МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1991

УДК 532.516.013.4

С. В. ПИХТОВ, Е. М. СМИРНОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ В СЛОЕ ЭКМАНА НА ПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Устойчивость течения несжимаемой вязкой жидкости в слое Экмана на непроницаемой поверхности исследована достаточно полно. Экспериментальные работы, обзор которых приведен в [1, 2], показали, а теоретические исследования подтвердили [2–4], что слою Экмана присущи два вида неустойчивости по отношению к малым возмущениям. Для возмущений класса A [1] критическое число Рейнольдса $\mathrm{Re}_A=54{,}1550$, а для возмущений класса B $\mathrm{Re}_B=112{,}7585$ [4]. Вопросы устойчивости в слое Экмана на проницаемой поверхности ранее не исследовались и составляют предмет настоящей работы. Эти вопросы интересны, в частности, для выбора параметров систем охлаждения рабочих лопаток газовых турбин с пористыми оболочками. Решение уравнений движения, описывающее основное течение, найдено в [5] и аналогично решению для течения у непроницаемой поверхности. Данное обстоятельство позволило рассчитать характеристики устойчивости по отношению к трехмерным возмущениям на основе метода решения спектральной задачи, предложенного в [4]. Установлен важный для практики результат, заключающийся в возможности полного подавления обеих упомянутых неустойчивостей с помощью наложенного отсоса относительно небольшой интенсивности.

В декартовой системе координат, вращающейся с угловой скоростью ω вокруг оси z, однородное по x и y стационарное решение уравнений Навье – Стокса, которое описывает течение в слое Экмана на проницаемой поверхности, имеет вид [5]

$$U=1-\exp(-\gamma z)\cos(\beta z);\qquad V=\exp(-\gamma z)\sin(\beta z);\qquad W=-W_0$$

$$\gamma=\frac{R}{2}+\sqrt{\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{R}{2}\right)^4\right]^{1/2}+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{2}\right)^2};$$

$$\beta=\sqrt{\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{R}{2}\right)^4\right]^{1/2}-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{2}\right)^2}$$

Здесь за масштаб длины принята величина $\delta=\sqrt{\upsilon/\omega}$; скорости отнесены к скорости внешнего потока U_0; $R=W_0/\sqrt{\upsilon\omega}$ – параметр вдува-отсоса.

Запишем безразмерные уравнения Навье – Стокса, линеаризованные относительно бесконечно малых возмущений $\mathbf{v}$, p основного течения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{V}+(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{v}+\nabla p+\frac{2}{\mathrm{Re}}(\mathbf{k}\times\mathbf{v})=\frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{v} \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{k}$ – орт оси z; $\mathrm{Re}=U_0/\sqrt{\upsilon\omega}$ – число Рейнольдса.

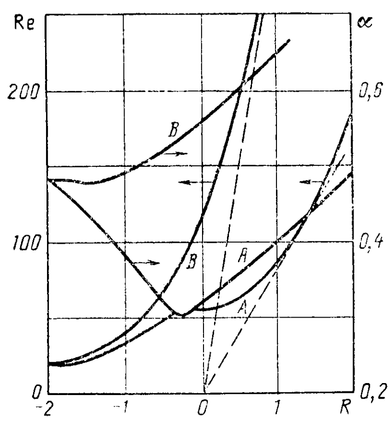
Введем новую систему координат x_1, y_1, $z_1=z$, повернутую относительно исходной оси z на угол ε против часовой стрелки. Возмущения будем полагать неменяющимися вдоль оси x_1. Вводя амплитудную функцию тока $\varphi(z)$, запишем их в виде

$$(u_1,\ v_1,\ w_1,\ p_1)=[\mu(z),\ -D\varphi(z),\ i\alpha\varphi(z),\ \pi(z)]\exp[i\alpha(y_1-ct)] \qquad (2)$$

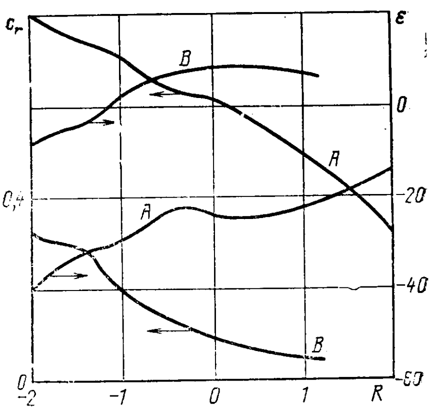
При записи (2) использовано уравнение неразрывности; α – волновое число; $c=c_r+ic_i$; $D\equiv d/dz$. Подставляя (2) в (1) и исключая π, придем к системе дифференциальных уравнений шестого порядка с однородными граничными условиями

$$(D^2-\alpha^2)^2\varphi-i\alpha\,\mathrm{Re}\,[(V_1-c)(D^2-\alpha^2)\varphi-\varphi D^2V_1]+2D\mu+R(D^2-\alpha^2)D\varphi=0$$

$$(D^2-\alpha^2)\mu-i\alpha\,\mathrm{Re}\,[(V_1-c)\mu+\varphi DU_1]-2D\varphi+RD\mu=0 \qquad (3)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$\varphi=D\varphi=\mu=0,\quad z=0;\quad \varphi,\ D^2\varphi,\quad D\mu\to 0,\quad z\to\infty$$

$$U_1=\cos\varepsilon-\exp(-\gamma z)\cos(\beta z+\varepsilon);\quad V_1=-\sin\varepsilon+\exp(-\gamma z)\sin(\beta z+\varepsilon)$$

Имеем спектральную задачу с пятью параметрами: Re, α, ε, R, c. Решения спектральной задачи найдены методом [4], основанным на разложении функций φ, μ в ряд по экспоненциальным базисным функциям с использованием рекуррентных соотношений для определения коэффициентов ряда. Решения для $R=0$ полностью соответствовали приведенным в [4], где в свою очередь показана высокая точность метода и согласованность результатов с данными [2–3], полученными другими численными методами.

Результаты расчетов нейтральных возмущений ($c_i=0$) для $R=O(1)$ показали, что с ростом числа Рейнольдса первой всегда развивается неустойчивость типа A (согласно терминологии, предложенной в [1] для обозначения неустойчивостей в слое Экмана на непроницаемой поверхности). Эта неустойчивость возникает в результате сложного механизма взаимодействия сил вязкости и силы Кориолиса [3] и может быть охарактеризована как вязкая неустойчивость, т. е. исчезающая при стремлении числа Рейнольдса к бесконечности. При больших числах Рейнольдса развивается неустойчивость другого вида (типа B), которая обусловлена действием невязкого механизма в окрестности ближайшей к стенке точки перегиба профиля трансверсальной составляющей скорости основного течения.

Значения критических параметров для обоих типов возмущений в зависимости от R представлены на фиг. 1, 2. При вдуве ($R<0$) устойчивость течения снижается, а при отсосе ($R>0$) повышается. Вдув жидкости влияет на критическое число Рейнольдса Re_c слабее, чем отсос той же интенсивности. Значения $\mathrm{Re}_c^{(B)}$ при увеличении R растут намного быстрее, чем $\mathrm{Re}_c^{(A)}$. В случае вдува значения $\mathrm{Re}_c^{(A)}$ и $\mathrm{Re}_c^{(B)}$ сближаются: при $R<-1{,}2$ различие между ними не более 10%. Для неустойчивости A-типа зависимость α_c от R немонотонна, минимальное значение критического волнового числа достигается при $R=-0{,}2$. Фазовая скорость c_r монотонно уменьшается с ростом R.

На практике может встать вопрос о пределе устойчивости течения при фиксированном значении безразмерной скорости вдува-отсоса W_0, а не при постоянном значении R, как было принято в расчетах. На этот вопрос легко ответить, пользуясь фиг. 1. Из определения R и Re следует, что вдоль лучей, выходящих из начала координат на плоскости (R, Re), значение W_0 сохраняется постоянным. Критические числа Рейнольдса при $W_0=\mathrm{const}$ определяются точками пересечения соответствующим лучом зависимостей, полученных для $\mathrm{Re}_c^{(A)}$ и $\mathrm{Re}_c^{(B)}$. Видно (фиг. 1), что лучи могут пересекать эти зависимости 1 раз, 2 раза или вообще не иметь пересечений. В первом случае диапазон чисел Рейнольдса, в котором нарастают соответствующие возмущения, не ограничен сверху; двойное пересечение означает существование верхнего критического числа Рейнольдса. Лучи, касающиеся зависимостей для $\mathrm{Re}_c^{(A)}$ и $\mathrm{Re}_c^{(B)}$ (штриховые линии на фиг. 1), соответствуют предельным значениям параметра W_0. Расчеты показывают, что неустойчивость B-типа не может развиваться при $W_0>0{,}004$, а неустойчивость A-типа исчезает при $W_0>0{,}013$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гринспен Х.* Теория вращающейся жидкости. Л.: Гидрометеоиздат, 1975. 304 с.
2. *Iooss G., Nielsen H. B., True H.* Bifurcation of the stationary Ekman flow into a stable periodic flow // Arch. Rat. Mech. Anal. 1978. V. 68. № 3. P. 227–256.
3. *Lilly D. K.* On the instability of Ekman boundary flow // J. Atmos. Sci. 1966. V. 23. № 5. P. 481–494.
4. *Melander M. V.* An algorithmic approach to the linear stability of the Ekman layer // J. Fluid Mech. 1983. V. 132. P. 283–293.
5. *Gupta A. S.* Ekman layer on a porous plate // Phys. Fluids. 1972. V. 15. № 5. P. 930–931.

Ленинград

Поступила в редакцию 19.VI.1990

УДК 532.526.5

В. К. МАСАЛОВ, Р. К. ТАГИРОВ

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ОТРЫВНОГО ТЕЧЕНИЯ ЗА ПЛОСКИМ ЗАКРУГЛЕННЫМ ТЕЛОМ, ОБТЕКАЕМЫМ ДВУМЯ СВЕРХЗВУКОВЫМИ ПОТОКАМИ

Разработана методика расчета донного давления и координат точек отрыва на криволинейной поверхности задней кромки плоского тела, обтекаемого двумя сверхзвуковыми потоками, с учетом эффекта местного перерасширения потоков.

При решении ряда технических задач, например при исследовании обтекания турбинной лопатки с затупленной задней кромкой, возникает необходимость в определении параметров течения за задней кромкой тела, обтекаемого двумя разными сверхзвуковыми потоками. Если затупление задней кромки сделано в виде плоского уступа, то для определения параметров донного течения могут быть использованы известные методы, например основанные на схеме Корста [1]. Если задняя кромка имеет закругленную форму, то указанные методы расчета непосредственно применить нельзя, поскольку неизвестны местоположения точек отрыва на поверхности кромки. Если предположить, что отрыв возникает в точке, где давление на стенке равно донному давлению [2], расчет отрывного течения может быть проведен.

В данной работе разработана методика расчета донного давления и координат точек отрыва с учетом эффекта местного перерасширения потоков.

Пусть задняя кромка лопатки, имеющая форму полуокружности, с двух сторон обтекается двумя разными равномерными плоскими потоками (фиг. 1). Сделаем следующие основные предположения. В отрывной области донное давление постоянно. Начальные пограничные слои тонкие и их влиянием на зону смешения можно пренебречь. Потоки обтекают криволинейные поверхности в соответствии с решением Прандтля – Майера. Точки отрыва расположены там, где достигается критический перепад давления на скачке уплотнения $p_g/p_s=P_{cr}$.

Пусть в начальном сечении $z=0$ заданы все необходимые параметры для первого (1) и второго (2) потоков: углы наклона стенок $\alpha_{01}=\alpha_{02}=0$, числа Маха M_{01}, M_{02}, показатели адиабаты γ_1, γ_2, числа Рейнольдса Re_1, Re_2, отношение полных давлений P_{01}^*/P_{02}^*. Необходимо определить донное давление и координаты точек отрыва.

Расчет начинается с того, что произвольно задается полярный угол α_1, определяющий положение верхней точки отрыва s_1. С помощью соотношений Прандтля – Майера в этой точке определяются число Маха M_{s1} и давление p_{s1}. Поскольку в этой точке возникает косой скачок уплотнения с критическим перепадом давлений, то величину донного давления можно определить из соотношения $p_g=P_{cr1}p_{s1}$, где P_{cr1} находится с помощью известных соотношений по M_{s1}. Далее задается угол α_2, соответствующий нижней точке отрыва s_2. С помощью соотношений Прандтля – Майера определяются в этой точке значения M_{s2} и p_{s2}. В нижней точке s_2 должно выполняться условие $p_g/p_{s2}=P_{cr2}$, где P_{cr2} определяется по известному значению M_{s2}. Если указанное условие не выполняется, то задается новый угол α_2 и расчет повторяется. Таким образом, величина угла α_2 устанавливается из условия выполнения соотношения $p_g/p_{s2}=P_{cr2}$. С использованием найденных параметров M_{s1}, p_{s1}, M_{s2}, p_{s2} в точках s_1 и s_2, а также величины p_g проводится расчет обтекания донного уступа s_1s_2 с использованием известной схемы Корста [1].