}{\partial g_2}\right)$$

$$\xi=0:\quad \Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}=0,\qquad \xi\to\infty:\quad \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\to 1 \tag{2.1}$$

$$B_0=\int_0^\infty \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\left(1-\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)d\xi,\quad F=2\left[B_0\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}\right)_{\xi=0}-f_1(2+H)\right] \tag{2.2}$$

$$H=\frac{1}{B_0}\int_0^\infty\left(1-\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)d\xi,\qquad \varphi=B_0\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}\right)_{\xi=0}$$

По методу конечных разностей уравнение (2.1) сводится к системе линейных уравнений, которые затем решаются так называемым «PASSAGE-METHOD» [4].

Так как на вычислительных машинах используются параметры $f_1, f_2, ...; q_1, q_2, ...,$ то в силу (2.8) уравнение (3.1) имеет сингулярность

$$\lim_{f_1\to 0} L=\lim_{f_1\to 0} 2\sqrt{\frac{g_1}{f_1}}\to\infty\qquad (g_1\neq 0)$$

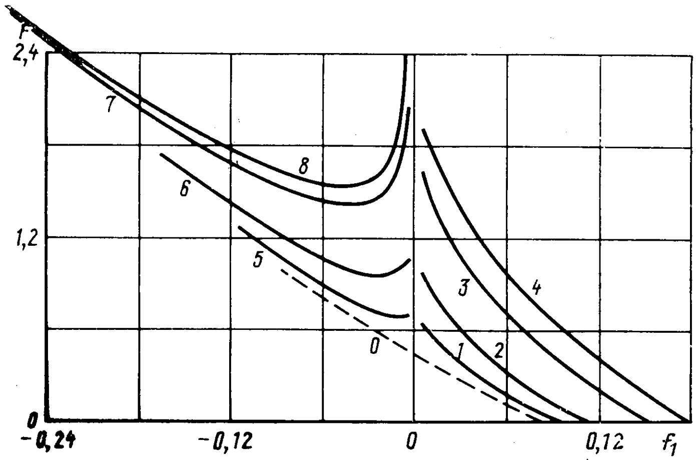
По той причине дается команда компьютеру в качестве начального значения параметра f_1 использовать значение 0,0000 (блазиусово решение для плоской пластинки) для любого значения параметр g_1 и g_2, и следующее значение $f_1=0{,}0050$, для которого характерны физические величины пограничного слоя, вычисленные с большой точностью.

При однопараметрическом приближении ($f_1\neq 0$; $g_1=0$; $g_2=0$) уравнение (3.1) полностью согласовывается с однопараметрическим уравнением Лойцянского [1] для толстого тела. Также согласовываются и численные результаты для характерных величин пограничного слоя с результатами Лойцянского.

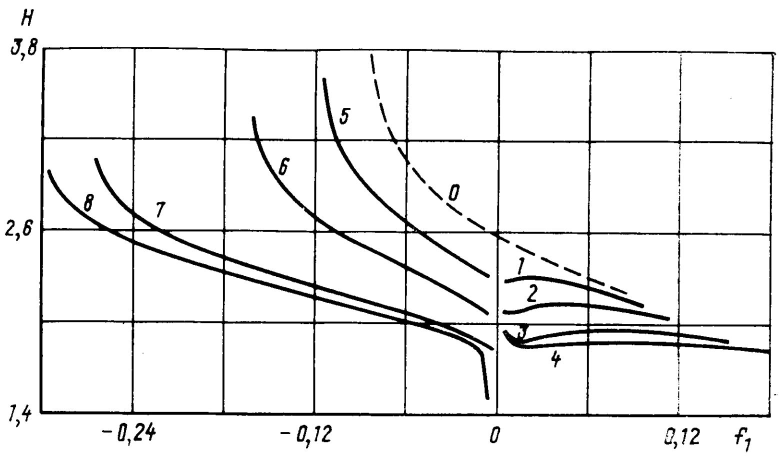
На фиг. 2, 3 и 4 графически показаны числовые результаты характерных величин пограничного слоя для случая двухпараметрического приближения ($f_1\neq 0$; $g_1\neq 0$; $g_2=0$). На фигурах кривые *1–8* соответствуют значениям $g_1=0{,}0001$; 0,001; 0,01; 0,025; −0,0001; −0,001; −0,010; −0,015; кривая 0 соответствует $g_2=0$. Граница параметра g_1 в отрицательной области $g_1=-0{,}0150$, получены на основании поведения первой производной функции тока. Граница для параметра g_1 в положительной области, значения $g_1=+0{,}0250$, получена на основании поведения функции F (фиг. 2). Таким образом, $-0{,}015\leqslant g_1\leqslant 0{,}025$, что благоприятно, так как абсолютные значения параметра g_1 изменяются в небольших границах. В области, где параметры f_1 и g_1 имеют отрицательные значения и где имеется отрыв пограничного слоя, точка отрыва пограничного слоя перемещается значительно ниже по течению (фиг. 4), что согласуется с фактом лучшей сопротивляемости пограничного соля отрыву на тонких телах вращения при увеличении давления ниже по течению, и поэтому можно ожидать, что и точка отрыва пограничного слоя будет смещена вниз по течению. Итак, влияние увеличения поперечной кривизны удлиненных тонких тел вращения на положение точки отрыва является благоприятным [3].

Физическая величина $H=H(f_1, g_1)$ уменьшается при росте параметра при тенденции приближения к постоянной величине (фиг. 3), что приводит к выводу о том, что у очень тонких тел уменьшается соотношение между площадью вытеснения и площадью потери импульса.

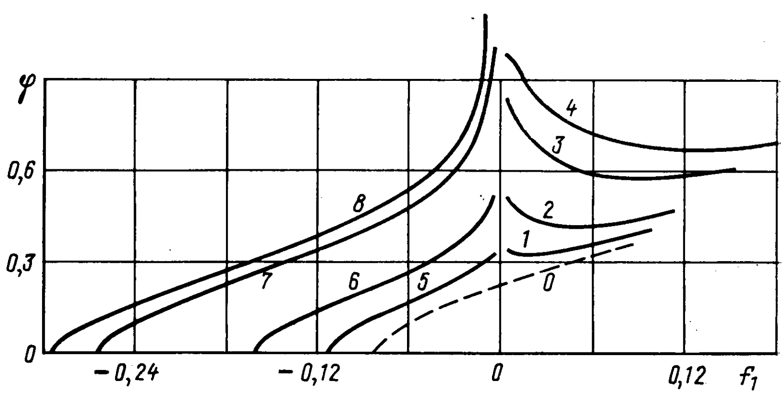
На фиг. 5 графически приведены числовые результаты коэффициента трения $\varphi=\varphi(f_1, g_1, g_2)$ для случая трехпараметрического приближения для значений параметра $g_1=-0{,}01$ и $+0{,}01$, соответствующих исключительно тонкому телу (кривые *1–4* соответствуют $g_1=0{,}1$; $g_2=0$; 0,0001; 0,001; −0,0001; кривые *5–8* – $g_1=-0{,}01$; $g_2=0$; 0,0001; 0,0010; 0,0015).



Фиг. 2

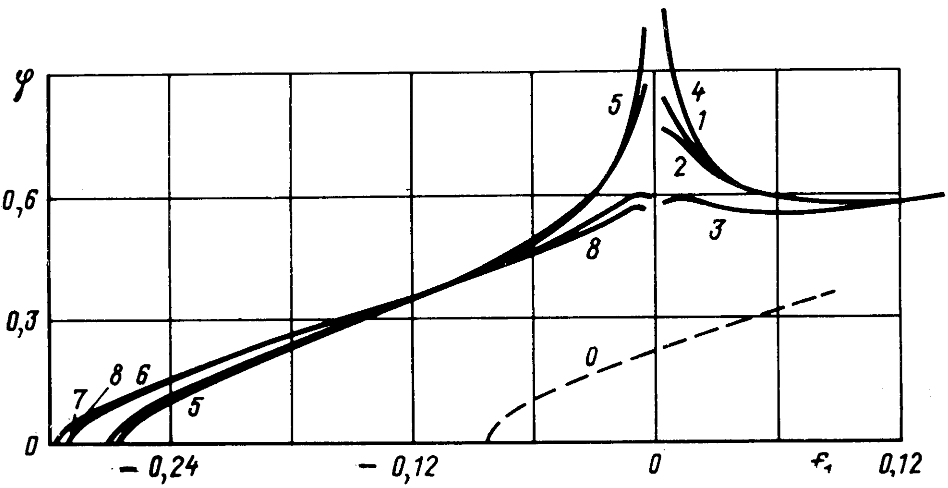


Фиг. 3



Фиг. 4

При сравнении максимальных значений параметра g_1 (от $-0{,}0150$ до $+0{,}0250$) с максимальными значениями параметра g_2 (от $-0{,}0001$ до $+0{,}0015$) видно, что значение $|g_2|$ гораздо меньше $|g_1|$, в связи с чем можно сказать, что сходимость совокупности параметра $\{g_k\}$ удовлетворительна. Тем более что из фиг. 5 видно, что параметр g_2 выполняет не-



Фиг. 5

большую коррекцию двухпараметрического приближения (кривые *1* и *6* на фиг. 5), являющегося главной частью решения универсального уравнения (1.5).

В работе выведено универсальное уравнение, содержащее две совокупности параметров: $\{f_k\}$, в которой доминирует изменение скорости $U(x)$ и $\{g_k\}$, в которой доминирует изменение радиуса поперечного сечения тела $r_0(x)$. Аналогично тому, как это имело место у Лойцянского, и здесь должно быть решено дополнительное дифференциальное уравнение импульса.

Сходимость совокупности параметра $\{g_k\}$ удовлетворительна, так как параметр g_2 выполняет небольшую поправку в двухпараметрическом приближении универсального уравнения.

Из числовых результатов, приведенных в графическом виде в настоящей работе, замечены области определения функций характерных физических величин пограничного слоя. Эти области находятся между толстым телом и тонким длинным цилиндром, обтекаемым с постоянной скоростью. По этой причине во всех вариантах расчета сохранено однопараметрическое решение (приближение) Лойцянского для рассмотрения степени чувствительности влияния параметров g_1 и g_2, характеризующих тонкое тело, на однопараметрическое решение Лойцянского.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
2. *Curle S. N.* Calculation of the axisymmetric boundary layer on a long thin cylinder // Proc. Roy. Soc. London. A. 1980. V. 372. № 1751. P. 555–564.
3. *Schlichting H.* Grenzschicht-Theorie; Karlsruhe; Braun, 1965. 736 s.
4. *Kostić S.* Granični sloj na tankim obrtnim telima. Dokt. disertacija. Beograd, 1985.

Белград (Югославия)

Поступила в редакцию 21.V.1990