

Фиг. 2

согласие с экспериментом по уровню понижения давления перед отрывом и по месторасположению точек отрыва на поверхности круга (см. фиг. 2).

Представление о структуре течения с отрывом дает фиг. 1, построенная на основе результатов расчета третьего варианта ( $M_{02}=2,31$ , режим 5). Здесь толстые линии — скачки уплотнения, тонкие — граничные линии тока соответствующих невязких потоков. Следует отметить, что эта картина течения хорошо согласуется с теневой фотографией обтекания полукруглого уступа, приведенной в [2].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Korst H. H., Tripp W. The pressure on a blunt trailing edge separating two supersonic two-dimensional air streams of different Mach number and stagnation pressure but identical stagnation temperature // Proc. 5th Midwest. Conf. Fluid Mech. Univ., Michigan., Apr. 1-2, 1957. P. 187-199.
2. Sieverding C. H., Stanislas M., Snoek J. The base pressure problem in transonic turbine cascades // ASME. Pap. 1979. № 79-GT-120. 12 p.
3. Тагиров Р. К. Расчет критического перепада давлений на скачке уплотнения, возникающего при отрыве турбулентного пограничного слоя // Изв. АН СССР. ЖЭГ. 1985. № 4. С. 38-45.
4. Herbert M. V., Herd R. J. Boundary-layer separation in supersonic propelling nozzles // Aeronaut. Res. Council. Rep. and Mem. 1964. № 3421. 71 p.

Москва

Поступила в редакцию  
6.IV.1990

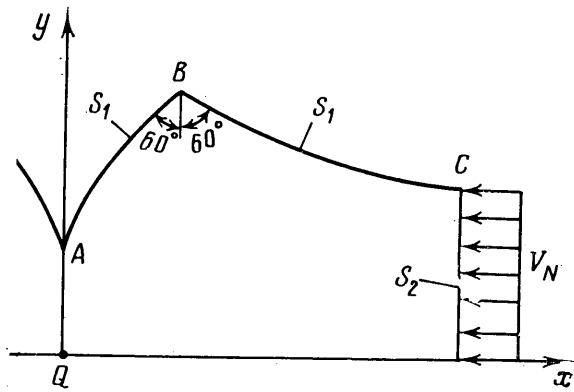
УДК 532.592

© 1991 г.

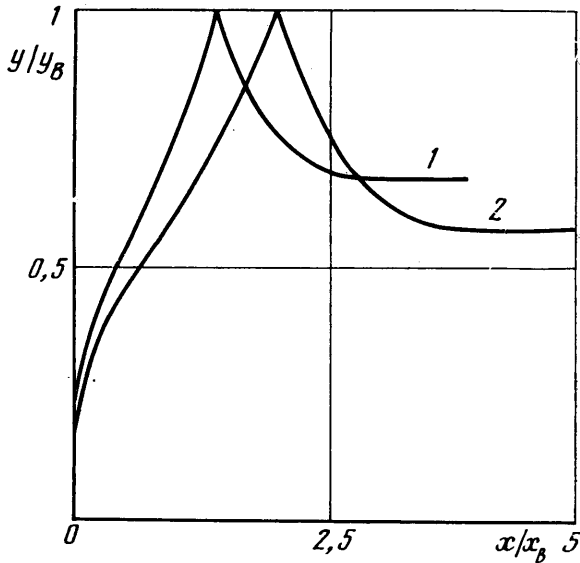
Э. Л. АМРОМИН, В. А. БУШКОВСКИЙ, Д. Ю. САДОВНИКОВ

#### УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ СТОКСА ПРИ ТЕЧЕНИИ ВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ В ЩЕЛЬ

При решении плоской нелинейной задачи об установившемся течении идеальной несжимаемой жидкости в щель на дне сосуда для узкого диапазона чисел Фруда, в котором существует решение с монотонно опускающейся к щели поверхностью струи [1], найдено течение с уединенной волной Стокса.



Фиг. 1



Фиг. 2

Схема течения приведена на фиг. 1. Щель моделируется изолированным стоком в начале координат, значения нормальной к боковой поверхности  $S_2$  скорости подбираются так, чтобы обеспечить стационарность течения при постоянном расходе  $Q$  через щель. Течение жидкости в сосуде описывается потенциалом скорости  $\Phi$ , который удовлетворяет обычным в теории струй идеальной жидкости соотношениям

$$\Delta \Phi = 0, \quad (\nabla \Phi, \mathbf{N}) + V_N|_{S=0}, \quad (\nabla \Phi, \nabla \Phi) + 2gy|_{S_1} = V_c^2 + 2gy_c \quad (1)$$

Здесь  $S$  – совокупность всех границ потока;  $\mathbf{N}$  – орт нормали к  $S$ ;  $S_1$  – свободная поверхность;  $V_N = 0$  на  $S_1$  и дне сосуда, и  $V_N = Q/2y_c$  в расположенном на большом удалении от щели сечении  $S_2$ , где для течения с уединенной волной поток уже практически однороден по глубине;  $y$  – ордината  $S_1$ ;  $g$  – ускорение свободного падения. Решение нелинейной задачи (1) зависит от двух параметров: отношения  $y_c$  к ширине сосуда  $2x_c$  и числа Фруда  $\text{Fr} = 0,5Qg^{-0,5}y_c^{-1,5}$ . Метод ее решения в главном совпадает с использованным в [2]; здесь излагаются лишь основные его аспекты.

Необходимо прежде всего напомнить, что уединенная волна Стокса не получается при вычислениях автоматически: надо предположить ее существование и задать положение гребня, т. е. излома  $S_1$  с углом  $2\pi/3$  в точке с координатами  $\{x_B, y_B\}$ . Тогда соответствующие значения числа  $\text{Fr}$  и толщины слоя жидкости над щелью отыскиваются при численном решении нелинейной задачи (1), причем итеративный процесс вычислений сходится только в некотором заранее неизвестном диапазоне

$x_B$ . Для других решений также заранее выбран тип области в плоскости годографа скорости, на которую можно было бы отобразить  $S_1$ ; например, в [1] искались только решения без критических точек на свободной поверхности.

Каждая из итераций, как и в [2], состоит из двух частей. В результате выполнения первой из внутренней задачи Неймана определяется распределение модуля скорости  $U$  по границам потока, в том числе и по границе, отождествляемой в данной итерации с  $S_1$ , а также невязка в интеграле Бернулли на  $S^1$ . Если она оказывается выше заданной, то приступают ко второй части — коррекции формы  $S_1$  из квазилинеаризованных условий на свободной границе, записанных в прямоугольной системе координат

$$\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial N} + U \frac{\partial h}{\partial T} + h N_y \frac{\partial U}{\partial T} = 0 \quad (2)$$

$$U \frac{\partial \varphi}{\partial T} - h \frac{N_y^2 V_c^2}{Fr^2 y_c} = \frac{(y - y_c) V_c^2}{y_c Fr^2} - \frac{U^2 - V_c^2}{2} \quad (3)$$

Здесь  $h$  — разность ординат искомой и известной форм  $S_1$ ;  $T$  и  $N_y$  — орт касательной к  $S_1$  и компонента внешней единичной нормали к ней;  $\varphi$  — возмущение  $\Phi$ , обусловленное деформацией границ;  $\alpha$  — коэффициент релаксации, меньший единицы, подбирается в ходе вычислений для обеспечения их устойчивости. Корректировка двух склонов волны Стокса производится порознь, а в окрестности гребня, как и в [2], применяются асимптотики  $q \sim |x - x_B|^{0,5} + \dots$ ,  $U \sim |x - x_B|^{0,5} + \dots$

Если выбрать  $\varphi$  потенциалом источников, то после исключения  $h$  из (3) с помощью (2) квазилинеаризованный интеграл Бернулли превратится в сингулярное интегральное уравнение относительно  $q$  — плотности  $\varphi$

$$I_k(q) = \frac{V_c^2 - U}{U} + \frac{2(y_c - y) V_c^2}{y_c Fr^2} - I_p(q) \quad (4)$$

$$I_p(q) = 2 \frac{\partial \varphi}{\partial T}(q) - I_k(q) - 2 \frac{N_y^2 V_c^2}{Fr^2 y_c} h(q)$$

Здесь  $I_k$  — интеграл Коши плотности  $q$ ,  $I_p$  — регулярная функция;  $h$  может быть выражено через  $q$  с помощью (2).

Добиться для всего левого склона волны Стокса ограниченных  $q$  и  $|dh/dT|$  можно лишь при выполнении обычного в теории сингулярных интегральных уравнений условия

$$\int_0^{l_B} \frac{F(l, Fr)}{\sqrt{l(l_B - l)}} dl = 0 \quad (5)$$

Здесь дуговая координата  $l$  отсчитывается от точки  $A$  вдоль  $S_1$ ,  $F$  — правая часть (4). Из (5) находится соответствующее заданному значению  $x_B$  число Фруда. Наиболее трудно выбрать невязку при  $x \rightarrow 0$ , так как там и  $N_y \rightarrow 0$ .

Отношение ординаты гребня к  $y_c$  однозначно связано со значением  $Fr$ . Поэтому, хотя (4) решается на всем промежутке от гребня до  $x_c$ , свободного параметра уже не остается и решение на  $(BC)$  приходится искать с неограниченным  $q(x_c)$ . Однако это не приводит к затруднениям, поскольку на малой части своей длины  $S_1$  перед  $x_c$  заменяется параболой, переходящей затем в прямую, и на этой части (2) не используется для корректировки  $S_1$ . Поэтому удается состыковать части  $S_1$  с сохранением ординаты и нормали и выровнять поток на «входе в сосуд» при  $x_c/y_c \gg 1$ .

Расчеты выявили существование уединенных волн Стокса при  $1 \leq Fr \leq 1,27$ ,  $p$  на фиг. 2 представлены соответствующие формы  $S_1$ : кривые 1, 2 соответствуют  $Fr = 1, 1,27$ . Такой диапазон существования согласуется с результатами других авторов. В [4] наименьшее значение  $Fr$  для опускающейся к стоку свободной поверхности — также единица, а наименьшее значение  $y_A/y_c = 0,25$  (здесь  $\min y_A/y_c = 0,26$ ). Для предельного солитона Стокса, как указано в [3], Ямада получил  $Fr = 1,286$ . Среди причин, обусловивших получение несколько отличного наибольшего значения  $Fr$  в представленных здесь расчетах, могут быть и погрешности, связанные с выставлением условия постоянства нормальной компоненты скорости при большом, но конечном  $x_c/y_c$ .

Эти погрешности оказались, по-видимому, чрезмерно большими при попытках построить тем же методом решение другого типа — с возвышающимся над стоком (источником) гребнем волны. В таком решении имеются еще и расходящиеся волны, и если в осесимметричном случае [2] с удалением от стока быстро падали их амплитуда и, как следствие, неоднородность потока на входе в сосуд, то в плоском случае амплитуда волн с удалением от стока не убывает, а построенное

описанным способом решение с гребнем над стоком зависит не только от числа Фруда, но и от абсциссы сечения, в котором поток «принудительно» выравнивается (по вертикали). Поэтому, несмотря на то что при отыскании волны с критической точкой над стоком на контролируемом участке  $S_1$  невязку в интеграле Бернулли удастся уменьшить до  $0,01V_c$ , это решение, построенное описанным методом для  $Fr \leq 1,15$ , заметно отличается от решения [4], существующего при  $Fr \leq 1,25$ . Таким образом, отыскание других режимов течения жидкости в щель требует других методов расчета.

Авторы признательны А. Н. Иванову и Г. Ю. Степанову за помощь в работе и полезные дискуссии.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Котляр Л. М., Тропольская О. В. Истечение струи тяжелой жидкости из отверстия в горизонтальной стенке при наличии свободной поверхности. // Тр. семинара по краевым задачам. Вып. 22. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1985. С. 125–132.
2. Амромин Э. Л., Басин М. А., Бушковский В. А. Два решения пространственной задачи о предельных волнах на поверхности весомой жидкости // ПММ. 1990. Т. 54. № 1. С. 162–165.
3. Schwartz L. W., Fenton J. D. Strongly nonlinear waves // Ann. Rev. Fluid Mech. 1982. V. 14. P. 39–60.
4. Гольдштик М. А., Степанов Г. Ю. Об основах теории центробежной форсунки // V Всесоюз. совещ. по современным проблемам аэродинамики, Рыбачье, 1989.

Ленинград

Поступила в редакцию  
26.IX.1990