

УДК 533.6.011.8

© 1991 г.

И. В. ВОЛКОВ, В. С. ГАЛКИН

**АНАЛИЗ КОЭФФИЦИЕНТОВ СКАЧКОВ ТЕМПЕРАТУРЫ
И ПАРЦИАЛЬНЫХ ДАВЛЕНИЙ БИНАРНОЙ СМЕСИ
ИСПАРЯЮЩИХСЯ ГАЗОВ**

Методом Максвелла – Лоялки дан вывод формул для пристепеночных скачков температуры и парциальных давлений бинарной смеси газов, испаряемых (конденсируемых) стенкой. Испарение (конденсация) предполагается слабыми. Выражения для скачков записаны через нормальные к стенке составляющие приведенного теплового потока смеси газов и средних скоростей её компонентов, что обеспечивает возможность прямого обобщения на многокомпонентную смесь, инвариантность коэффициентов формул для скачков к числу испаряющихся компонентов и симметрию перекрестных эффектов. Проведен аналогичный [1] анализ этих коэффициентов, показана возможность их значительных упрощений с приемлемой для практических расчётов точностью.

Данная работа является продолжением [1], где показана возможность упрощений громоздких формул, получаемых методом Максвелла – Лоялки, для коэффициентов граничных условий скольжения и температурного скачка в бинарной смеси газов с замороженными внутренними степенями свободы молекул. Доказательство основано на систематическом расчетном анализе этих формул для смесей инертных газов, N_2 , O_2 , CO_2 , SO_2 , H_2 при температурах от комнатной до 2500 К с использованием соотношений Вильке для вязкостей.

Ниже с той же целью и при тех же предположениях дан вывод формул для скачков температуры и парциальных давлений в бинарной смеси газов на испаряющейся стенке и проведен расчётный анализ коэффициентов этих формул (для краткости ниже говорится только об испарении, в силу линейности задачи формулы и выводы переносятся и на случай конденсации). Испарение обоих компонентов предполагается слабым, оно не влияет на скорость скольжения и соответствующие выводы [1] остаются в силе. Как частный случай полученные соотношения описывают испарение одного из компонентов в «чужой» газ [2]. В отличие от [2], где также применен метод Максвелла – Лоялки, ниже использован иной закон взаимодействия молекул со стенкой [3–5], а результирующие формулы не линеаризованы по коэффициенту термодиффузии. Кроме того, выражения для скачков ниже записаны через нормальные к стенке составляющие приведенного теплового потока и средних скоростей компонентов смеси, а не через [2] составляющие градиента температуры ∇T , среднемассовой скорости и градиента концентрации.

Вывод граничных условий на испаряющейся стенке ранее проводился в основном в рамках различного рода приближенных модельных кинетических уравнений (см. [2–6] и цитированную там литературу). В [4–5], где рассматривалось испарение в смесях газов, делались также дополнительные упрощающие предположения. Преимуществом данного метода является решение именно кинетических уравнений Больцмана.

Необходимо подчеркнуть, что настоящее исследование представляет не только самостоятельный интерес, но и как переход к более сложным системам с физико-химическими процессами на стенке. Рассмотрение простейшего из таких процессов, каковым можно считать испарение, позволяет найти оптимальные формы представления результатов и возможности их упрощений с приемлемой для практики точностью.

Ниже используются в основном обозначения [1]. Как и в [1], ищутся глобальные упрощения путем оценок сверху для небольших отношений масс молекул смеси порядка 2–3. В частных случаях возможны дальнейшие упрощения.

Укажем описки, допущенные авторами в [1]. В последней формуле (1.5) работы [1] нужно заменить D_{20} на d_{20} , выражение (1.7) для d_{11} разделить на 5, перед $\sigma\alpha_1$ в (4.2) изменить знак. В случае максвелловских молекул $\delta \neq 0$, а не $\delta = 0$, как на стр. 157 в [1].

1. Достаточно полное описание метода Максвелла — Лоялки содержится в [1, 2] и цитированных там работах, поэтому ограничимся кратким изложением вывода. Предполагается [3–5], что функции распределения покидающих стенку ($y=0$) молекул

$$f_i(v_{ix}, v_{iy}>0, v_{iz}, y=0) = p_{0i}(m_i/2\pi)^{3/2}(kT_w)^{-3/2} \exp(-c_i^2) \quad (1.1)$$

$$p_{0i} = \alpha_i p_{ei} + p_{wi}, \quad c_i^2 = (m_i/2kT_w) v_i^2$$

Здесь $i=1, 2$; $\mathbf{v}_i$ — скорость молекулы i -го компонента; α_i , $p_{ei}=p_{ei}(T_w)$ — коэффициент его испарения и давление (заданное) насыщенного пара; T_w — температура стенки.

Линеаризуем задачу кнудсеновского слоя относительно полного максвеллиана (1.1). Тогда

$$f_i(\mathbf{v}_i, y) \approx f_i^{(0)} [1 + \varphi_i(\mathbf{v}_i, y)], \quad f_i^{(0)} v_{iy} \partial \varphi_i / \partial y = I_i(\varphi) \quad (1.2)$$

Возмущения φ_i удовлетворяют системе двух линейных уравнений Больцмана (1.2) с граничным условием на стенке, вытекающим из (1.1)

$$\varphi_i(v_{ix}, v_{iy}>0, v_{iz}, y=0) = 0 \quad (1.3)$$

При $y \rightarrow \infty$ функции φ_i стремятся к отрезкам рядов Чепмена — Энскога, переразложенным во внутренних переменных. Полагая в этих отрезках $y=0$, обозначим их через φ_i^∞

$$\varphi_i^\infty = \pi_i - S_{\frac{1}{2}}^{(1)} t + \psi_i, \quad \psi_i = \sqrt{\frac{2m_i}{kT}} U c_{iy} - A_i(c_i^2) c_{iy} \nabla \ln T - n D_i(c_i^2) c_{iy} \nabla x_i \quad (1.4)$$

$$t = \frac{T(0) - T_w}{T_w} \equiv \frac{\Delta T}{T_w}, \quad \pi_i = \frac{p_i(0) - p_{0i}}{p_{0i}} \approx \frac{p_i(0) - p_{0i}}{p_i(0)}$$

$$\nabla \ln T = \left. \frac{\partial \ln T}{\partial y} \right|_{y=0}, \quad \nabla x_i = \left. \frac{\partial x_i}{\partial y} \right|_{y=0}, \quad x_i = \frac{n_i}{n}$$

Здесь $T(0)$, $p_i(0)$ — значения температуры и парциальных давлений, получаемые экстраполяцией соответствующих переменных до стенки и используемые в качестве граничных значений для уравнений механики сплошных сред. В (1.4) учтено, что вне (но не внутри) кнудсеновского слоя давление $p = \text{const}$; $U = U_y$ — вертикальная компонента среднemasсовой скорости. Величина $\varphi_i = O(\text{Kn})$, число Кнудсена $\text{Kn} \rightarrow 0$. Для сокращения обозначений в коэффициентах при ΔT , U , $\nabla \ln T$ и т. д., в (1.4) и ниже полагаем [1] $T(0) = T_w = T$, $p_{0i} = p_i(0) = p_i$ и т. д., пренебрегая при этом величинами порядка Kn^2 . Кроме того, не учитывается, что T_w , $n_i(0)$ и т. п. являются, вообще говоря, функциями координат поверхности.

Преобразуем ψ_i . Выразим ∇x_i через вертикальные компоненты средних скоростей компонентов [7]

$$u_i = V_i + U, \quad \rho_1 V_1 = -\rho_2 V_2 = -\frac{n^2}{\rho} m_1 m_2 D_{12} (\nabla x_1 + k_T \nabla \ln T) \quad (1.5)$$

Представим, как обычно, $A_i(c_i^2)$, $D_i(c_i^2)$ рядами по полиномам Сонина $S_i^{(p)}(c_i^2)$. Используя данные [1], получим

$$A_i - n k_T D_i = -Z_i \frac{\lambda}{k} a_i (S_{\frac{1}{2}}^{(1)} + A_i^*), \quad Z_i = \sqrt{\frac{2}{kT}} \frac{2}{5} \frac{m_i^{\frac{1}{2}}}{\rho} \quad (1.6)$$

$$D_i - D_{i0} = -Z_i \frac{k_T D_{12}}{x_1 x_2} d_i (S_{\frac{1}{2}}^{(1)} + D_i^*), \quad D_{i0} = \sqrt{\frac{2}{m_i kT}} \frac{m_1 m_2}{x_i \rho} D_{12} (-1)^{i-1}$$

$$(A_i^*, D_i^*) = \sum_{p \geq 2} (a_i^{(p)}, d_i^{(p)}) S_{\frac{1}{2}}^{(p)}, \quad k_T = \frac{D_T}{D_{12}} = x_1 x_2 \sigma k_T^*$$

$$\sum_i n_i m_i a_i = \sum_i n_i m_i d_i = \rho$$

В главном приближении по полиномам Сонина $A_i^* = 0$, $D_i^* = 0$. Используя формулы [1], в этом приближении можно получить

$$a_i = 1 + (-1)^i \frac{x_j}{\mu_i} \delta^* \frac{1-2\Delta}{1-\Delta}, \quad d_i = 1 + (-1)^i \frac{x_j}{\mu_i} \nu, \quad \mu_i = \frac{m_i}{m_1 + m_2}, \quad i \neq j \quad (1.7)$$

В (1.6), (1.7) ρ — массовая плотность; λ , D_T , D_{12} — коэффициенты теплопроводности, термодиффузии, бинарной диффузии; формулы для δ^* , Δ , ν , k_T^* , σ даны в [1]. В итоге с учетом (1.5)

$$\psi_i = \sqrt{\frac{2m_i}{kT}} c_{iy} u_i + Z_i c_{iy} \left\{ -\frac{\lambda}{k} a_i (S_{\frac{1}{2}}^{(1)} + A_i^*) \nabla \ln T - n k_T d_i (S_{\frac{1}{2}}^{(1)} + D_i^*) (u_1 - u_2) \right\} \quad (1.8)$$

Метод Максвелла — Лоялки основан на использовании интегралов системы кинетических уравнений (1.2). Последние умножаются на некоторые функции ϵ_i , интегрируются по $\mathbf{v}_i$ и (в основном) суммируются по i . Для вычисления произвольных постоянных интегрирования по y используются (1.4), (1.8). Путем умножения на сумматорные инварианты операторов столкновений $I_i(\varphi)$ получаем

$$\Sigma(m_i v_{iy}, \varphi_i) = \rho U, \quad \frac{1}{n_1} (v_{1y}, \varphi_1) - \frac{1}{n_2} (v_{2y}, \varphi_2) = u_1 - u_2 \quad (1.9)$$

$$\Sigma(S_{\frac{1}{2}}^{(1)} (c_i^2) v_{iy}, \varphi_i) = \frac{\lambda}{k} \nabla \ln T - n k_T (u_1 - u_2) \quad (1.10)$$

$$\Sigma(m_i v_{iy}^2, \varphi_i) = n_i k T_w \pi_1 + n_2 k T_w \pi_2 \quad (1.11)$$

$$(B, \varphi_i) = \int B f_i^{(0)} \varphi_i d\mathbf{v}_i, \quad \Sigma \equiv \sum_{i=1}^2$$

Формулы (1.9)–(1.11) выражают постоянство вертикальных составляющих потоков числа частиц, энергии и импульса в кнудсеновском слое. Отсюда, в частности, $U = \text{const}$, $u_i = \text{const}$. Для получения второй группы интегралов [2] проводится умножение на $A_i c_{iy}$ или $D_i c_{iy}$, используются свойства симметрии моментов от операторов $I_i(\varphi)$, уравнения метода Чепмена — Энскога, формулы (1.9), (1.10). При $y=0$ эти интегралы таковы

$$\Sigma((A_i - n k_T D_i) c_{iy} v_{iy}, \varphi_i) = \frac{\lambda}{k} t$$

$$\Sigma(D_i c_{iy} v_{iy}, \varphi_i) = \frac{D_T}{x_1 x_2} t + \frac{n D_{12}}{\rho} (m_2 \pi_1 - m_1 \pi_2)$$

Подставляя сюда (1.6) в первом приближении по полиномам Сонина, когда $A_i^* = 0$, $D_i^* = 0$ и справедливы (1.7), и применяя (1.11), окончательно

но имеем

$$t = -\sum (Z_i a_i S_{y_i}^{(1)} c_{iy} v_{iy}, \varphi_i) \quad (1.12)$$

$$\pi_\alpha = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{2}{n_\alpha} \delta_{\alpha i} + (-1)^\alpha \frac{4}{5\rho} x_\beta \sigma k_T^* m_i d_i S_{y_i}^{(1)} (c_i^2), \varphi_i c_{iy}^2 \right) + (-1)^\alpha x_\beta \sigma k_T^* t$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \quad \beta \neq \alpha, \quad \delta_{\alpha i} = 1 (\alpha = i), \quad 0 (\alpha \neq i) \quad (1.13)$$

Подчеркнем, что данная методика не только уточняет метод Максвелла, но и ликвидирует его противоречивость. Именно в простом газе без испарения можно получить два варианта формулы для скачка давления с различными коэффициентами, используя в одном случае закон сохранения энергии (1.10), в другом — импульса (1.11). Интересно, однако, что при полностью диффузном отражении различие коэффициентов незначительно (около 2%).

2. В соответствии с основной идеей Лоялки предполагаем, что на дне кнудсеновского слоя возмущения функций распределений налетающих молекул

$$\varphi_i(v_{ix}, v_{iy} < 0, v_{iz}, y=0) = \beta_i - S_{y_i}^{(1)} \tau + \psi_i \quad (2.1)$$

с неизвестными параметрами β_i, τ . Подставляя (2.1) в левые части (1.9) с учетом (1.3), находим

$$\beta_i = \frac{\tau}{2} - \sqrt{\frac{\pi m_i}{2kT}} u_i \quad (2.2)$$

После этого аналогичная операция с (1.10) дает

$$\tau = \kappa H \left\{ 2 \frac{\lambda}{k} \nabla \ln T - (1 + 2x_2 \sigma k_T^*) n_1 u_1 - (1 - 2x_1 \sigma k_T^*) n_2 u_2 \right\} = \kappa H (2h - n_1 u_1 - n_2 u_2) \quad (2.3)$$

$$H = \frac{1}{4n} \sqrt{\frac{\pi M}{2kT}}, \quad \kappa = \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 \Delta_{-1/2}}}, \quad M = \sum x_i m_i, \quad \Delta_\alpha = \sum x_i \mu_i^\alpha \quad (2.4)$$

Используя (2.3), (2.4), приводим (2.2) к виду ($j=i$)

$$\beta_i = \kappa H h - \frac{9}{8} \sqrt{\frac{\pi}{2kT}} \left[\sqrt{m_i} \left(1 - \frac{1}{9} \frac{x_j}{\sqrt{\mu_j \Delta_{-1/2}}} \right) u_i + \frac{1}{9} \kappa \sqrt{M} x_j u_j \right] \quad (2.5)$$

Формулы (2.3) — (2.5) дают решение задачи методом Максвелла, если положить $\tau = t, \beta_i = \pi_i$. Величина h выражается через нормальную компоненту приведенного теплового потока q^*

$$h = -\frac{q^*}{kT}, \quad q^* = -\lambda \nabla T + p k_T (u_1 - u_2) = q - \frac{5}{2} \sum n_i V_i \quad (2.6)$$

где q — полный тепловой поток в смеси газов.

Для определения скачка температуры подставляем (2.1) при $A^* = 0, D_i^* = 0$ и формулы (2.3) — (2.6) в правую часть уравнения (1.12). После весьма громоздких выкладок имеем

$$t = \frac{\Delta T}{T_w} = H(1 + l_1)(1 + W_T)h - \frac{1}{2} H(1 + l_{II}) \sum_{i=1}^2 (1 + W_i) n_i u_i \quad (2.7)$$

$$1+W_T=\kappa(1+G_T), \quad \gamma=T, \quad i, \quad \pi \quad (2.8)$$

$$G_T = \frac{l_I}{1+l_I} \left[\frac{\Delta_{-1/2}}{\Delta_1^2} \sum_{k=1}^2 x_k \mu_k^{5/2} a_k^2 - 1 \right] \quad (2.9)$$

$$G_i = \frac{l_{II}}{1+l_{II}} \left[\frac{\Delta_{-1/2}}{\Delta_1} \mu_i^{1/2} a_i - 1 + 1,3(-1)^i x_j \frac{\psi}{\Delta_1} \sum_{k=1}^2 (-1)^k \mu_k^{1/2} a_k \right] \quad (2.10)$$

$$\psi = 2k_T \frac{\Delta_{-1/2}}{\Delta_1} L > 0, \quad l_I = \frac{104}{25\pi} \approx 1,32, \quad l_{II} = \frac{16}{5\pi} \approx 1,02,$$

$$l_{III} = 9 + \frac{32}{\pi} \approx 19,2 \quad (2.11)$$

Величина L вводится формулой $a_i - d_i = (-1)^i (x_j/\mu_j) L$. В (2.9)–(2.11) и ниже a_i, d_i даются формулами (1.7), так что

$$L = \delta^* \frac{1-2\Delta}{1-\Delta} - v \quad (2.12)$$

Использование (1.7) и интеграла кинетических уравнений именно в форме (1.12) позволило получить более компактное по сравнению с [1] выражение (2.9) для G_T . Теперь аналогично вычисляем скачки давлений при помощи (1.13)

$$\pi_i = \frac{1}{2} H(1+l_{II})(1+W_i)h - \frac{1}{16} \sqrt{\frac{\pi}{2kT}} \sum_{k=1}^2 \xi_{ik} u_k \quad (2.13)$$

$$\xi_{ii} = l_{III} \sqrt{m_i} (1+G_{ii}), \quad \xi_{ij} = \sqrt{M} x_j (1+W_\pi) \quad (2.14)$$

$$G_{ii} = -f_i \{1 - \psi \sqrt{\mu_j} l_{II} [2 + 1,3\psi \sqrt{\mu_j}]\} \quad (2.15)$$

$$f_i = \frac{x_j}{l_{III} \sqrt{\mu_j} \Delta_{-1/2}} = \frac{1}{l_{III}} \left(1 - \frac{x_i}{\sqrt{\mu_i} \Delta_{-1/2}} \right) \quad (2.16)$$

$$G_\pi = -\psi l_{II} (\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2} + 1,3\psi \sqrt{\mu_1 \mu_2}) \quad (2.17)$$

В формулах (2.7)–(2.10), (2.13)–(2.17) $j \neq i$, использованы обозначения (2.4), (2.6), (2.11), (2.12). В коэффициентах при h, u_i формул (2.7), (2.13) $T=T_w, n_i=n_i(y=0)$.

Подчеркнем симметрию «перекрестных» членов формул (2.7), (2.13): одинаковы коэффициенты при $-n_i u_i$ в t и при h в π_i , при $x_j u_j$ в π_i .

Формулы (2.13)–(2.17) дают решение задачи о скачках давлений при $\alpha_i=1$. Действительно, предполагая механизмы испарения компонентов независимыми и используя результаты [3], можно показать, что при $\alpha_i \neq 0$

$$\pi_i = \Pi_i + \frac{1-\alpha_i}{\alpha_i} \sqrt{\frac{2\pi m_i}{kT_w}} u_i, \quad \Pi_i = \frac{p_i(0) - p_{ei}}{p_i(0)} \quad (2.18)$$

Искомые скачками являются именно Π_i , так как они отсчитываются от заданных величин p_{ei} . При $\alpha_i=0$, когда испарение отсутствует, величина p_{ei} равна неизвестной в газодинамических задачах величине p_{wi} . Однако при этом указанные задачи решаются без условий на стенке для давлений, $p_i(0)$ находятся из решения газодинамической задачи. Вместо (2.18) иногда используются формулы для скачков концентраций, а не парциальных давлений

$$[n_{ei} - n_i(0)]/n_i(0) = -\Pi_i + t$$

Однако при этом теряется упомянутая симметрия.

Важно подчеркнуть преимущества принятого здесь представления скачков через h , u_1 , u_2 , а не через [2] $\nabla \ln T$, ∇x_1 , U . Действительно, рассмотрим два случая: а) не испаряется первый компонент ($\alpha_1=0$); б) не испаряются оба компонента ($\alpha_i=0$). Условия непротекания на стенке соответственно: а) $u_1=0$, б) $u_i=0$. Тогда с учётом (1.5) граничные условия при $y=0$ соответственно таковы: а) в ΔT , Π_2 полагаем $u_1=0$, $u_2=(\rho/\rho_2)U$, вместо Π_1 ставится условие

$$\nabla x_1 = - \frac{\rho x_1}{n m_2 D_{12}} U - k_T \nabla \ln T \quad (2.19)$$

б) в ΔT полагаем $u_i=0$, вместо Π_i ставятся условия

$$U=0, \quad \nabla x_1 = -k_T \nabla \ln T \quad (2.20)$$

При записи скачков через $\nabla \ln T$, U , ∇x_1 в зависимости от числа испаряющихся компонентов в силу (2.19), (2.20) меняются коэффициенты: а) при $\nabla \ln T$, U ; б) при $\nabla \ln T$.

При постановке граничных условий важно учитывать то, что не нужно знать давление на дне кнудсеновского слоя при расчете действующей на стенку силы из-за постоянства полного потока импульса $\tau_{yy}=p+p_{yy}$ поперек слоя (интеграл (1.11)). Например, в данном приближении по Кн при решении задачи пограничного слоя на пластине полагаем $\tau_{yy}=p(0)=p_0$, где p_0 — давление в невязком потоке.

Кроме того, запись формул для скачков через h , а не через $\nabla \ln T$ имеет принципиальное значение: становятся симметричными перекрестные слагаемые в указанном выше смысле, упрощаются формулы, особенно для G_i . Для иллюстрации последнего факта выражение (2.3) для скачка температуры в рамках метода Максвелла записано в двух формах.

В качестве примера рассмотрим случай лоренцова газа [8, 9], когда $m_2 \ll m_1$. Для степенных межмолекулярных потенциалов [9] термодиффузионное отношение

$$k_T = \frac{1}{2} \eta x_2 (v-5)/(v-1)$$

Точному значению k_T соответствует $\eta=1$, в первом приближении по полиномам Сонина $\eta(v=\infty)=10/13$, $\eta(v=9)=8/9$. Согласно (2.3), при записи через h или $\nabla \ln T$ коэффициент при $-H n_2 u_2$ равен соответственно единице или

$$1 - 2x_1 \delta k_T^* = 1 - 2k_T/x_2 = 1 - \eta(v-5)/(v-1)$$

В случае молекул — упругих сфер ($v=\infty$) — точное и приближенное значения этого коэффициента равны нулю и $3/13$, при $v=9$ — соответственно $1/2$ и $5/9$. Таким образом, при записи через $\nabla \ln T$ коэффициент при u_2 в скачке температуры очень «чувствителен» к термодиффузии и, вообще говоря, к точности постановки задачи.

Обратим внимание на не отмечаемый явно в руководствах по кинетической теории факт: при обычно принятом [1, 7–9] рассмотрении бинарной смеси методом Чепмена — Энскога, когда функции распределения выражаются через ∇x_1 , необходимо считать $m_2 < m_1$. В противном случае k_T будет иметь знак, противоположный общепринятому (действительно, при небольшой разнице масс [8] k_T пропорционально разности $m_1 - m_2$). На это не обращено внимания в [7], где при рассмотрении лоренцова газа положено $m_1 \ll m_2$, и в [1]. Однако полученные здесь и в [1] формулы и делаемые из них выводы не зависят от выбора номера для легких молекул (всюду при k_T^* присутствует множитель $(-1)^i$). Поэтому не будем изменять обозначения [1]

$$m^* = m_2/m_1 \geq 1$$

3. Прежде чем переходить к анализу коэффициентов формул для скачков, сформулируем требования к точности этих коэффициентов. В большинстве газодинамических задач в главном приближении по $\text{Kn} \rightarrow 0$ используются [4, 10] условия для скачков концентраций без слагаемых с h . Полагается $\Delta T=0$. Поэтому требования к точности коэффициентов G_{ii} , G_{π} аналогичны требованиям к коэффициентам температурного и диффузионного скольжения [1] (допустима ошибка до 5%), остальные коэффициенты можно вычислять с большей погрешностью (до 20%). Вместе с тем в [11–14] указаны примеры течений, когда в главном приближении необходим учет и других членов скачков температуры и концентраций. Однако этот учет, как правило, приводит к изменениям на десятки процентов, что не изменяет сформулированных требований. Кроме того, значения коэффициентов испарения известны с большой погрешностью.

Как и в [1], формулы (2.7), (2.13) «организованы» так, что коэффициенты G , W , связь между которыми дается формулой (2.8), обращаются в нуль в случае одноатомного газа. При этом коэффициенты G «вбирают» в себя основное влияние многокомпонентности и при пренебрежимой малости W по сравнению с единицей формулы приобретают однокомпонентную структуру [1].

Целью работы являются оценки сверху коэффициентов G , W . Расчёты проводились по методике [1] для трех вариантов: I — $\sigma=1$ (упругие сферы), II — $\sigma=1/2$, III — $\sigma=0$ (максвелловские молекулы). Более тщательный расчёт (и, возможно, более полная постановка задачи) необходим тогда, когда велико влияние термодиффузии. При этом к реальности ближе вариант II: модель молекул — упругих сфер завышает значения k_T в 2 раза и более по сравнению с экспериментальными [8].

Перейдем к анализу G , W . Обозначим [1]

$$G_{\delta}^m = \max_{x_i, T_w} |G_{\delta}|, \quad W_{\gamma}^m = \max_{x_i, T_w} |W_{\gamma}|$$

$$\delta = T, i, ii, \pi; \quad \gamma = T, i, \pi$$

Изменения T_w в исследуемом интервале 500–2500 К не оказывают значительного влияния на сделанные ниже выводы.

Дополнительные расчёты подтвердили заключение [1] о малости G_T^m и о величине W_T .

Величины $G_i(x_i=0) \neq 0$, $G_i(x_i=1) = 0$. Функции $G_i(x_i)$ могут быть отрицательными или положительными в зависимости от m^* и свойств молекул. Для значений $G_i^m(m^*)$ характерен большой нерегулярный разброс, они изменяются от (примерно) 0 до 0,1 и выше в зависимости от свойств молекул. Поэтому графическое представление этих значений не наглядно. При $\sigma=0$ имеем $G_i^m \leq 0,1$ за исключением смесей Ne с CO_2 (2,18) и SO_2 (3,17), Ne с N_2 (7), O_2 (8), CO_2 (11), SO_2 (16), когда $G_i^m \leq 0,2$ (в скобках приведены значения m^*). При $\sigma=1$ имеем $G_1^m \leq 0,1$ для $m^* < 10$, $G_1^m \leq 0,2$ для остальных m^* ; $G_2^m \leq 0,1$ для $m^* \leq 6$, за исключением Ne — SO_2 , когда $G_2^m \approx 0,2$, и $G_2^m \leq 0,2$ для $m^* \leq 10$, с дальнейшим ростом m^* значения G_2^m колеблются примерно от 0,1 до 0,6 (Ne — SO_2). При $\sigma=0,5$ имеем $G_1^m \leq 0,1$, за исключением Ne — SO_2 и H_2 — Ne (10,1), когда $G_1^m = 0,15$ и 0,19; $G_2^m \leq 0,1$ для $m^* \leq 3$, при $m^* > 3$ имеем $G_2^m \leq 0,2$, за исключением смесей Ne и CO_2 , SO_2 и Xe (32,8), когда $G_2^m = 0,3, 0,4, 0,3$.

Таким образом, с максимальной погрешностью около 20% можно положить

$$G_1 = 0, \quad G_2(m^* \leq 10) = 0 \quad (3.1)$$

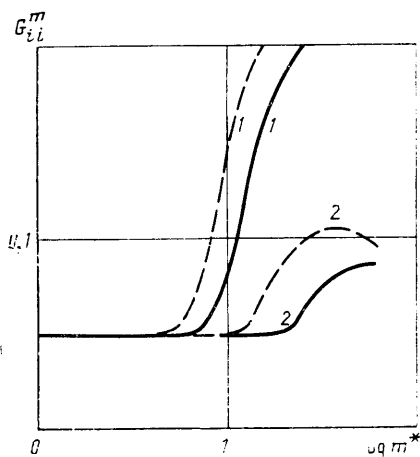
Дальнейшие упрощения менее принципиальны и состоят в возможности при небольших m^* пренебречь не только G_i , но и отличием x от единицы, т. е. величинами W_i . Значения $W_i^m \leq 0,2$ при $m^* \leq 6$ (W_1^m) и $m^* \leq 5$ (W_2^m), за исключением смеси Ne — SO_2 , когда $|W_2| \leq 0,27$, т. е. с указанной погрешностью и исключением

$$W_1(m^* \leq 6) = 0, \quad W_2(m^* \leq 5) = 0 \quad (3.2)$$

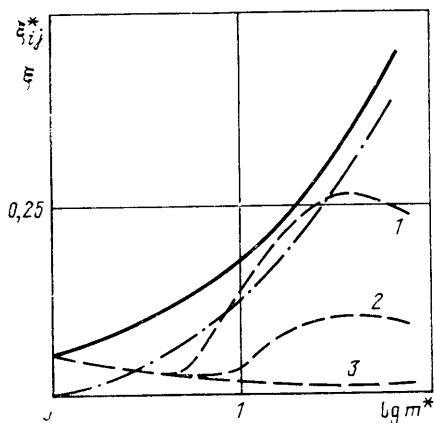
Максимальны требования к точности расчётов функций G_{ii} , так как соответствующие слагаемые фигурируют в главном приближении по числу Кнудсена. При $\sigma=0$

$$G_{ii} = -f_i, \quad f_i^m = 0,052 \quad (3.3)$$

В общем случае $G_{ii}(x_i=0) = -f_i^m$. Результаты расчётов представлены



Фиг. 1



Фиг. 2

на фиг. 1. Сплошными кривыми аппроксимированы максимальные (для каждого m^*) значения G_{11}^m , штриховыми — G_{22}^m . На фиг. 1, 2 кривая 1 соответствует $\sigma=1$, 2 — $\sigma=1/2$, 3 — $\sigma=0$. В широких интервалах значений m^* величины G_{ii}^m практически совпадают с 0,052 («плато» на фиг. 1), т. е. G_{ii} даются формулой (3.3). Более того, величина $f_i^m=0,052$, т. е. по сравнению с единицей близка к погрешности метода. Это значение реализуется при $x_i=0$, когда условие для π_i не нужно. Поэтому можно положить

$$G_{ii}(m^* \lesssim 10) = 0 \quad (3.4)$$

При больших m^* имеем $G_{ii}^m(\sigma=0,5) \ll G_{ii}^m(\sigma=1)$, при $\sigma=1$ значения $G_{11}^m \lesssim 0,3$, $G_{22}^m \lesssim 0,4$.

Далее, функция $G_{\pi}(x_i)$ положительна, равна нулю при $x_i=0$ и 1. В случае максвелловских молекул $G_{\pi}=0$, так как она определяется термодиффузией. Для реальных потенциалов, когда $\sigma \neq 0$, значения G_{π}^m не малы и резко растут с ростом m^* . Например, при $\sigma=0,5$ имеем $G_{\pi}^m \lesssim 0,2, 0,4, 3, 16$ соответственно при $m^* \leq 2, 3, 10, 65,6$, а при $\sigma=1$ — соответственно $G_{\pi}^m \lesssim 0,4, 0,8, 8, 53$. Тем не менее упрощения возможны и здесь и не только при $\sigma=0$, но и при $\sigma=0,5$, $m^* \leq 2$.

Именно если $u_1 \approx u_2$, то отношения (по максимуму) скоростных членов выражений для π_i будут

$$\max_{x_i, T_w} \left| \frac{\xi_{ij} u_j}{\xi_{ii} u_i} \right| \approx \max_{x_i, T_w} \left| \frac{\xi_{ij}}{\xi_{ii}} \right| \equiv \varepsilon^*$$

Результаты расчетов ξ_{ij}^* представлены на фиг. 2 (сплошная кривая — ξ_{12}^* , штриховые кривые аппроксимируют максимальные значения ξ_{21}^* для каждого m^*). В случае небольших m^* величина ξ_{21}^* мала и ею можно пренебречь. Более того, при $\sigma=0,5$ она достаточно мала при всех m^* . Памятуя сказанное о влиянии термодиффузии, т. е. опираясь на вариант $\sigma=0,5$, и считая пренебрежимо малой величину 0,05 по сравнению с единицей, получаем

$$\xi_{21}(m^* \lesssim 10) = 0 \quad (3.5)$$

Величина ξ_{12}^* не зависит от σ и значительно больше величины ξ_{21}^* . Однако при небольших m^* мал вклад слагаемого W_{π} в ξ_{12} по сравнению с

ξ_{11} . Обозначим этот относительный вклад через величину ξ , равную ξ_{12}^* при замене в последней $1+W_\pi$ на W_π (штрихпунктирная кривая на фиг. 2 для $\sigma=0,5$). При $m^* \leq 4$ с погрешностью около 5% можно пренебречь величиной W_π в ξ_{12} по сравнению с ξ_{11} (для молекул — упругих сфер при $m^* \leq 3$).

Если же $|u_i| \ll |u_j|$, то в основном испаряется j -й компонент и условие для π_i можно опустить.

Кратко остановимся на точности метода Максвелла. Этот вопрос имеет важное практическое значение, так как в силу простоты метода его можно легко распространить на общий случай граничных условий для многокомпонентных смесей реагирующих газов. Большие ошибки метод дает применительно к коэффициенту ξ_{ij} при u_j в скачках давлений. Сравнивая (2.5) с (2.13), (2.14), (2.17), видим, что при малых m^* или при $\sigma \approx 0$, когда можно пренебречь величиной G_π , коэффициенты ξ_{ij} различаются в 2 раза. С увеличением m^* при $\sigma=0$ (1) различие, вообще говоря, увеличивается. По-видимому, такие резкие различия двух приближенных методов говорят об их недостаточной точности по меньшей мере для немалых m^* , когда велико влияние термодиффузии и необходима более точная постановка задачи, но, как установлено выше, при небольших m^* рассматриваемые слагаемые малы. Среди остальных коэффициентов максимальное различие (при небольших m^*) имеет место в коэффициенте при h в температурном скачке: отношение первых членов (2.7) и (2.3) равно $(1+l_1)/2 \approx 1,16$, т. е. метод Максвелла занижает результат на 16%. Наконец, $\xi_{ij} \sim 1,2 \cdot (1-f_i)$, согласно методу Максвелла $\xi_{ij} \sim 1,12 (1-2 f_i)$. Если пренебречь f_i , то метод Максвелла занижает ξ_{ij} на 7%.

Подведем итоги. Кардинальные упрощения можно осуществить в коэффициентах формулы (2.7) для скачка температуры и в коэффициентах при h в выражениях (2.13) для скачков давлений π_i : в широких интервалах значений отношения масс молекул m^* величины G_π , G_i пренебрежимо малы, при небольших m^* несущественны W_π , W_i и коэффициенты приводятся к «однокомпонентному» виду (см. [1] и (3.1), (3.2)). Также малы величины G_{ii} в коэффициентах при u_i в π_i (см. (3.4)). Перекрестным членом, пропорциональным u_1 , в формуле для скачка давления тяжелого компонента π_2 можно пренебречь согласно (3.5). В аналогичном члене π_1 , пропорциональном u_2 , можно положить $W_\pi=0$, т. е. привести к «однокомпонентному» виду, для $m^* \leq 4$. Изложенные упрощения тем более справедливы при малых значениях коэффициентов испарения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волков И. В., Галкин В. С. Анализ коэффициентов скольжения и температурного скачка в бинарной смеси газов // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 6. С. 152–159.
2. Галоян В. С., Яламов Ю. И. Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван: Луйс, 1985. 207 с.
3. Коган М. Н., Макашев Н. К. О роли слоя Кнудсена в теории гетерогенных реакций и в течениях с реакциями на поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 6. С. 3–11.
4. Макашев Н. К. Испарение, конденсация и гетерогенные химические реакции при малых значениях числа Кнудсена // Уч. зап. ЦАГИ. 1974. Т. 5. № 3. С. 49–62.
5. Макашев Н. К. Кнудсеновский слой на телах с химическими реакциями на поверхности при наличии компонента газовой смеси, не участвующего в реакции // Уч. зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 6. С. 56–67.
6. Богданов А. В., Горбачев Ю. Е., Кульгинов Д. В., Павлов В. А. Исследование кнудсеновского слоя для различных моделей межфазного взаимодействия: Препринт № 1051. Л.: ФТИ АН СССР, 1986. 36 с.
7. Ферцигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 554 с.
8. Вальдман Л. Явления переноса в газах при среднем давлении // Термодинамика газов. М.: Машиностроение, 1970. С. 169–414.
9. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 510 с.

10. Кузнецов М. М. Кинетический анализ феноменологических схем баланса потоков на поверхности тел // Числ. методы мех. сплошной среды. 1974. Т. 5. № 3. С. 54–63.
11. Асмолов Е. С., Коган М. Н. О роли слоя Кнудсена в задаче об испарении капли // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 1. С. 127–131.
12. Носик В. И. Сопряженная задача испарения в длинном канале при малых числах Рейнольдса // Инж.-физ. журн. 1987. Т. 52. № 3. С. 374–381.
13. Асмолов Е. С., Борис А. Ю. О граничных кинетических эффектах в задаче медленного обтекания испаряющейся теплопроводной сферической частицы // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 2. С. 134–139.
14. Коган М. Н., Носик В. И. Об отражении звуковой волны испаряющейся поверхностью // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 4. С. 149–156.

Москва

Поступила в редакцию
5.XI.1990