

УДК 533.6.011

© 1991 г.

И. Г. БРЫКИНА, В. В. РУСАКОВ, В. Г. ЩЕРБАК

## ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ АНАЛОГИЯ ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ВЯЗКОГО ОБТЕКАНИЯ

Несмотря на развитие в последнее время численных методов решения задач пространственного обтекания тел сверхзвуковым потоком вязкого газа, важное значение имеет разработка различных приближенных методов решения таких задач, которые можно использовать в инженерной практике. Предложенные ранее приближенные подходы исследования пространственного гиперзвукового вязкого обтекания основаны на использовании теории пограничного слоя и применимы при достаточно больших числах Рейнольдса. Но до сих пор не разработаны приближенные подходы исследования представляющих сейчас большой интерес режимов течения, когда эффекты вязкости существенны во всей возмущенной области течения и модель пограничного слоя неприменима.

В настоящей работе предлагается метод решения трехмерных задач обтекания с помощью двумерных решений, применимый при любых числах Рейнольдса. Метод основан на использовании соотношений подобия, полученных при теоретическом анализе приближенного аналитического решения уравнений трехмерного вязкого ударного слоя. Эти соотношения выражают тепловой поток и напряжение трения на боковой поверхности пространственного тела через их значения на поверхности осесимметричного тела. Оценка точности проводится путем сравнения с результатами численных расчетов конечно-разностным методом обтекания тел различной формы. Ранее аналогичные соотношения подобия были получены в [1] для плоскости симметрии затупленного тела.

1. Рассмотрим стационарное пространственное обтекание гладких затупленных тел гиперзвуковым потоком вязкого однородного газа при изменении картины течения от режима размазанного слоя, когда вязкость существенна во всей возмущенной области течения, до режимов с явно выраженным пограничным слоем. Течение будем исследовать в рамках модели тонкого вязкого ударного слоя, предложенной в [2] для осесимметричного обтекания и обобщенной в [3] на случай пространственных течений.

Пусть поверхность обтекаемого тела задана в декартовой системе координат уравнением  $z=f(x, y)$ , вектор скорости набегающего потока  $V_\infty$  совпадает по направлению с осью  $z$ , начало координат помещено в точку торможения потока, а оси  $x$  и  $y$  расположены в плоскостях главных кривизин поверхности в этой точке. Выберем систему криволинейных неортogonalных координат  $\{x^i\}$ , нормально связанную с обтекаемой поверхностью:  $x^3$  — расстояние по нормали к поверхности, а в качестве двух других, выбранных на поверхности, используются декартовы координаты точки пересечения этой нормали с поверхностью:  $x^1=x$ ,  $x^2=y$ ,  $z=f(x^1, x^2)$ .

Уравнения трехмерного гиперзвукового вязкого ударного слоя в системе координат  $\{x^i\}$  имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \rho u^\alpha \sqrt{\frac{g}{g_{(\alpha\alpha)}}} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} (\rho u^3 \sqrt{g}) = 0$$

$$\rho \left( \frac{u^\alpha}{\sqrt{g_{(\alpha\alpha)}}} \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} + u^3 \frac{\partial u^i}{\partial x^3} \right) + \rho A_{\alpha\beta}{}^i u^\alpha u^\beta =$$

$$= -\sqrt{g_{(\gamma\gamma)}g^{\beta\gamma}} \frac{\partial p}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^3} \left( \frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial u^\gamma}{\partial x^3} \right), \quad \gamma=1, 2 \quad (1.1)$$

$$\rho A_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -\frac{\partial p}{\partial x^3}$$

$$\rho \left( \frac{u^\alpha}{\sqrt{g_{(\alpha\alpha)}}} \frac{\partial H'}{\partial x^\alpha} + u^3 \frac{\partial H'}{\partial x^3} \right) = \frac{\partial}{\partial x^3} \left[ \frac{\mu}{\text{Re Pr}} \left( \frac{\partial H'}{\partial x^3} + (\text{Pr}-1) \frac{\partial}{\partial x^3} \left( \frac{g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta}{\sqrt{g_{(\alpha\alpha)}g_{(\beta\beta)}}} \right) \right) \right]$$

$$\frac{p}{\rho} = \varepsilon T, \quad H' = T + \frac{g^{\alpha\beta}}{\sqrt{g_{(\alpha\alpha)}g_{(\beta\beta)}}} u^\alpha u^\beta, \quad \mu = T^\omega, \quad \varepsilon = \frac{\gamma-1}{2\gamma}$$

$$\text{Re} = \frac{R\rho_\infty V_\infty}{\mu(T_0)}, \quad T_0 = \frac{V_\infty^2}{2c_p}, \quad g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$$

$$g_{11} = 1 + f_x'^2, \quad g_{12} = f_x' f_v', \quad g_{22} = 1 + f_v'^2, \quad g = 1 + f_x'^2 + f_v'^2$$

Здесь и далее суммирование по индексам, заключенным в круглые скобки, не производится,  $\alpha, \beta, \gamma=1, 2$ ;  $\rho_\infty \rho$  — плотность;  $\rho_\infty V_\infty^2 p$  — давление;  $\mu(T_0)$  — коэффициент вязкости;  $H' V_\infty^2/2$  — полная энтальпия;  $T T_0$  — температура;  $u^i V_\infty$  ( $i=1, 2, 3$ ) — компоненты вектора скорости;  $R$  — характерный линейный размер, в качестве которого был выбран один из радиусов главных кривизн в точке торможения;  $\text{Pr}$  — число Прандтля;  $\text{Re}$  — число Рейнольдса. Индексом  $\infty$  отмечены значения величин в невозмущенном потоке, коэффициенты  $A_{\alpha\beta}^i(x^1, x^2)$  приведены в [4].

На поверхности тела задаются граничные условия, учитывающие скорость скольжения и скачок температуры

$$x^3=0: u^\alpha = \frac{2-\theta}{\theta} \sqrt{\frac{\gamma\pi}{\gamma-1}} \frac{\mu}{\rho \text{Re} \sqrt{T}} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^3}, \quad \alpha=1, 2, \quad u^3=0$$

$$H' = H_w' + \frac{2-\alpha}{\alpha} \frac{2\gamma}{\gamma+1} \sqrt{\frac{\gamma\pi}{\gamma-1}} \frac{\mu}{\rho \text{Re Pr} \sqrt{T}} \frac{\partial H'}{\partial x^3} \quad (1.2)$$

На ударной волне используются обобщенные условия Рэнкина — Гюнио

$$x^3=x_s^3: \rho \left( u^3 - \frac{u^\alpha}{\sqrt{g_{(\alpha\alpha)}}} \frac{\partial x_s^3}{\partial x^\alpha} \right) = u_\infty^3$$

$$u_\infty^3 (u^\alpha - u_\infty^\alpha) = \frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^3}, \quad p = (u_\infty^3)^2 + \frac{p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2} \quad (1.3)$$

$$u_\infty^3 (H' - H_\infty') = \frac{\mu}{\text{Re Pr}} \frac{\partial}{\partial x^3} \left[ H' + (\text{Pr}-1) \frac{g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta}{\sqrt{g_{(\alpha\alpha)}g_{(\beta\beta)}}} \right]$$

Здесь  $\theta$  — коэффициент диффузного отражения,  $\alpha$  — коэффициент accommodation (при расчетах полагалось  $\theta=1, \alpha=1$ ), индексы  $w$  и  $s$  соответствуют значениям параметров на поверхности тела и на внутренней границе ударной волны.

2. Уравнения (1.1) с граничными условиями (1.2), (1.3) решались интегральным методом последовательных приближений [5]. Этот метод был впервые предложен для двумерных задач пограничного слоя в [6]. Затем в [5] был разработан метод последовательных приближений для решения уравнений вязкого ударного слоя. В первом приближении этого метода получено аналитическое решение задачи, в частности, для числа Стантона, определяемого как

$$c_H = q / \rho_\infty V_\infty (H_\infty' - H_w')$$

где  $q$  — тепловой поток к поверхности.

Исследование полученного решения (оно довольно громоздкое, поэтому здесь не приводится) показало, что тепловой поток на боковой поверхности обтекаемого тела определяется в основном двумя параметрами, связанными с геометрией поверхности: углом  $\alpha$  между вектором нормали к поверхности и вектором скорости набегающего потока и комбинацией  $Re/H \cos \alpha$ , где  $H$  — средняя кривизна поверхности в данной точке, равная полусумме главных кривизн поверхности в этой точке. Для любой линии на боковой поверхности данного тела, проходящей через точку торможения, можно найти такое эквивалентное осесимметричное тело, для которого угол между нормалью к его образующей и направлением набегающего потока  $\alpha^{ax}$  будет изменяться вдоль образующей так же, как угол  $\alpha$  вдоль выбранной линии на поверхности реально обтекаемого тела. Таким образом, тепловой поток на рассматриваемой линии пространственного тела будет равен тепловому потоку вдоль эквивалентного осесимметричного тела (при этом  $\alpha^{ax} = \alpha$ ), если будет совпадать и второй параметр. Это означает, что в качестве числа  $Re$  при определении теплового потока на осесимметричном теле следует использовать  $Re^* = Re H^{ax}/H$ , где  $H^{ax}$  — средняя кривизна поверхности эквивалентного осесимметричного тела.

Проще всего в качестве таких опорных кривых на поверхности пространственного тела выбирать меридиональные сечения. Пусть форма тела задана в цилиндрической системе координат  $r, z, \varphi$  (ось  $z$  проходит через точку торможения и направлена вдоль вектора скорости набегающего потока) уравнением  $r=r(z, \varphi)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= r'_z r / \sqrt{r^2 + r^2 r_z'^2 + r_\varphi'^2} \\ \cos \alpha^{ax} &= r_z^{ax} / \sqrt{1 + (r_z^{ax'})^2} \end{aligned}$$

Нетрудно получить, что для меридионального сечения  $\varphi = \varphi_*$  форма эквивалентного осесимметричного тела будет определяться соотношением

$$r^{ax}(z) = \int_0^z r_z' \left( 1 + \left( \frac{r_\varphi'}{r} \right)^2 \right)^{-1/2} dz \quad (2.1)$$

Таким образом, распределение числа Стантона  $c_H$  по поверхности пространственного тела вдоль меридионального сечения  $\varphi = \varphi_*$  можно определить с помощью соотношения

$$c_H(Re) = c_H^{ax}(Re^*), \quad Re^* = \frac{H^{ax}}{H} Re \quad (2.2)$$

Здесь  $c_H^{ax}$  — число Стантона на поверхности осесимметричного тела, задаваемого формулой (2.1), определяемое из системы уравнений, в которой постоянное число  $Re$  заменяется на переменное  $Re^*$ , зависящее от геометрии поверхности в данной точке. Величины  $H$  и  $H^{ax}$  в цилиндрической системе координат определяются по формулам

$$\begin{aligned} H &= \frac{r_{zz}'' r (r^2 + r_\varphi'^2) + (1 + r_z'^2) (r_{\varphi\varphi}'' r - 2r_\varphi'^2 - r^2) - 2r_z' r_\varphi' (r_{\varphi z}'' r - r_z' r_\varphi')}{2[r^2 (1 + r_z'^2) + r_\varphi'^2]^{3/2}} \\ H^{ax} &= \frac{r^{ax} r_{zz}^{ax''} - (1 + (r_z^{ax'})^2)}{2r^{ax} (1 + (r_z^{ax'})^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

В частных случаях — на линии растекания и в точке торможения — осесимметричная аналогия дает результаты, совпадающие с полученными ранее в [1]. Так, в точке торможения соотношение (2.2) принимает

вид:  $c_H(\text{Re}) = c_H^{\text{ax}}(\text{Re}^*)$ ,  $\text{Re}^* = 2 \text{Re} / (1+k)$ , где  $k$  — отношение главных кривизн поверхности в критической точке. Для линии растекания пространственного тела (обтекаемого без или под углом атаки) эквивалентное тело (2.1) — это тело, образованное вращением соответствующей ветви линии растекания вокруг оси  $z$ .

При умеренных и больших числах  $\text{Re}$ , когда тепловой поток убывает пропорционально  $1/\sqrt{\text{Re}}$ , соотношение подобия (2.2) упрощается:

$$c_H = \sqrt{H/H^{\text{ax}}} c_H^{\text{ax}} \quad (2.4)$$

Здесь  $c_H^{\text{ax}}$  определяется на осесимметричном теле при том же постоянном значении  $\text{Re}$ , что и  $c_H$ .

Результаты численных расчетов показали, что аналогичные соотношения подобия имеют место и для коэффициента трения  $c_f$

$$c_f = \frac{\tau}{\rho_\infty V_\infty^2}, \quad \tau = \mu' \left[ \frac{g_{\alpha\beta}}{\sqrt{g_{(\alpha\alpha)}g_{(\beta\beta)}}} \frac{\partial u^{\alpha'}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial u^{\beta'}}{\partial x^{\alpha'}} \right]$$

$$c_f(\text{Re}) = c_f^{\text{ax}}(\text{Re}^*), \quad \text{Re}^* = \frac{H^{\text{ax}}}{H} \text{Re} \quad (2.5)$$

$$c_f = \sqrt{\frac{H}{H^{\text{ax}}}} c_f^{\text{ax}} \quad (2.6)$$

Здесь штрихами обозначены размерные величины.

Поскольку в данной работе при проведении расчетов использовалась декартова система координат  $x, y, z$ , найдем форму эквивалентного осесимметричного тела в этом случае, т. е. когда поверхность обтекаемого тела задана уравнением  $z=f(x, y)$ . Учитывая, что в этом случае  $\cos \alpha = (1+f_x'^2+f_y'^2)^{-1/2}$ , для радиуса  $r^{\text{ax}}$  эквивалентного осесимметричного тела, соответствующего выбранному меридиональному сечению  $y=ax$ , можно получить параметрическое выражение  $r^{\text{ax}}$  от  $z$

$$r^{\text{ax}}(x) = \int_0^x \frac{f_x'(x, ax) + a f_y'(x, ax)}{\sqrt{f_x'^2(x, ax) + f_y'^2(x, ax)}} dx \quad (2.7)$$

$$z(x) = f(x, ax)$$

Средняя кривизна поверхности пространственного тела в декартовой системе координат определяется по формуле

$$H = \frac{f_{xx}''(1+f_y'^2) + f_{yy}''(1+f_x'^2) - 2f_{xy}''f_x f_y}{2(1+f_x'^2+f_y'^2)^{3/2}}$$

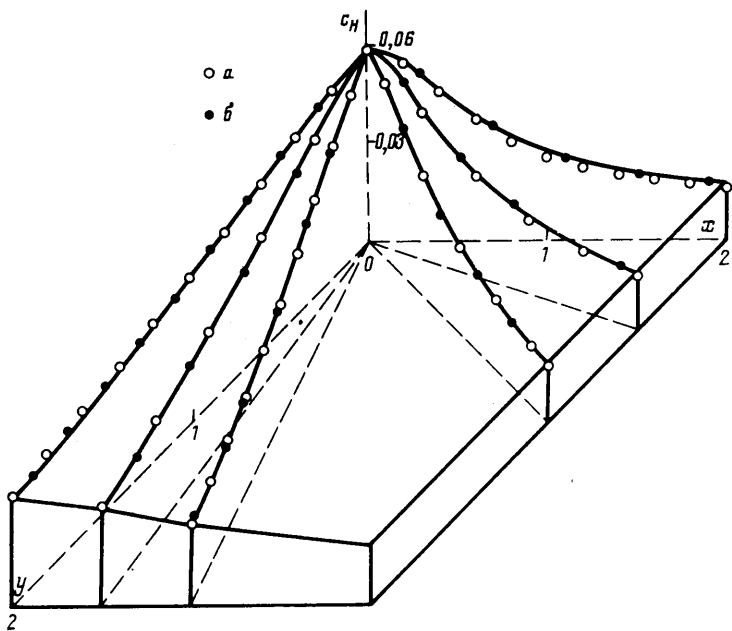
$H^{\text{ax}}$  определяется по формуле (2.3), где

$$r_z^{\text{ax}'} = (f_x'^2 + f_y'^2)^{-1/2}, \quad r_{zz}^{\text{ax}'} = \frac{f_x'(f_{xx}'' + a f_{xy}'') + f_y'(f_{xy}'' + a f_{yy}'')}{(f_x'^2 + f_y'^2)^{3/2} (f_x' + a f_y')}$$

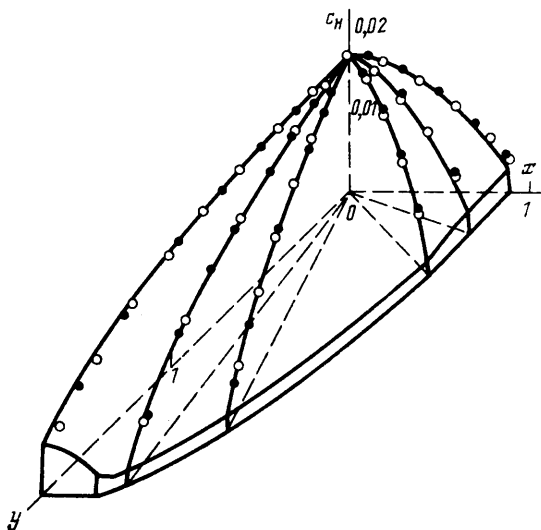
3. Для оценки точности полученных соотношений подобия проводилось численное решение системы уравнений трехмерного вязкого ударного слоя (1.1), а также соответствующей системы уравнений, описывающей осесимметричное течение.

Использовался метод четвертого порядка точности аппроксимации в поперечном направлении и второго — в направлениях, касательных к поверхности [7, 8].

Результаты расчетов, полученные с помощью соотношений подобия, сравнивались с точным численным решением для трехосных эллипсоидов, эллиптических параболоидов и гиперболоидов; соотношение осей эллиптического поперечного сече-



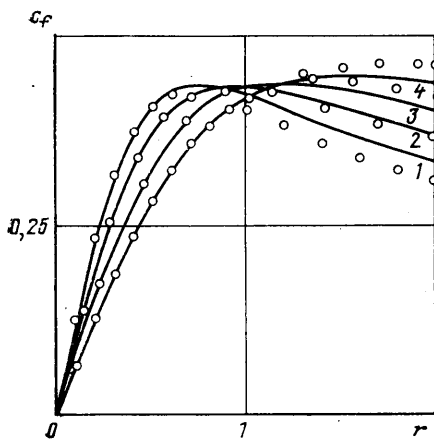
Фиг. 1



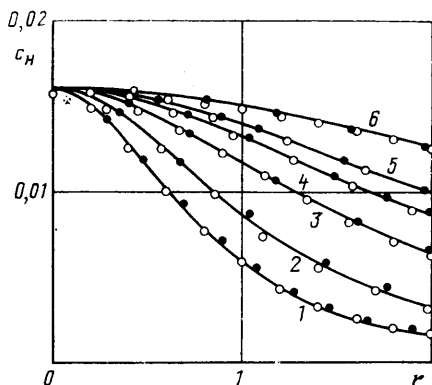
Фиг. 2

ния тела менялось от 1:1 до 1:4. Сравнение проводилось в широком диапазоне изменения газодинамических параметров течения:  $Re=1-10^4$ ,  $\gamma=1,1-1,667$ ,  $T_w=0,01-0,5$ . Некоторые результаты сравнения приведены ниже.

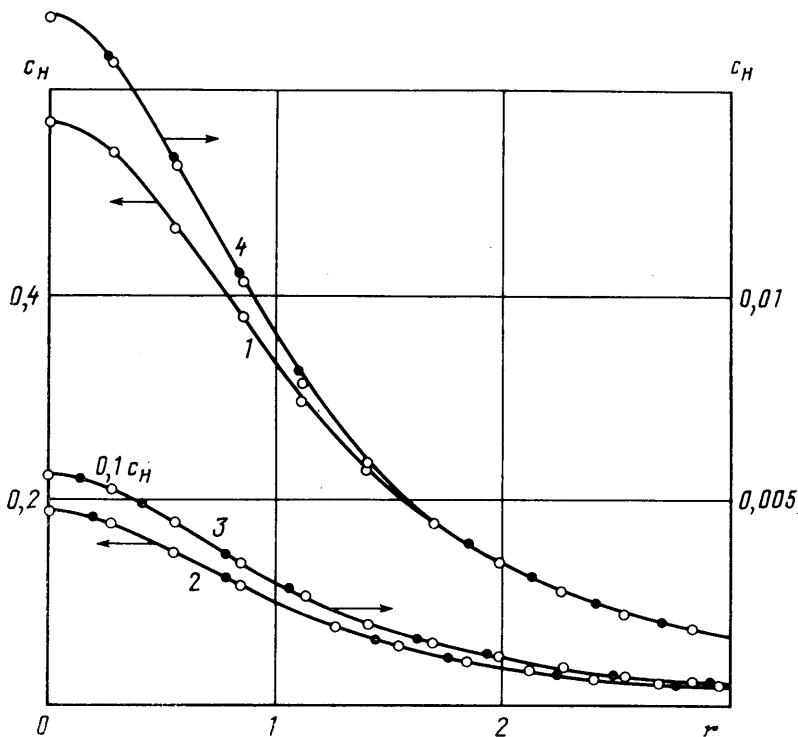
На фиг. 1, 2 представлены распределения числа Стантона вдоль поверхности эллиптического гипербоиоида с углом полураствора  $40^\circ$  в плоскости  $y=0$  и отношением главных кривизн в критической точке  $k=0,5$  и трехосного эллипсоида с соотношением полуосей 1:1,6:1,3. Здесь и далее сплошные линии — точное решение, линии  $a$  — расчет с помощью соотношений (2.2), (2.5), линии  $b$  — по упрощенным соотношениям (2.4), (2.6). На фиг. 3 приведены распределения коэффициента трения  $c_f$  вдоль различных меридиональных сечений на поверхности описанного выше гипербоиоида (линии 1-4 соответствуют значениям  $\varphi=0, 45, 63,4, 90^\circ$ ). На фиг. 4 показаны распределения  $c_H$  вдоль меридиональных сечений эллиптического парабоиоида с  $k=0,25$  (линии 1-6 соответствуют значениям  $\varphi=0, 45, 63,4, 71,6, 76, 90^\circ$ ).



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

На этих фигурах вдоль оси абсцисс откладывается  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$  — расстояние от рассматриваемой точки поверхности до оси  $z$ . Значения параметров обтекания следующие:  $Re = 10^2$  (фиг. 3),  $Re = 10^3$  (фиг. 1),  $Re = 10^4$  (фиг. 2, 4),  $T_w = 0,1$ ,  $Pr = 0,71$ ,  $\gamma = 1,4$ .

Из приведенных результатов следует, что полученные соотношения подобия позволяют получать значения тепловых потоков и напряжения трения на поверхности трехмерных тел с хорошей точностью. Расчеты проводились до расстояний  $\sim 10R$  от точки торможения. С увеличением расстояния точность уменьшается, однако при этом сами тепловые потоки падают. Анализ полученных данных показал, что при уменьшении

Таблица 1

$\gamma$	$x=0$	0,5	1	1,5	2
1,15	0,8	1,2	2,2	3	3,2
1,2	1	1,3	2,6	2,9	2
1,3	0,8	0,2	1,8	2,2	0,1
1,4	0,6	0,3	1,6	1,3	0,3
1,67	0,1	0,4	0,8	0,1	2,5

Таблица 2

$T_w$	$x=0$	0,5	1	1,5	2
0,01	1	0,1	1,7	1,6	0,5
0,1	0,6	0,3	1,6	1,3	0,3
0,5	0,2	0,7	0,7	2	3,5

теплового потока в 5 раз по сравнению со значением в критической точке для разных тел точность составляет 3–10%, в 10 раз – 5–15%.

Анализ результатов расчетов показал, что точность предложенных соотношений подобия практически не зависит от газодинамических параметров обтекания  $Re$ ,  $\gamma$  и  $T_w$ . Это видно из фиг. 5 и табл. 1, 2. На фиг. 5 приведены распределения числа Стантона вдоль боковой поверхности эллиптического параболоида с  $k=0,4$  вдоль меридионального сечения  $\varphi=45^\circ$  при различных значениях числа  $Re$  (линии 1–4 соответствуют  $Re=10, 10^2, 10^3, 10^4$ ). В таблицах приведена погрешность (в %) в определении теплового потока (вдоль того же меридионального сечения) с помощью соотношения (2.2) при различных значениях  $\gamma$  и  $T_w$  и  $Re=100$ .

Существенны отличия предложенного метода от осесимметричной аналогии [9, 10], широко применяемой при решении пространственных задач теории пограничного слоя. Эта аналогия сводит уравнения трехмерного пограничного слоя вдоль линии тока внешнего невязкого течения к двумерным на некотором осесимметричном теле, радиус которого определяется из невязкого решения. При этом требуется расчет трехмерного невязкого течения, т. е. сведение трехмерной задачи к двумерной является неполным. Эта аналогия применима только в теории пограничного слоя, ее нельзя использовать при низких и умеренных числах  $Re$ , когда модель разбиения возмущенной области на невязкое течение и пограничный слой становится неприменимой. Аналогия, предложенная в данной работе, применима при любых  $Re$  – от малых до больших. При ее использовании необходимо знать только геометрию поверхности, что позволяет применять ее для любой газодинамической модели течения. Аналогично можно применять для полных или параболизированных уравнений Навье – Стокса (для этой модели проверка проведена в [11] в окрестности точки торможения) или уравнений вязкого ударного слоя. При этом упрощенные соотношения подобия можно использовать и для уравнений пограничного слоя, где их преимущество перед известной погранслоевой аналогией в том, что они значительно проще и, главное, не требуют расчета трехмерного невязкого течения.

Авторы благодарны Г. А. Тирскому за внимание к работе.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брыкина И. Г., Русаков В. В. Одномерные и двумерные аналогии для пространственных вязких течений в окрестности плоскости симметрии затупленных тел // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 1. С. 117–122.

2. *Cheng H. K.* The blunt-body problem in hypersonic flow at low Reynolds number // JAS Paper. 1963. № 92. P. 100.
3. *Гершбейн Э. А.* К теории пространственного обтекания затупленных тел гиперзвуковым потоком вязкого газа при наличии вдува // Некоторые вопросы механики сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1978. С. 144–156.
4. *Шевелев Ю. Д.* Трехмерные задачи теории ламинарного пограничного слоя. М.: Наука, 1977. 224 с.
5. *Брыкина И. Г.* Интегрирование уравнений гиперзвукового вязкого ударного слоя методом последовательных приближений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1978. Т. 18. № 1. С. 154–166.
6. *Ковач Э. А., Турский Г. А.* Применение метода последовательных приближений к интегрированию уравнений пограничного слоя // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190. № 1. С. 61–64.
7. *Петухов И. В.* Численный расчет двумерных течений в пограничном слое // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М.: Наука, 1964. С. 304–325.
8. *Гершбейн Э. А., Щелин В. С., Юницкий С. А.* Исследование пространственного обтекания тел с каталитической поверхностью при их движении по траектории входа в атмосферу Земли // Космич. исслед. 1985. Т. 23. № 3. С. 416–425.
9. *Eichelbrenner E. A., Oudart A.* Methode de calcul de la couche limite tridimensionnelle // ONERA Publ. 1955. № 76. 49 p.
10. *Cooke J. C.* An axially symmetric analogue for general three-dimensional boundary layers // Aeronaut. Res. Council. Repts and Mem. 1959. № 3200. P. 12.
11. *Гершбейн Э. А., Шербак В. Г.* Исследование гиперзвукового пространственного обтекания затупленных тел в рамках параболизированных уравнений Навье – Стокса // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 4. С. 134–142.

Москва

Поступила в редакцию  
12.IV.1990