

УДК 533.6.011.72:537.84

© 1991 г.

О. Л. ФИЛИПОВА

**УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКИХ МГД УДАРНЫХ ВОЛН
В ИДЕАЛЬНОМ СОВЕРШЕННОМ ГАЗЕ**

В 50-х годах в ряде работ [1-4] аналитически была исследована линейная устойчивость плоских газодинамических изолированных ударных волн в идеальной двухпараметрической среде с произвольным уравнением состояния. В частности, было показано, что плоские газодинамические ударные волны в идеальном совершенном газе всегда устойчивы. В середине 60-х годов появились работы [5-6], рассматривающие в линейном приближении устойчивость быстрой [5-6] и медленной [6] плоских МГД ударных волн. Трудности, возникающие при исследовании устойчивости МГД ударных волн, по сравнению с аналогичными задачами газовой динамики связаны с увеличением числа уходящих от волны малых возмущений и неявной зависимостью волнового вектора k магнитозвуковых возмущений от их частоты ω при произвольной ориентации магнитного поля по отношению к волне. Поэтому в отличие от [1-4] в [5-6] были получены только частные результаты. В [5] аналитически были получены условия устойчивости «нормальной» и «поперечной» быстрых МГД ударных волн ($H \perp n$, $H \parallel n$) в идеальной двухпараметрической среде с произвольным уравнением состояния. Было показано, что для совершенного газа с произвольным γ эти условия выполняются. В [6] численно исследовалась устойчивость быстрой и медленной МГД ударных волн в идеальном совершенном газе с $\gamma = 5/3$ относительно двумерных возмущений их поверхности (волновой вектор возмущений лежит в плоскости течения) при произвольной ориентации магнитного поля перед волной, но при фиксированной интенсивности ударной волны (число Маха перед волной равно двум), что приводило к неоправданным ограничениям на отношение газодинамического и магнитного давлений перед волной.

Исследование устойчивости МГД ударных волн при произвольных значениях определяющих параметров относительно трехмерных возмущений впервые было проведено в [7]. Было показано, что быстрые МГД ударные волны, как и медленные, могут быть неустойчивыми. В пространстве определяющих параметров были построены области неустойчивости быстрых и медленных волн при различных углах наклона волнового вектора возмущений к плоскости основного течения.

В работе [8] рассматривалась двумерная устойчивость быстрой и медленной МГД ударных волн в полнотропном газе для предельных случаев слабого и сильного поля за волной ($N_2 = H_2^2 / \gamma \mu p_2 \ll 1$, $N_2 \gg 1$ соответственно). Обнаружена неустойчивость медленных волн в малой окрестности линии в трехмерном пространстве параметров задачи.

1. В линейном приближении методом, предложенном в [5], исследуется устойчивость плоских изолированных быстрых МГД ударных волн в идеальном совершенном газе с $\gamma = 5/3$.

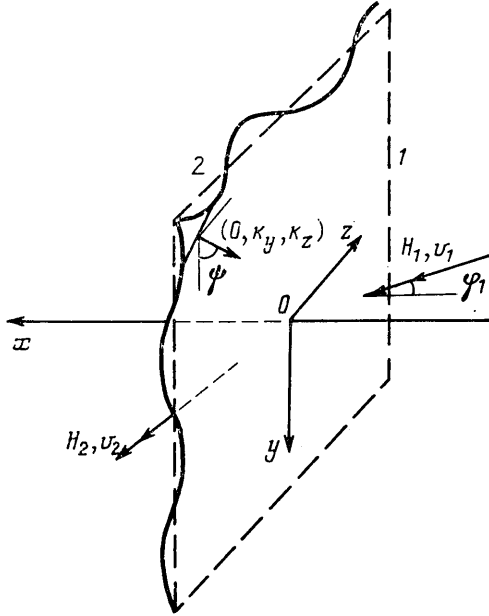
Соотношения на МГД ударных волнах имеют вид [9]

$$\begin{aligned} \{(\mathbf{Hn})\} &= 0, \quad \{(\mathbf{E}\tau_{1,2})\} = 0, \quad \{\rho(\mathbf{v}n)\} = 0 \\ \left\{ \rho n + \rho \mathbf{v}(\mathbf{v}n) - \frac{\mathbf{H}(\mathbf{H}n)}{4\pi} + \frac{n\mathbf{H}^2}{8\pi} \right\} &= 0 \\ \left\{ \left(\frac{\gamma p}{\gamma - 1} + \frac{\rho v^2}{2} \right) (\mathbf{v}n) - \frac{(\mathbf{H}n)(\mathbf{v}H)}{4\pi} + \frac{\mathbf{H}^2(\mathbf{v}n)}{4\pi} \right\} &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\{A\} = A_2 - A_1$$

Здесь \mathbf{n} — нормаль к поверхности разрыва, τ_1, τ_2 — единичные координатные векторы в плоскости разрыва.

Перейдем в систему координат, связанную с невозмущенным разрывом так, что ось x нормальна к поверхности волны, оси y и z лежат в плоскости волны, векторы скорости и магнитного поля по обе стороны разрыва параллельны друг другу и лежат в плоскости xy . Индекс 1 соответствует области перед волной, 2 — области за волной (фиг. 1). Будем рассматривать [1–7] специальный тип возмущений поверхности ударной волны и параметров течения $\sim \exp(i(k_y y + k_z z - \omega_b t))$, где k_y и k_z действительны, а $\text{Im } \omega_b > 0$. Предположим также, что возмущения параметров течения $\delta \mathbf{H}$,



Фиг. 1

δv , δp и $\delta \rho$ стремятся к нулю при $x \rightarrow \pm \infty$. Это соответствует отсутствию переноса энергии с бесконечности; таким образом, экспоненциальный рост возмущений определяется свойствами самой ударной волны.

Так как рассматриваемая волна — быстрая ($v_{x1} \geq a_{+1}$, $a_{+2} \geq v_{x2} > a_{-2}$; $a_{\pm i}$, a_{-i} — скорости быстрых магнитозвуковых и альфвеновских возмущений соответственно, индекс i ($i=1, 2$) указывает область распространения), в область 1 возмущения не проникают. Возмущенное течение в области 2 описывается системой дифференциальных уравнений [9]

$$\left(D \frac{\partial}{\partial t} + E \frac{\partial}{\partial x} + F \frac{\partial}{\partial y} + G \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{U} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь $\mathbf{U} = (\delta v_x, \delta v_y, \delta v_z, \delta p, \delta H_x, \delta H_y, \delta H_z)$ — вектор возмущений; у симметричных матриц $\|D\|$, $\|E\|$, $\|F\|$, $\|G\|$ отличны от нуля члены

$$D_{11} = D_{22} = D_{33} = \rho_2, \quad D_{44} = 1/\gamma p_2, \quad D_{55} = D_{66} = D_{77} = 1/4\pi,$$

$$E_{11} = E_{22} = E_{33} = \rho_2 v_{x2}, \quad E_{44} = v_{x2}/\gamma p_2$$

$$E_{55} = E_{66} = E_{77} = v_{x2}/4\pi$$

$$E_{14} = 1, \quad E_{16} = H_{y2}/4\pi, \quad E_{26} = E_{37} = -H_x/4\pi$$

$$\begin{aligned}
F_{11}=F_{22}=F_{33}=\rho_2 v_{y2}, \quad F_{44}=v_{y2}/\gamma p_2 & \quad (1.3) \\
F_{55}=F_{66}=F_{77}=v_{y2}/4\pi \\
F_{24}=1, \quad F_{15}=F_{37}=-H_{y2}/4\pi, \quad F_{25}=H_x/4\pi \\
G_{34}=1, \quad G_{35}=H_x/4\pi, \quad G_{36}=H_{y2}/4\pi
\end{aligned}$$

Соответствующее дисперсионное уравнение имеет вид [9]

$$\omega_2 \left(\omega_2^2 - \frac{(\mathbf{k}_2 \mathbf{H}_2)^2}{4\pi \rho_2} \right) \left(\omega_2^4 - \mathbf{k}_2^2 \left(c_2^2 + \frac{\mathbf{H}_2^2}{4\pi \rho_2} \right) \omega_2^2 + \mathbf{k}_2^2 c_2^2 \frac{(\mathbf{k}_2 \mathbf{H}_2)^2}{4\pi \rho_2} \right) = 0 \quad (1.4)$$

Здесь c_2 — скорость звука, $\mathbf{k}_2 = (k_{x2}, k_{y2}, k_{z2})$. Так как в выбранной системе координат, связанной с разрывом, газ за ним движется со скоростью $(v_{x2}, v_{y2}, 0)$, $\omega_2 = \omega_b - v_{x2} k_{x2} - v_{y2} k_{y2}$. Ударная волна — быстрая, поэтому из семи корней уравнения (1.4) шесть соответствуют уходящим от разрыва волнам ($\text{Im } k_{x2} > 0$) и одно — приходящей волне ($\text{Im } k_{x2} < 0$).

Ударная волна произвольного типа, для которой все возмущения в области 1 являются приходящими, а в области 2 — все, кроме одного, уходящими, экспоненциально неустойчива тогда и только тогда, когда уравнение

$$F(\omega_b, k_z/k_y) = \mathbf{U}_1^T E \mathbf{U}_0 = 0 \quad (1.5)$$

имеет корни с $\text{Im } \omega_b > 0$ [5]. Здесь \mathbf{U}_1 — собственный вектор возмущения, приходящего на волну из области 2 ($\text{Im } k_{x2} < 0$), \mathbf{U}_0 — вектор возмущений за волной, $\|E\|$ — матрица из (1.2). Так как быстрая МГД ударная волна удовлетворяет этим условиям, в дальнейшем будем искать в верхней полуплоскости $\text{Im } \omega_b > 0$ корни уравнения (1.5).

Перепишем матрицу $\|E\|$ и дисперсионное уравнение (1.4) в безразмерных переменных

$$\begin{aligned}
(U_i, V_i) &= \frac{\sqrt{4\pi\rho_i}(v_{xi}, v_{yi})}{\sqrt{H_x^2 + H_{y1}^2}}, \quad (h, h_i) = \frac{(H_x, H_{y1})}{\sqrt{H_x^2 + H_{y1}^2}} \\
P_i &= \frac{4\pi p_i}{H_x^2 + H_{y1}^2}, \quad \chi = \frac{\rho_1}{\rho_2} \\
p_i' &= \frac{4\pi\delta p_i}{H_x^2 + H_{y1}^2}, \quad (u_i', v_i', w_i') = \frac{\sqrt{4\pi\rho_i}(\delta v_{xi}, \delta v_{yi}, \delta v_{zi})}{\sqrt{H_x^2 + H_{y1}^2}} \\
(H_{xi}', H_{yi}', H_{zi}') &= \frac{(\delta H_{xi}, \delta H_{yi}, \delta H_{zi})}{\sqrt{H_x^2 + H_{y1}^2}}, \quad \rho_i' = \frac{\delta\rho_i}{\rho_i} \quad (1.6)
\end{aligned}$$

$$\omega_{i,b}' = \frac{\sqrt{4\pi\rho_2}\omega_{i,b}}{\sqrt{(H_x^2 + H_{y1}^2)(k_y'^2 + k_z'^2)}}, \quad (k_{xi}', k_{y}', k_{z}') = \frac{(k_{xi}, k_y, k_z)}{\sqrt{k_y^2 + k_z^2}}$$

$$E_{11}=E_{22}=E_{33}=E_{55}=E_{66}=E_{77}=U_2$$

$$E_{44}=U_2/\gamma P_2, \quad E_{14}=1, \quad E_{16}=h_2, \quad E_{26}=E_{37}=-h \quad (1.7)$$

$$\omega_2' (\omega_2'^2 - (k_{x2}' h + k_{y2}' h_2)^2) (\omega_2'^4 - (k_{x2}'^2 + 1) ((h^2 + h_2^2 + \gamma P_2) \omega_2'^2 - \gamma P_2 (k_{x2}' h + k_{y2}' h_2)^2)) = 0 \quad (1.8)$$

Опустим в дальнейшем штрихи и индекс 2 при амплитудах возмущений, ω_2' и \mathbf{k}_2' . Система (1.2) в безразмерных переменных примет вид

$$\begin{aligned}
-\omega u + k_x p + h_2 k_x H_y - h_2 k_y H_x &= 0 \\
-\omega v + k_y p + h k_y H_x - h k_x H_y &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\omega w + k_z p + h k_z H_x + h_2 k_z H_y - (h k_x + h_2 k_y) H_z &= 0 \\
-\omega H_x - h_2 k_y u + h k_y v + h k_z w &= 0 \\
-\omega H_y - h k_x v + h_2 k_x u + h_2 k_z w &= 0 \\
-\omega H_z - (h k_x + h_2 k_y) w &= 0, \quad p = \gamma P_2 \rho \\
-\omega \rho + k_x u + k_y v + k_z w &= 0
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Из (1.9) получим, что в магнитозвуковых волнах безразмерные возмущения параметров течения выражаются через возмущение плотности ρ следующим образом:

$$\begin{aligned}
H_y &= \frac{(h_2(k_x^2+1) - k_y(h k_x + h_2 k_y)) \omega^2}{(\omega^2 - (h k_x + h_2 k_y)^2)(k_x^2+1)} \rho \\
H_x &= \frac{(k_x^2+1)h - (h k_x + h_2 k_y)k_x}{h_2(k_x^2+1) - k_y(h k_x + h_2 k_y)} H_y \\
u &= -\frac{\omega(H_x - h\rho)}{h k_x + h_2 k_y}, \quad v = -\frac{\omega(H_y - h_2\rho)}{h k_x + h_2 k_y} \\
H_z &= -\frac{k_z(\gamma P_2 \rho + h H_x + h_2 H_y)(h k_x + h_2 k_y)}{\omega^2 - (h k_x + h_2 k_y)^2} \\
w &= -\frac{\omega H_z}{h k_x + h_2 k_y}, \quad p = \gamma P_2 \rho
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Соотношения на быстрой МГД ударной волне (1.1) после линеаризации и обезразмеривания приводятся к виду

$$A\mathbf{U} = i\mathbf{b}a \tag{1.11}$$

Здесь a — амплитуда колебаний разрыва, отнесенная к длине волны возмущения, $\mathbf{U} = (u, v, w, p, \rho, H_x, H_y, H_z)$. У матриц $\|A\|$, \mathbf{b} отличны от нуля элементы

$$\begin{aligned}
A_{16} &= 1, \quad A_{23} = h, \quad A_{20} = -U_2, \quad A_{31} = h_2, \quad A_{32} = -h \\
A_{36} &= -V_2, \quad A_{37} = U_2, \quad A_{44} = 1, \quad A_{45} = U_2 \\
A_{51} &= 2U_2, \quad A_{54} = 1, \quad A_{55} = U_2^2, \\
A_{56} &= -h, \quad A_{57} = h_2, \\
A_{61} &= V_2, \quad A_{62} = U_2, \quad A_{65} = U_2 V_2, \quad A_{66} = -h_2 \\
A_{67} &= -h, \quad A_{73} = U_2, \quad A_{78} = -h \\
A_{81} &= \frac{\gamma P_2}{\gamma - 1} + \frac{3U_2^2 + V_2^2}{2} + h_2^2, \quad A_{82} = U_2 V_2 - h h_2 \\
A_{84} &= \gamma U_2 / (\gamma - 1), \quad A_{85} = 0,5 U_2 (U_2^2 + V_2^2) \\
A_{86} &= -V_2 h_2, \quad A_{87} = U_2 h_2 \\
b_1 &= k_y (h_2 - h_1), \quad b_3 = \omega_b (h_1 - h_2), \quad b_4 = \omega_b (\chi - 1) + k_y (V_2 - V_1 \bar{V}\chi), \\
b_6 &= \omega_b (V_1 \bar{V}\chi - V_2) + k_y (V_2^2 + P_2 - 0,5 (h_2^2 - h_1^2) - P_1 - V_1^2) \\
b_7 &= k_z (P_2 - P_1 + 0,5 (h_2^2 - h_1^2)) \\
b_8 &= \omega_b \left(\frac{\gamma (P_1 - P_2)}{\gamma - 1} + 0,5 (3U_1^2 + V_1^2 - 3U_2^2 - V_2^2) + h_1^2 - h_2^2 \right) + \\
&+ k_y \left(V_2 \left(\frac{\gamma P_2}{\gamma - 1} + 0,5 (U_2^2 + V_2^2) \right) - \frac{V_1}{\bar{V}\chi} \left(\frac{\gamma P_1}{\gamma - 1} + \frac{U_1^2 + V_1^2}{2} \right) \right)
\end{aligned} \tag{1.12}$$

На МГД ударных волнах можно ввести безразмерный параметр ξ так, что скачки всех величин и скорость газа относительно разрыва выразятся через этот параметр, угол наклона φ_1 магнитного поля перед волной к оси x и отношение газодинамического и магнитного давлений перед волной P_1 [10]

$$\begin{aligned} h &= \cos \varphi_1, \quad h_1 = \sin \varphi_1, \quad U_2^2 = (1 + \xi) h^2 \\ \kappa &= 2 \frac{h^2 \xi^2 - (h_1^2 + \gamma P_1 - h^2) \xi - h_1^2}{(\gamma - 1) h^2 \xi^2 - (\gamma - 2) h_1^2 \xi + h_1^2} \\ h_2 &= (\kappa + 1) h_1, \quad U_1^2 = ((\kappa + 1) \xi + 1) h^2, \quad \chi = U_2^2 / U_1^2 \\ V_1 &= \frac{U_1 h_1}{h}, \quad V_2 = \frac{U_2 h_2}{h}, \quad P_2 = P_1 + \kappa \xi h^2 - h_1^2 \kappa \left(1 + \frac{\kappa}{2} \right) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Ограничение, накладываемое на ξ типом МГД ударной волны (быстрая), имеет вид

$$\xi \geq \frac{h_1^2 + \gamma P_1 - h^2 + \sqrt{(h_1^2 + \gamma P_1 - h^2)^2 + 4 h_1^2 h^2}}{2 h^2} = \xi_+ \quad (1.14)$$

Таким образом, невозмущенное течение с одной быстрой МГД ударной волной полностью определяется параметрами (P_1, φ_1, ξ) : $P_1 > 0$, $0 \leq \varphi_1 < \pi/2$, $\xi \geq \xi_+$, причем при $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ и $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$, как было показано в [5], быстрая МГД ударная волна в идеальном совершенном газе устойчива.

Из (1.13) видно, что при $\xi \rightarrow +\infty$, $\kappa = h_2/h_1 \rightarrow 2/(\gamma - 1)$. При значениях начальных параметров (φ_1, P_1) , принадлежащих некоторой области L , ударная адиабата $\kappa(\xi)$ имеет максимум, превышающий $2/(\gamma - 1)$ [10]. Область L определяется неравенством

$$d = (\gamma P_1 - h^2) (\gamma - 1) + h_1^2 < 0 \quad (1.15)$$

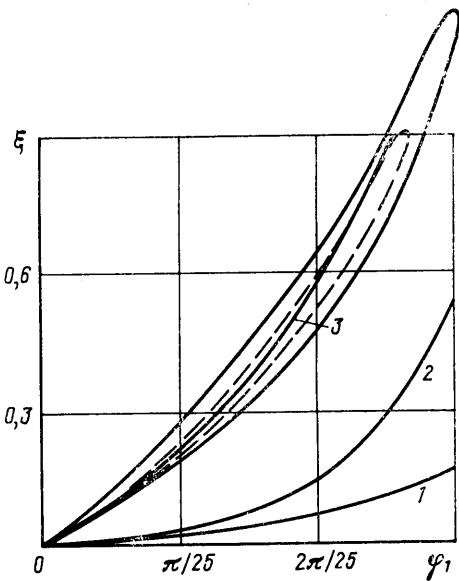
Обозначим через ξ_A интенсивность быстрой МГД ударной волны, поворачивающей поле на максимальный угол, ξ_B — интенсивность волны: $\kappa = 2/(\gamma - 1)$. Из (1.13) получим при $\gamma < 2$

$$\begin{aligned} \xi_B &= - \frac{\gamma h_1^2}{d} \\ \xi_A &= - \frac{h_1^2 h^2 \gamma + \sqrt{\gamma^2 h^4 h_1^4 + h^2 d h_1^2 (\gamma P_1 - h^2 + (\gamma - 1) h_1^2)}}{d h^2} \end{aligned} \quad (1.16)$$

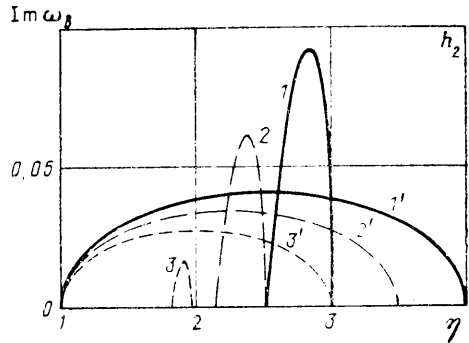
При исследовании устойчивости газодинамических ударных волн авторы [1–4] ограничивались двумерными возмущениями, так как в этом случае плоскость основного течения не выделена. В МГД векторы напряженности магнитного поля перед и за ударной волной вместе с нормалью к ударной волне выделяют плоскость основного течения, поэтому в общем случае необходимо исследовать устойчивость МГД ударных волн относительно трехмерных возмущений. Введем угол наклона ψ вектора $(0, k_y, k_z)$ к плоскости течения: $k_y = \cos \psi$, $k_z = \sin \psi$ (фиг. 1).

2. Во всей области существования решения в виде быстрой МГД ударной волны при различных углах наклона волнового вектора возмущений $0 \leq \psi < \pi/2$ численно методом секущих и методом аргумента искали корни уравнения (1.5) при $\text{Im } \omega_b > 0,001$.

Расчеты показали, что быстрые МГД ударные волны в совершенном газе могут быть неустойчивы. Неустойчивость имеет место для волн, близких к волне с максимальным изменением магнитного поля в случае, когда начальные параметры $(\varphi_1, P_1) \in L$, $P_1 < 0,25$. При этом область неустойчи-



Фиг. 2



Фиг. 3

ности относительно двумерных возмущений шире областей неустойчивости относительно трехмерных возмущений.

Вид областей неустойчивости на плоскости (φ_1, ξ) при фиксированном P_1 указан на фиг. 2 ($P_1=0,001$, сплошная линия — граница области неустойчивости при $\psi=0$, штрихпунктирная — при $\psi=\pi/20$). Цифрами 1–3 отмечены кривые $\xi=\xi_+(\varphi_1)$, $\xi=\xi_B(\varphi_1)$, $\xi=\xi_A(\varphi_1)$. Заметим, что «нормальным» волнам соответствует луч $(\varphi_1=0, \xi>0)$ и эти волны, как и в [5], всегда устойчивы. При $P_1<0,25$ точка $(0, 0)$ плоскости (φ_1, ξ) принадлежит границе области неустойчивости. При этом она является особой (типа 0/0) и при стремлении к ней вдоль различных кривых $\xi=\xi(\varphi_1)$ $\kappa=h_2/h_1-1$ и соответственно U_1 стремятся к различным величинам (вдоль $\xi=\xi_+(\varphi_1)$, $\kappa=0$, $U_1 \rightarrow 1$; вдоль $\varphi_1=0$, $\kappa \rightarrow \infty$, $U_1 \rightarrow \sqrt{1+2(1-\gamma P_1)/(\gamma-1)}$).

При $\varphi_1=0$ отрезок прямой U_1^2 между 1 и $1+2(1-\gamma P_1)/(\gamma-1)$ соответствует МГД ударным волнам, включающим магнитное поле ($h_1=0$, $h_2 \neq 0$) [9]. В них все величины за фронтом ударной волны и скорость самой волны выражаются через отношение газодинамического и магнитного давлений перед фронтом волны P_1 и отношение плотностей на ударной волне $\eta=\rho_2/\rho_1$

$$h_1=0, \quad h=1, \quad U_2=1, \quad V_2=h_2, \quad U_1=\sqrt{\eta}, \quad V_1=0$$

$$P_2=0,5(\gamma-1)\eta^2+(\gamma P_1-\gamma+1)\eta-(\gamma-1)(P_1-0,5) \quad (2.1)$$

$$h_2=\sqrt{2(P_1+\eta-P_2-1)}, \quad P_1<1/\gamma, \quad 1<\eta<1+2(1-\gamma P_1)/(\gamma-1)$$

Обсудим неустойчивость включающих волн. Расчеты показали, что при $P_1<0,25$ включающие МГД ударные волны могут быть неустойчивыми относительно двумерных возмущений. На фиг. 3 указаны соответствующие инкременты $\text{Im } \omega_b(\eta)$ при $P_1=0,001$; 0,1; 0,2 (кривые 1–3) и зависимость $h_2(\eta)$ при тех же значениях (кривые 1'–3'). Неустойчивы волны, сильно меняющие магнитное поле, увеличение начального газодинамического давления гасит неустойчивость.

При фиксированном P_1 увеличение φ_1 также уменьшает инкременты возмущений, т. е. наиболее неустойчивы при $P_1=\text{const}$ включающие ударные волны.

3. В случае медленной МГД ударной волны в область перед волной уходят медленная магнитозвуковая и альфвеновская волны, в область за волной — быстрая и медленная магнитозвуковые, альфвеновская и энтропийная волны. В связи с этим условие (1.5) работы [5] не имеет места.

Воспользуемся обычной процедурой исследования неустойчивости [4—7]. Волнам, уходящим от разрыва в область 2, соответствуют решения дисперсионного уравнения (1.8) с $\text{Im } k_{x_2} > 0$, в область 1 — решения (1.8), в которых индекс 2 заменен на 1, $\omega_1 = \omega_b \sqrt{\chi} - U_1 k_{x_1} - V_1 k_y$ с $\text{Im } k_{x_1} < 0$. В магнитозвуковых волнах все возмущения параметров течения выражаются через возмущение плотности согласно (1.10) (для волны, распространяющейся в область 1, индекс 2 заменяется на 1, $\omega_1 = \omega_b \sqrt{\chi} - U_1 k_{x_1} - V_1 k_y$). В альфвеновских волнах безразмерные возмущения параметров течения выражаются из (1.9) с учетом (1.8) через возмущение H_{zi} следующим образом:

$$\begin{aligned} k_{x_2} &= \frac{\omega_b - (V_2 + h_2) k_y}{U_2 + h}, & k_{x_1} &= \frac{\omega_b \sqrt{\chi} - (V_1 - h_1) k_y}{U_1 - h} \\ H_{yi} &= \frac{h k_z H_{zi}}{(h_i k_{x_i} - h k_y)}, & H_{xi} &= -\frac{h_i H_{yi}}{h}, & u_i &= -\frac{\omega_i H_{xi}}{h k_{x_i} + h_i k_y} \\ v_i &= -\frac{\omega_i H_{yi}}{h k_{x_i} + h_i k_y}, & w_i &= -\frac{\omega_i H_{zi}}{h k_{x_i} + h_i k_y} \\ p_i &= 0, & \rho_i &= 0, & \omega_i &= \omega_b (V \sqrt{\chi})^{2-i} - U_i k_{x_i} - V_i k_y, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

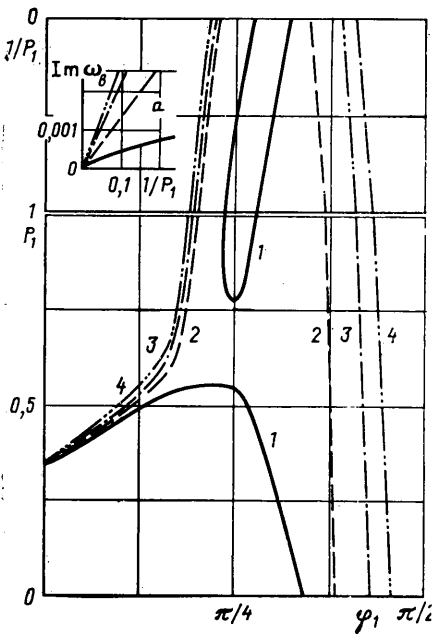
В энтропийных волнах возмущения всех величин, кроме ρ_2 , равны нулю.

Соотношения на ударной волне (1.1) после линеаризации и безразмеривания (1.6) примут вид

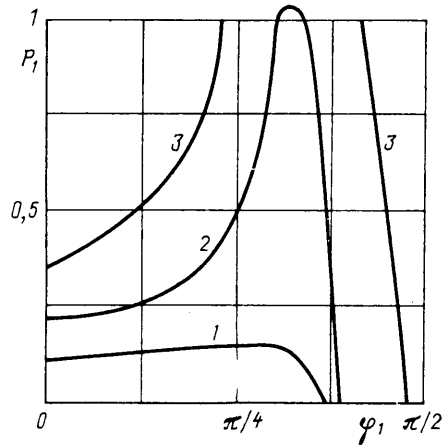
$$\|A\| \mathbf{V} = 0, \quad \mathbf{V} = (\delta \rho_{+2}, \delta \rho_{-2}, \delta \rho_{02}, \delta \rho_{+1}, ia, \delta H_{z2}, \delta H_{z1}) \quad (3.2)$$

Здесь $\delta \rho_+$, $\delta \rho_-$, $\delta \rho_0$, δH_z — амплитуды быстрых и медленных магнитозвуковых, энтропийных и альфвеновских волн соответственно. Индекс 1 или 2 указывает область распространения; a — амплитуда колебаний волны

$$\begin{aligned} A_{1j} &= (-1)^i H_{xj}, & A_{2j} &= (-1)^i (u_j + U_j \rho_j) \chi^{1-i/2} \\ A_{3j} &= (-1)^i (p_j + 2U_j u_j + U_j^2 \rho_j - h H_{xj} + h_i H_{yj}) \\ A_{4j} &= (-1)^i (V_i u_j + U_i V_i \rho_j + U_i v_j - h H_{yj} - h_i H_{xj}) \\ A_{5j} &= (-1)^i \left(\frac{\gamma U_i p_j}{\gamma - 1} + \frac{(U_i^2 + V_i^2) U_i \rho_j}{2} + \left(\frac{\gamma P_i}{\gamma - 1} + \frac{3U_i^2 + V_i^2}{2} + h_i^2 \right) u_j - \right. \\ &\quad \left. - V_i h_i H_{xj} + (U_i V_i - h h_i) v_j + U_i h_i H_{yj} / \chi^{1-i/2} \right) \\ A_{6j} &= (-1)^i (h w_j - U_i H_{zj}) / \chi^{1-i/2} \\ A_{7j} &= (-1)^i (U_i w_j - h H_{zj}), \quad j = 1, \dots, 7, \quad j \neq 5; \quad i = 1, 2 \\ A_{15} &= k_y (h_1 - h_2), & A_{25} &= \omega_b (1 - \chi) + k_y (V_1 \sqrt{\chi} - V_2) \\ A_{35} &= 0, & A_{45} &= \omega_b (V_2 - V_1 \sqrt{\chi}) - k_y (V_2^2 + P_2 - 0,5 (h_2^2 - h_1^2) - P_1 - V_1^2), \\ A_{55} &= \omega_b \left(\frac{\gamma (P_2 - P_1)}{\gamma - 1} + \frac{3U_2^2 + V_2^2 - 3U_1^2 - V_1^2}{2} + h_2^2 - h_1^2 \right) + \end{aligned}$$



Фиг. 4



Фиг. 5

$$+k_y \left(V_1 \left(\frac{\gamma P_1}{\gamma - 1} + \frac{U_1^2 + V_1^2}{2} \right) / \bar{V}_\chi - V_2 \left(\frac{\gamma P_2}{\gamma - 1} + \frac{U_2^2 + V_2^2}{2} \right) \right)$$

$$A_{65} = 0, \quad A_{75} = k_z (P_1 - P_2 + 0,5 (h_1^2 - h_2^2))$$

Здесь i — индекс области распространения возмущения.

В пространстве параметров (P_1, φ_1, ξ) решению в виде медленной МГД ударной волны соответствует область $(P_1 > 0, 0 \leq \varphi_1 < \pi/2, \xi_v > \xi \geq \xi_-)$. Здесь ξ_- — интенсивность медленной магнитозвуковой волны, выключающей магнитное поле ($h_1 \neq 0, h_2 = 0$). В отличие от быстрых МГД ударных волн для медленных волн $\kappa(\xi)$ — монотонна, поэтому дальнейшее рассмотрение для удобства будем вести в пространстве (P_1, φ_1, κ) : $(P_1 > 0, 0 \leq \varphi_1 < \pi/2, 0 \geq \kappa > -1)$.

Во всей области существования решения в виде медленной МГД ударной волны численно методом секущих и методом аргумента ищутся корни уравнения $F(\omega_b, \psi) = \det \|A\| = 0$ с $\text{Im } \omega_b > 0,001, 0 \leq \psi \leq \pi/2$.

На фиг. 4 на плоскости (φ_1, P_1) при $\kappa = -0,9$ указаны области неустойчивости для различных углов наклона волнового вектора возмущений к плоскости течения (кривые 1–4 соответствуют случаям $\psi = 0, \pi/6, \pi/3, \pi/2$). Области неустойчивости вложены друг в друга; наиболее опасны возмущения с волновым вектором, перпендикулярным плоскости течения. Увеличение начального газодинамического давления подавляет неустойчивость при небольших φ_1 ($< 40^\circ$) и $\varphi_1 \sim \pi/2$. Однако существует диапазон значений $\sim 40-70^\circ$, в котором медленная МГД ударная волна неустойчива при любом начальном газодинамическом давлении. На фиг. 4, а указана зависимость $\text{Im } \omega_b$ от $1/P_1$ при $\varphi_1 = \pi/3$ и различных значениях ψ . Значения $\text{Im } \omega_b$ при фиксированных φ_1 стремятся к нулю при неограниченном увеличении начального газодинамического давления. Таким образом, предельный случай данного течения — альфвеновский разрыв в несжимаемой жидкости — нейтрально устойчив в данном диапазоне.

На фиг. 5 на плоскости (φ_1, P_1) указаны области неустойчивости при $\psi = \pi/2$ и различных значениях κ (кривые 1–3 соответствуют случаям

$\kappa = -0,05; -0,15; -0,6$). Волны, близкие к медленным магнитозвуковым ($\kappa \sim 0$), всегда устойчивы. Уменьшение магнитного поля в волне дестабилизирует течение, наиболее неустойчивы волны, близкие к выключающим ($h_1 \neq 0, h_2 = 0$).

В отличие от данных работы [6] в настоящей работе не обнаружена неустойчивость волн, магнитное поле перед которыми почти параллельно фронту волны, т. е. близких к тангенциальному разрыву. В подтверждение правильности полученных результатов была проведена численная проверка необходимых и достаточных условий неустойчивости тангенциальных разрывов [11], являющихся предельными случаями течений с медленными МГД ударными волнами. Расчеты показали, что соответствующие тангенциальные разрывы в магнитной гидродинамике не могут быть неустойчивыми относительно трехмерных возмущений при произвольных κ ($-1 < \kappa \leq 0$) и $P_1 > 0$. Этот же факт (стабилизация течения с тангенциальным разрывом скорости магнитным полем) был отмечен и для других частных случаев тангенциальных разрывов [11].

Таким образом, впервые обнаружена неустойчивость быстрых МГД ударных волн в случаях, когда магнитное поле перед волной близко к нормальному, а начальное газодинамическое давление в несколько раз меньше магнитного. При этом неустойчивы волны, поворачивающие поле на угол, близкий к максимальному. Медленные МГД ударные волны неустойчивы в широком диапазоне определяющих параметров. Увеличение начального газодинамического давления подавляет неустойчивость медленных волн, угол между полем и нормалью перед которыми мал или близок к $\pi/2$. Однако существует область начальных углов наклона поля, в которой при фиксированной интенсивности волны произвольное увеличение начального газодинамического давления не может подавить неустойчивость.

Автор благодарит А. Г. Куликовского и А. А. Бармина за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дьяков С. П. Об устойчивости ударных волн // ЖЭТФ. 1954. Т. 27. Вып. 3. С. 288–295.
2. Egrenbeck J. J. Stability of step shocks // Phys. Fluids. 1962. V. 5. № 10. P. 1181–1195.
3. Иорданский С. В. Об устойчивости плоской стационарной ударной волны // ПММ. 1957. Т. 21. № 4. С. 465–472.
4. Конторович В. М. К вопросу об устойчивости ударных волн // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. Вып. 6(12). С. 1525–1526.
5. Gardner C. S., Kruskal M. D. Stability of plane magnetohydrodynamic shocks // Phys. Fluids. 1964. V. 7. № 5. P. 700–706.
6. Lessen M., Deshpande N. V. Stability of magnetohydrodynamic shock waves // J. Plasma Phys. 1967. V. 1. № 4. P. 463–472.
7. Филиппова О. Л. Устойчивость плоских МГД ударных волн // VI Всесоюз. съезд по теоретической и прикладной механике: Аннот. докл., Ташкент, 24–30 сентября, 1986. Ташкент, 1986. С. 616.
8. Блохин А. М., Дружинин И. Ю. Об устойчивости ударных волн в магнитной гидродинамике // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 36. № 4. С. 13–29.
9. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962. 246 с.
10. Бармин А. А. Исследование поверхностей разрыва с выделением (поглощением) энергии в магнитной гидродинамике // ПММ. 1962. Вып. 5. С. 801–810.
11. Fejer J. A. Hydromagnetic stability at a fluid velocity discontinuity between compressible fluids // Phys. Fluids. 1964. V. 7. № 4. P. 499–503.

Москва

Поступила в редакцию
6.11.1990