

УДК 532.527.013.4

© 1991 г.

**В. Ф. КОПЬЕВ, С. А. ЧЕРНЫШЕВ**

## **МАЛЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ВИХРЕЙ**

Задача о собственных колебаниях стационарных вихрей имеет давнюю предысторию [1–3]. Однако подробное исследование этой задачи удастся провести лишь для некоторого весьма узкого класса вихревых течений, обладающих высокой степенью симметрии.

Наиболее полное решение о собственных колебаниях получено для цилиндрического вихря с постоянной завихренностью в ядре (вихрь Кельвина) [1]. Форма этих возмущений имеет простой вид  $P_l(\rho) \exp(ikz + im\varphi)$ , и задача сводится лишь к определению радиальной структуры возмущений  $P_l(\rho)$  и вычислению собственных частот  $\omega_{ml}(k)$ . Для длинных волн ( $ka \rightarrow 0$ ,  $a$  – радиус сечения вихря) колебания распадаются на характерные семейства с собственными частотами различных масштабов. Это два семейства быстрых осесимметричных: с частотами  $\omega/\Omega_0 \approx (m-1)/2$ ,  $m \geq 2$  (в том числе двумерные с  $k=0$ ), и с частотами  $\omega/\Omega_0 \approx m/2$ ,  $m \geq 1$ ; семейство медленных возмущений с  $m=0$ , симметричных относительно оси цилиндра и имеющих характерную бочкообразную структуру, с частотами  $\omega/\Omega_0 \approx ka/x_j$ , где  $x_j$  – нули функции Бесселя  $J_0(x)$ ; и наконец, медленные изгибные возмущения с  $m=1$  и частотой  $\omega/\Omega_0 \approx (ka)^2 \ln(ka)$ .

Другим стационарным вихрем, колебания которого допускают аналитическое исследование, является вихревое кольцо. Однако такая задача оказывается намного сложнее. В этом случае из симметрии задачи следует только зависимость собственных возмущений от азимутального угла  $\theta$  вида  $\exp(in\theta)$ , а определению подлежит вместе с собственными частотами структура возмущений по сечению ядра кольца.

Тонкое вихревое кольцо ( $\mu \ll 1$ ) в главном по  $\mu$  приближении имеет такую же структуру течения, как и цилиндрический вихрь. Поэтому имеется некоторое соответствие между колебаниями этих течений, наиболее наглядно проявляющееся при исследовании быстрых осесимметричных ( $n=0$ ) колебаний [3, 4].

Эта аналогия сохраняется в общем случае произвольных  $n$  для семейства быстрых колебаний с частотами  $\omega/\Omega_0 \approx (m-1)/2$ . В этом случае форма колебаний цилиндрического вихря может быть выбрана в качестве первого приближения для вихревого кольца [5]. Однако аналогия нарушается для семейства медленных колебаний с частотами  $\omega/\Omega_0 = O(\mu)$ . Хотя в [5] удается получить правильные частоты, выбранная форма колебаний, как показано в настоящей работе, не удовлетворяет закону сохранения импульса.

Для изгибных колебаний с частотой  $\omega/\Omega_0 = O(\mu^2 \ln \mu)$  собственные частоты могут быть определены только с использованием более высоких приближений. Эти колебания исследовались в [2, 6–7] в рамках теории тонкой вихревой нити. В этой теории предполагается, что структура течения в каждом сечении тонкой криволинейной вихревой нити совпадает со структурой течения вписанного стационарного вихревого кольца [8, 9]. Такой подход сводит эволюцию поля завихренности к эволюции средней линии вихревой нити.

В настоящей работе в рамках идеальной несжимаемой жидкости развит новый подход к описанию возмущенного движения в ядрах локализованных стационарных вихрей. С этой целью линеаризованное уравнение Гельмгольца для возмущений завихренности переформулировано на языке поля деформации, непосредственно характеризующего эволюцию формы каждой вихревой линии.

Описание возмущенного движения стационарных вихрей на языке поля деформации используется для исследования колебаний вихревого кольца. Разработан единый метод описания всех типов его собственных колебаний, основанный на разложении решения по специальному базису возмущений, представляющих собой отклик на заданные колебания границы вихря. Главное отличие этого метода от большинства прежних подходов состоит в том, что структура возмущенного поля по сечению кольца не предполагается известной заранее, а определяется динамически в виде последовательных приближений по  $\mu$ . Такой метод позволяет в принципе классифицировать собственные колебания вихревого кольца аналогично вихрю Кельвина.

С помощью предложенной процедуры найдено семейство медленных колебаний вихревого кольца с частотами  $\omega/\Omega_0 = O(\mu)$ . Показано, что эти колебания обладают сложной структурой и представляют собой в главном приближении линейную комбинацию бочкообразного и изгибного возмущений. Смещение средней линии кольца при этом определяется внутренней динамикой возмущений в вихре и не может быть получено в рамках теории тонкой вихревой нити.

**1. Описание возмущений с помощью поля деформации.** Малые возмущения стационарного вихревого течения описываются в несжимаемой жидкости системой уравнений

$$\partial\Omega/\partial t + \text{rot}[\Omega \times V_0] + \text{rot}[\Omega_0 \times v] = 0 \quad (1.1)$$

$$v = \text{rot} A, \quad A = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\Omega(r')}{|r-r'|} dr' \quad (1.2)$$

где  $\Omega_0$  и  $V_0$  — стационарные поля завихренности и скорости, связанные соотношением  $\Omega_0 = \text{rot} V_0$ ;  $\Omega$ ,  $A$ ,  $v$  — возмущения завихренности, векторного потенциала и скорости соответственно. Уравнение Гельмгольца (1.1) описывает эволюцию поля  $\Omega$ , интегральное соотношение (1.2) связывает возмущения скорости и завихренности в каждый момент времени.

Рассмотрим возмущения, при которых поле  $\Omega_0 + \Omega$  изозавихренно стационарному полю  $\Omega_0$  [10]. Эти возмущения могут быть представлены как результат деформации вихревых линий исходного поля  $\Omega_0$ , при которой поле завихренности оказывается замороженным в поле деформации. Для таких возмущений

$$\Omega = \text{rot}[\varepsilon \times \Omega_0], \quad \text{div} \varepsilon = 0 \quad (1.3)$$

где  $\varepsilon$  — поле деформации [10, 11]. Вихревое поле, описываемое уравнением Гельмгольца (1.1), не выходит при своей эволюции из класса изозавихренных. Поэтому для него всегда справедливо (1.3) при некоторой  $\varepsilon(t)$ . Будем использовать поле деформации  $\varepsilon(t)$  как новую динамическую переменную для описания возмущений завихренности.

Подставим (1.3) в (1.1). Используя векторное тождество

$$\text{rot}[a \times \text{rot}[b \times c]] + \text{rot}[b \times \text{rot}[c \times a]] + \text{rot}[c \times \text{rot}[a \times b]] = 0 \quad (1.4)$$

а также учитывая то, что для стационарного течения  $\text{rot}[\Omega_0 \times V_0] = 0$ , получим  $\partial\varepsilon/\partial t + \text{rot}[\varepsilon \times V_0] - v = F$ , где  $F$  — произвольная функция, удовлетворяющая условию  $\text{rot}[F \times V_0] = 0$ .

К полю деформации  $\varepsilon$  может быть добавлена произвольная тривиальная деформация  $\varepsilon'$ , не создающая дополнительной завихренности. Эта деформация удовлетворяет, очевидно, условию  $\text{rot}[\varepsilon' \times \Omega_0] = 0$  и соответствует тождественному преобразованию поля завихренности в себя. Можно показать (см. Приложение), что функцию  $F$  всегда можно скомпенсировать добавлением к основному решению тривиальной деформации. Поэтому, не нарушая общности, можно положить  $F = 0$ .

Таким образом, систему уравнений (1.1), (1.2) для возмущений завихренности можно заменить эквивалентной системой уравнений для поля деформации

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \text{rot}[\varepsilon \times V_0] - v = 0 \quad (1.5)$$

$$v = \text{rot} A, \quad A = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{rot}[\varepsilon \times \Omega_0]}{|r-r'|} dr' \quad (1.6)$$

Хотя уравнение (1.5) после подстановки в него (1.6), так же как и исходное (1.1), есть сложное интегродифференциальное уравнение, решение которого представляет в общем случае значительные трудности, его

преимущество состоит в выделении интегрального члена  $\mathbf{v}$ , который может быть легко устранен взятием операции  $\text{rot}$ .

Рассмотрим ситуацию, когда завихренность сосредоточена в ограниченной области пространства. Векторное поле в ограниченной области  $M$  может быть определено по нормальной компоненте поля на границе  $G(M)$  и ротору и дивергенции этого поля во всей области  $M$ . В случае неограниченной области для однозначного определения векторного поля необходимо также задать циркуляцию этого поля по замкнутому контуру  $C$ , не стягиваемому к нулевому. Следовательно, для локализованных вихрей уравнение (1.5) может быть заменено системой уравнений

$$\text{rot} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} + \text{rot} \text{rot}[\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{V}_0] - \text{rot}[\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\Omega}_0] = 0 \quad (1.7)$$

$$\text{div} \boldsymbol{\varepsilon} = 0, \quad \mathbf{r} \in M$$

$$\left( \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} + \text{rot}[\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{V}_0] - \mathbf{v} \right) \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{r} \in G(M) \quad (1.8)$$

$$\oint_C \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} + \text{rot}[\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{V}_0] - \mathbf{v} \right) d\mathbf{r} = 0 \quad (1.9)$$

где  $\mathbf{n}$  — нормаль к границе  $G(M)$ .

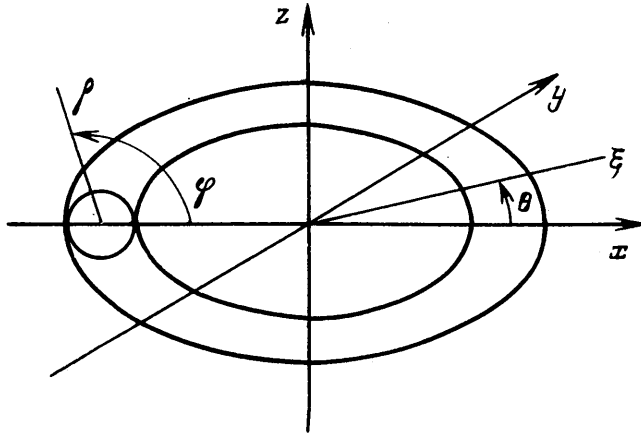
Описание возмущений через поле завихренности или через поле деформации позволяет локализовать задачу, т. е. находить решение только в области, занятой вихрем, хотя возмущение скорости  $\mathbf{v}$  создается во всем пространстве. Поведение поля  $\mathbf{v}$  в области вне вихря, в частности убывание этого поля на бесконечности, автоматически учитывается в интегральном выражении  $\mathbf{v}$  (1.6). Важным преимуществом системы (1.6) — (1.9) является то, что интегральный член необходимо вычислять только на границе вихря.

Система уравнений (1.6) — (1.9) выписана для случая локализованных вихрей в безграничной среде. Очевидно, она легко может быть модифицирована на случай протяженных областей завихренности или сред, ограниченных поверхностями.

**2. Стационарное вихревое кольцо.** Изложенный выше подход к описанию возмущений стационарных вихревых течений используем для исследования колебаний вихревого кольца. Существует стационарное течение, представляющее собой вихревое кольцо с распределением завихренности в сечении кольца  $\boldsymbol{\Omega}_0 = (\Omega_0 \xi / R) \mathbf{e}_0$ , где  $R$  — радиус кольца, цилиндрические координаты  $\xi, \theta$  связаны с декартовыми  $x, y$  соотношениями  $x = \xi \cos \theta, y = \xi \sin \theta$  (фиг. 1) [12]. В случае тонкого вихревого кольца в задаче имеется малый параметр  $\mu$ , представляющий собой отношение размера сечения кольца к его радиусу. В этом случае стационарное поле скорости может быть представлено в виде разложения по  $\mu$ . Два первых члена этого разложения определены в [4, 12]. Сечение кольца в этом приближении имеет круговую форму с радиусом  $a, \mu = a/R$ .

Далее будем пользоваться безразмерными переменными, выбирая в качестве масштабов длины и времени  $a$  и  $\Omega_0^{-1}$  соответственно. Тогда скорость, частоту и т. д. будем относить соответственно к  $a\Omega_0, \Omega_0$  и т. д.

Выберем систему координат, в которой уравнения (1.7) — (1.9) имеют максимально простой вид. Определим координаты  $\sigma, \psi, s$ , в которых контрвариантные компоненты невозмущенных полей завихренности и скорости будут  $\Omega_0^i = (0, 0, 1), V_0^i = (0, 1/2, 0)$ . Невозмущенной границе области завихренности в этих координатах будет соответствовать поверхность  $\sigma = 1$ . Этого всегда можно добиться независимо от количества учитываемых по



Фиг. 1

$\mu$  членов в разложении стационарных характеристик кольца. Координатные линии  $s$  совпадают с линиями завихренности и определяются как  $\theta = \mu s$ . В главном приближении по малому параметру  $\mu$  координаты  $\sigma$ ,  $\psi$  совпадают с полярными координатами  $\rho$ ,  $\varphi$  в сечении кольца, определяемыми как  $\xi = \mu^{-1} + \rho \cos \varphi$ ,  $z = \rho \sin \varphi$  (фиг. 1). С учетом следующего приближения:

$$\rho = \sigma + \frac{5}{8} \mu (\sigma^2 - 1) \cos \psi + O(\mu^2) \quad (2.1)$$

$$\varphi = \psi + \frac{1}{8} \frac{\mu}{\sigma} (5 - 7\sigma^2) \sin \psi + O(\mu^2)$$

Вычисляя в координатах  $\sigma$ ,  $\psi$ ,  $s$  метрический тензор и ковариантные компоненты вектора  $\mathbf{n}$ , в том же приближении получим

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{5}{2} \mu \sigma \cos \psi & -\frac{3}{2} \mu \sigma^2 \sin \psi & 0 \\ -\frac{3}{2} \mu \sigma^2 \sin \psi & \sigma^2 \left( 1 - \frac{\mu \sigma}{2} \cos \psi \right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 2\mu \sigma \cos \psi \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$\sqrt{|g|} = \sigma, \quad n_i = (1 + \frac{5}{4} \mu \cos \psi, 0, 0)$$

**3. Собственные колебания вихревого кольца.** Будем искать собственные колебания в виде  $\varepsilon^i = \varepsilon^i(\sigma, \psi) \exp(i\mu n s + i\omega t)$ , где  $n$  — целое число,  $\omega$  — собственная частота. Система уравнений (1.7) с граничным условием (1.8) в координатах  $\sigma$ ,  $\psi$ ,  $s$  примет вид

$$i\omega \varepsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} (g_{kl} \varepsilon^l) + \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} \left( g_{kl} \frac{\partial \varepsilon^l}{\partial \psi} \right) - i\mu n \sigma \varepsilon^i = 0, \quad \sigma < 1 \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} (\sigma \varepsilon^\sigma) + \frac{\partial \varepsilon^\psi}{\partial \psi} + i\mu n \varepsilon^s = 0, \quad \sigma < 1$$

$$i\omega \varepsilon^\sigma + \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon^\sigma}{\partial \psi} - v^\sigma = 0, \quad \sigma = 1 \quad (3.2)$$

где  $g_{kl}$  — метрический тензор,  $e^{ijk}$  — символ Леви — Чивита с ненулевыми компонентами  $e^{123} = e^{231} = e^{312} = 1$ ,  $e^{213} = e^{132} = e^{321} = -1$ . Условие равенства нулю циркуляции (1.9) для деформации рассматриваемого вида выполняется автоматически.

Нахождение поля деформации, удовлетворяющего системе дифференциальных уравнений (3.1), и вычисление интеграла (1.6), входящего в граничное условие (3.2), представляют собой две сложные задачи. Для того чтобы разделить эти задачи, найдем сначала решение системы (3.1), удовлетворяющее самому общему граничному условию  $\varepsilon^\sigma(1) = f(\psi)$ , где  $f(\psi)$  — произвольная функция. После этого по найденному общему решению вычислим поле  $v^\sigma$  и с помощью граничного условия (3.2) определим неизвестные коэффициенты в общем решении и допустимые собственные частоты  $\omega$ .

Представим  $f(\psi)$  в виде разложения по гармоникам

$$f(\psi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{im\psi} \quad (3.3)$$

Деформацию  $\varepsilon_m(\sigma, \psi)$  будем называть базисной, если она является решением системы уравнений (3.1) с граничным условием  $\varepsilon_m^\sigma = \exp(im\psi)$ ,  $\sigma=1$ . Так как  $\sigma$ -компонента деформации при  $\sigma=1$  представляет собой смещение границы вихря, то базисным деформациям можно придать следующий физический смысл: они описывают внутреннюю структуру вихря при вынужденном движении его границы вида  $\exp(i\omega t + in\theta + im\psi)$ .

Общее решение системы (3.1) в силу (3.3) будет иметь вид разложения по базисным деформациям

$$\varepsilon = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \varepsilon_m(\sigma, \psi) \quad (3.4)$$

где  $a_m$  — неизвестные коэффициенты разложения (3.3), определяемые из граничного условия (3.2). Эти коэффициенты показывают, с каким весом входит каждая базисная деформация в искомое колебание.

Подставляя общее решение (3.4) в граничное условие (3.2), получим систему уравнений для определения форм  $a_m$  и частот  $\omega$  собственных колебаний вихревого кольца

$$i\omega a_m = \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{lm} a_l, \quad A_{lm} = V_{lm} - \frac{im}{2} \delta_{lm} \quad (3.5)$$

$$v_l^\sigma|_{\sigma=1} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} V_{lm} e^{im\psi}$$

где  $\delta_{lm}$  — символ Кроннекера,  $v_l$  — поле скорости (1.6), вычисляемое для базисной деформации  $\varepsilon_l$ .

Таким образом, с помощью введенных базисных деформаций граничное условие (3.2) превратилось из интегродифференциального соотношения в бесконечную систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $a_m$  и частот  $\omega$ .

Решение спектральной задачи (3.1), (3.2), линейной по амплитуде возмущений, для случая тонкого вихревого кольца строится в виде последовательных приближений по параметру  $\mu$ . В каждом приближении система уравнений (3.5) имеет простой вид, позволяющий эффективно находить очередное приближение для форм и частот собственных колебаний.

**4. Вычисление базисных деформаций.** В настоящей работе рассмотрим медленные собственные колебания с частотами  $\omega = O(\mu)$ , т. е.  $\omega = \mu\omega_1 + O(\mu^2)$ ,  $\omega_1 = O(1)$ . В аналогии между возмущениями цилиндрического вихря и вихревого кольца колебаниям кольца с такими частотами соответствуют осесимметричные бочкообразные

возмущения цилиндрического вихря, имеющие вид чередующихся «перетяжек».

Может оказаться, что для вычисления с некоторой точностью возмущений скорости соответствующую базисную деформацию достаточно вычислить с меньшей точностью. Преобразовывая (1.3) с использованием  $\Theta$ - и  $\delta$ -функций к виду  $\Omega^i = i\mu\epsilon^i\Theta(1-\sigma) + \epsilon^i\delta(\sigma-1)\Omega_0^i$ , получим, что деформация  $\sim O(\mu)$  с нулевой нормальной компонентой  $\epsilon^\sigma(1, \psi)$  на границе вихря создает возмущение завихренности порядка  $O(\mu^2)$ . Поэтому для определения возмущений скорости порядка  $O(\mu)$  достаточно вычислить базисную деформацию в главном порядке  $O(1)$ , пренебрегая всеми поправками  $O(\mu)$ , для которых  $\epsilon^\sigma(1, \psi) = 0$ . Еще меньшая точность требуется при вычислении тех составляющих базисных деформаций, контравариантные компоненты которых не зависят от  $\psi$ . Как далее будет показано, такая деформация создает возмущение скорости на границе вихря на два порядка меньше, чем сама деформация. Поэтому, хотя базисные деформации с  $m = \pm 1$  содержат при  $\sigma < 1$  нулевую гармонику по  $\psi$  порядка  $O(1)$ , этой составляющей при вычислении возмущений скорости порядка  $O(\mu)$  можно пренебречь.

Для базисной деформации  $\epsilon_0$  в главном приближении по  $\mu$  из (3.1) имеем

$$\frac{\partial \epsilon_0^\sigma}{\partial \sigma} + \frac{n\sigma}{\omega_1} \epsilon_0^\psi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \sigma} (\sigma^2 \epsilon_0^\psi) - \frac{n\sigma}{\omega_1} \epsilon_0^\sigma = 0, \quad \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} (\sigma \epsilon_0^\sigma) + i\mu n \epsilon_0^s = 0$$

с граничным условием  $\epsilon_0^\sigma = 1$  при  $\sigma = 1$ . Отсюда

$$\epsilon_0^i = (\epsilon_0^\sigma, \epsilon_0^\psi, \epsilon_0^s) = \left( \frac{J_1(z)}{J_1(z_0)}, \frac{i}{\mu\omega_1\sigma} \frac{J_1(z)}{J_1(z_0)}, \frac{i}{\mu\omega_1} \frac{J_0(z)}{J_1(z_0)} \right) \quad (4.1)$$

где  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$  – функции Бесселя,  $z = n\sigma/\omega_1$ ,  $z_0 = n/\omega_1$ .

Для базисных деформаций  $\epsilon_m$  при  $m \neq 0$  в главном приближении по  $\mu$  из (3.1) имеем

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} (\sigma^2 \epsilon_m^\psi) - im \epsilon_m^\sigma = 0, \quad \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} (\sigma \epsilon_m^\sigma) + im \epsilon_m^\psi = 0$$

с граничным условием  $\epsilon_m^\sigma = \exp(im\psi)$  при  $\sigma = 1$ . Отсюда

$$\epsilon_m^i = (\epsilon_m^\sigma, \epsilon_m^\psi, \epsilon_m^s) = (\sigma^{|m|-1} e^{im\psi}, i \operatorname{sign} m \cdot \sigma^{|m|-2} e^{im\psi}, 0) \quad (4.2)$$

**5. Вычисление поля скорости.** Для удовлетворения граничного условия (3.2) необходимо определить компоненту скорости  $v^\sigma$  на границе  $\sigma = 1$ . Вследствие потенциальности поля скорости  $v$  вне вихря формулу (1.6) в этой области удастся представить в виде

$$v = \nabla \Phi, \quad \Phi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{q(r')}{|r-r'|} dr' \quad (5.1)$$

$$q = \operatorname{div} ([\epsilon \times \Omega_0] + \nabla \varphi) \quad (5.2)$$

где  $\varphi$  – произвольное скалярное поле, отличное от нуля только внутри вихря. Так как нормальная компонента скорости непрерывна на границе, выражение (5.1) можно использовать для вычисления  $v^\sigma$  при  $\sigma = 1$ .

Вычисление возмущений скорости с помощью интеграла (5.1) имеет ряд преимуществ по сравнению с (1.6). Во-первых, в (5.1) производится интегрирование скалярной функции, а не векторной, как в (1.6). Во-вторых, производ в выборе поля  $\varphi$ , допускаемый в (5.2), позволяет в некоторых случаях понизить порядок  $q$ .

Рассмотрим деформацию с не зависящими от координаты  $\psi$  контравариантными компонентами  $(\epsilon^\sigma, \epsilon^\psi, \epsilon^s)$ . Воспользуемся неоднозначностью поля  $\varphi$  для вычисления поля скорости, создаваемой такой деформацией. При выборе

$$\varphi' = 0, \quad \varphi'' = \Theta(1-\sigma) \int_{\sigma}^1 \epsilon^\psi(\sigma') \sigma' d\sigma'$$

в главном приближении получим соответственно

$$q' = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} (\sigma^2 \epsilon^\psi) + O(\mu)$$

$$q'' = in\mu^2 \sin \psi \left[ \frac{1}{\sigma} \int_0^\sigma \varepsilon^s(\sigma') \sigma' d\sigma' + \frac{3}{2} \sigma \varepsilon^s(\sigma) - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \delta(\sigma-1) \int_0^1 \varepsilon^s(\sigma') \sigma' d\sigma' \right] - n^2 \mu^2 \int_\sigma^1 \varepsilon^\psi(\sigma') \sigma' d\sigma' + O(\mu^3) \quad (5.3)$$

Сравнивая эти две величины, видим, что удачный выбор скалярного поля  $\Phi$  позволяет на два порядка понизить величину  $q$ . Эти две монополярные плотности создают, естественно, одно и то же поле скорости, однако во втором случае поле скорости (5.1) выражается через  $q''$ , найденное в главном приближении. Для получения этого результата с помощью  $q'$  взаимное сокращение главных членов в интеграле (5.1) потребовало бы вычисления  $q'$  в трех приближениях.

Для рассматриваемых возмущений зависимость от координаты  $s = \theta/\mu$  вида  $\exp(in\theta)$  позволяет провести одно интегрирование в общем виде. В координатах  $\sigma, \psi, s$  интеграл (5.1) преобразуется к виду

$$\Phi = (-1)^n \frac{e^{in\theta}}{2\pi} \int \frac{q(\sigma', \psi') I(\sigma', \psi') \sigma' d\sigma' d\psi'}{1 + 1/2\mu(\delta + \delta') + O(\mu^2)} \quad (5.4)$$

$$I(\sigma, \psi) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2n\theta d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad h = \rho \sin \varphi, \quad h' = \rho' \sin \varphi'$$

$$\delta = \rho \cos \varphi, \quad \delta' = \rho' \cos \varphi', \quad k^2 = 1 - k'^2$$

$$k'^2 = \frac{\mu^2}{4} [(\delta - \delta')^2 + (h - h')^2] + O(\mu^3)$$

Здесь штрихами обозначены величины, по которым ведется интегрирование,  $\rho$  и  $\varphi$  — полярные координаты в плоскости сечения кольца, связанные с координатами  $\sigma$  и  $\psi$  формулами (2.1). Интеграл  $I(\sigma, \psi)$  может быть выражен через эллиптические функции с модулем  $k$ . Интегрирование в (5.4) идет по площади сечения кольца.

Будем рассматривать для простоты только самое низшее по  $n$  колебание рассматриваемого типа ( $n=1$ ) вида  $\exp(i\theta)$ . В этом случае

$$I(\sigma, \psi) = \frac{2}{k^2} E - \frac{2k'^2}{k^2} K - K$$

где  $E$  и  $K$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Используя известные асимптотические разложения эллиптических функций по  $k' = O(\mu)$  получим

$$I(\sigma, \psi) = 1/2 \ln k'^2 + O(\mu^2 \ln \mu) = \frac{1}{2} \ln [1/4 \mu^2 (\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi'))] + O(\mu^2 \ln \mu)$$

Этой оценки достаточно для вычисления двух членов разложения в интеграле (5.4).

Вычислим возмущения скорости, создаваемые базисной деформацией  $\varepsilon_0$ . Используя выражение (4.1) для деформации  $\varepsilon_0^s$ , а также выражение для монополярной плотности (5.3), получим

$$q = \frac{\mu \sin \psi}{J_1(z_0)} \left[ 3/2 J_1(z_0) \delta(\sigma-1) - \left( J_1(z) + \frac{3}{2} z J_0(z) \right) \times \right. \\ \left. \times \Theta(1-\sigma) \right] + \frac{i\mu}{J_1(z_0)} [J_0(z_0) - J_0(z)] \Theta(1-\sigma) \quad (5.5)$$

$$v^\sigma(1, \psi) = i\mu \omega_1 \left[ 1 - \frac{1}{2\omega_1} \frac{J_0(z_0)}{J_1(z_0)} \right] - 2\mu \omega_1^2 \sin \psi \left[ 1 - \frac{1}{2\omega_1} \frac{J_0(z_0)}{J_1(z_0)} \right]$$

Для нулевой базисной деформации расщепление  $v$  на различные гармоники  $\exp(im\psi)$  происходит уже в первом учитываемом члене. Это связано с тем, что член  $O(1)$  в  $q$  обращается в нуль.

Для базисных деформаций  $m = \pm 1$  приходится вычислять два члена разложения по  $\mu$  в (5.4), так как главный член  $O(1)$  сокращается после подстановки в уравнение (3.5). Вычисляя два члена разложения по  $\mu$ , получим

$$q_{\pm 1} = e^{\pm i\psi} \delta(\sigma - 1) + 2\mu \sigma (1 + 1/4 \pm 2i\psi) \delta(\sigma - 1) \mp 4\mu \theta (1 - \sigma) \\ v_{\pm 1}^\sigma(1, \psi) = \pm 1/2i [e^{\pm i\psi - 3/4} \mu e^{\pm 2i\psi}].$$

Для произвольной базисной деформации  $|m| \geq 2$  (4.2) скорость достаточно вычислить в главном приближении. Вычисляя  $q$  и подставляя в интеграл (5.4), получим

$$v_m^\sigma(1, \psi) = 1/2i \operatorname{sign} m \cdot e^{im\psi}, \quad |m| \geq 2$$

**6. Форма собственных колебаний.** Перейдем теперь к удовлетворению граничного условия (3.2). Это позволит определить вес  $a_m$  каждой базисной деформации, с которой она входит в рассматриваемое колебание. Рассмотрим уравнение (3.5) для каждого  $m$ . В нулевом приближении по  $\mu$  матрица  $V_{im}$  является диагональной с компонентами  $V_{00} = 0$ ,  $V_{mm} = 1/2i \operatorname{sign} m$  при  $m \neq 0$ ,  $\omega = 0$ . Тогда уравнение (3.5) для всех  $|m| \geq 2$  даст решение  $a_m = 0$ . Для  $m = 0, \pm 1$  уравнение (3.5) обращается в тривиальное тождество  $0 = 0$  и величины  $a_0$  и  $a_{\pm 1}$  остаются не определенными. Для их определения в уравнениях с  $m = 0, \pm 1$  необходимо взять следующие члены разложения  $V_{im}$  и  $\omega$  по  $\mu$ :

$$i\omega_1 a_{-1} + i\omega_1^2 a_0 = 0 \\ i\omega_1 a_0 - i\omega_1 \left[ 1 - \frac{1}{2\omega_1} \frac{J_0(z_0)}{J_1(z_0)} \right] a_0 = 0, \quad z_0 = \frac{1}{\omega_1} \\ i\omega_1 a_1 - i\omega_1^2 a_0 = 0$$

Отсюда получаем собственные частоты  $\omega_1^{(k)} = 1/x_k$ , где  $x_k$  — нули функции Бесселя  $J_0(x)$ , и коэффициенты  $a_1 = -a_{-1} = \omega_1^{(k)} a_0$ , амплитуда  $a_0$  остается произвольной. Поскольку исследуются собственные колебания с частотами  $\omega = O(\mu)$ , то проведенные вычисления справедливы для случая  $k \ll 1/\mu$ .

Рассмотрим стоячую волну. Для этого сложим две волны вида  $\exp(i\omega t + i\mu s)$  и  $\exp(i\omega t - i\mu s)$ , бегущие в разном направлении. Результирующее колебание будет

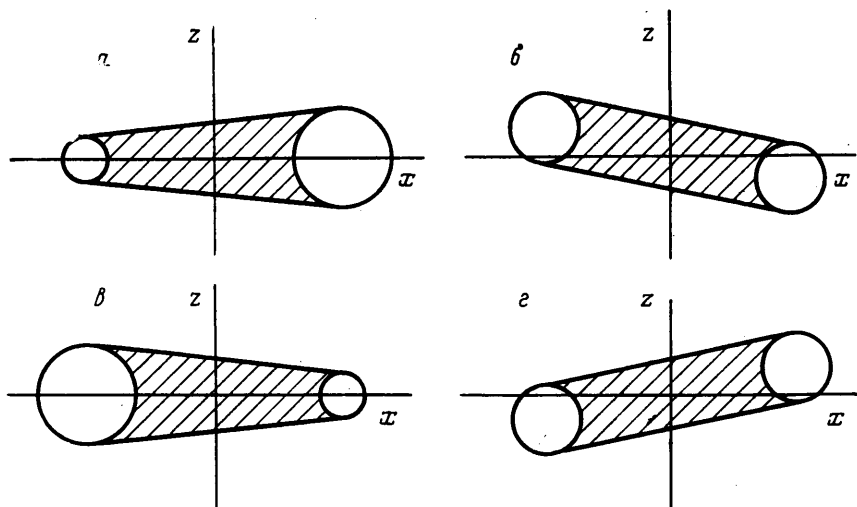
$$\epsilon = a_0 [\epsilon_0 - 2\omega_1 \epsilon_{(1)} + O(\mu)] \quad (6.1)$$

$$\epsilon_0 = (\epsilon_0^\sigma, \epsilon_0^\psi, \epsilon_0^s) = \left( \frac{J_1(z)}{J_1(z_0)} \cos \theta \cos \mu \omega_1 t, \right. \\ \left. - \frac{1}{\mu \omega_1 \sigma} \frac{J_1(z)}{J_1(z_0)} \cos \theta \sin \mu \omega_1 t, - \frac{1}{\mu \omega_1} \frac{J_0(z)}{J_1(z_0)} \sin \theta \cos \mu \omega_1 t \right) \\ \epsilon_{(1)} = (\epsilon_{(1)}^\sigma, \epsilon_{(1)}^\psi, \epsilon_{(1)}^s) = \left( \sin \psi \cos \theta \sin \mu \omega_1 t, \frac{1}{\sigma} \cos \psi \cos \theta \sin \mu \omega_1 t, 0 \right)$$

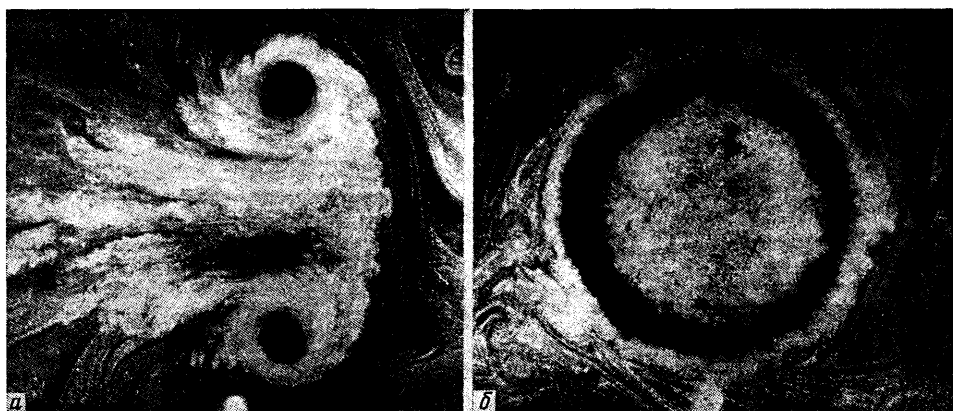
$$z = \sigma/\omega_1, \quad z_0 = 1/\omega_1$$

где  $\omega_1$  — одна из собственных частот  $\omega_1^{(k)}$ . Хотя  $\psi$ - и  $s$ -компоненты деформации  $\epsilon_0$  имеют порядок  $O(\mu^{-1})$ ,  $\sigma$ -компоненты  $\epsilon_0$  и  $\epsilon_{(1)}$  имеют одинаковый порядок  $O(1)$ . Именно эти составляющие деформации определяют внешний вид возмущения: не зависящая от  $\psi$  часть описывает бочкообразную структуру, часть, пропорциональная  $\sin \psi$ , описывает сдвиг каждого сечения кольца. Из вида деформации  $\epsilon_0$  в (6.1) следует, что возмущения завихренности для колебаний с различными частотами  $\omega_1^{(k)}$  имеют





Фиг. 2



Фиг. 3

похожую внутреннюю структуру, определяемую функциями Бесселя. На фиг. 2 изображены характерные фазы таких возмущений. Деформация, имеющая в первой фазе бочкообразную структуру (а), сменяется во второй фазе наклоном плоскости кольца (б) и т. д.

На фиг. 3 представлены фотографии вихревого кольца, полученные одним из авторов настоящей статьи и помещенные в работе [13]. На изображении видна бочкообразная структура возмущений с  $n=1$  в характерной фазе колебаний.

Сравнивая собственные частоты возмущений вихревого кольца и цилиндрического вихря, видим, что полученные в настоящей работе колебания действительно соответствуют колебаниям цилиндрического вихря, симметричным относительно его оси. Вместе с тем форма тех и других колебаний имеет существенное различие. Если для цилиндрического вихря эти возмущения не сдвигают его оси, а только периодически изменяют площадь сечения, то при аналогичных колебаниях вихревого кольца изменение радиуса сечения сопровождается сдвигом средней линии с такой же по порядку величины амплитудой.

Таким образом, цилиндрический вихрь и тонкое вихревое кольцо имеют собственные колебания, форма которых различается в главном приближении, хотя структура этих течений различается лишь во втором приближении. Причиной этого является вырождение собственных частот. Снятие вырождения и определение формы собственных колебаний происходит в следующем приближении. Поскольку в следующем приближении структура стационарного течения для тонкого вихревого кольца и цилиндрического вихря различаются, то различными оказываются и формы собственных колебаний.

**7. Импульс и энергия возмущений.** Возмущение вихревого импульса течения определяется формулой

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \int [\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega}] d\mathbf{r}$$

где возмущение завихренности  $\boldsymbol{\Omega}$  определяется из (1.3).

Рассмотрим отдельно вклад в  $\mathbf{P}$  двух составляющих деформации (6.1) — бочкообразной и сдвиговой. Первая составляющая создает отличное от нуля возмущение вихревого импульса, равное  $(-2\pi^2 \omega_1 a_0 \sin \omega t / \mu) \mathbf{e}_x$ . Следовательно, колебания вихревого кольца, имеющие чисто бочкообразную форму, при  $n=1$  не удовлетворяют закону сохранения импульса. Физический смысл вклада в импульс от бочкообразной деформации  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  состоит в следующем. Вихревые линии  $\boldsymbol{\Omega}$ , соответствующие  $\psi$ -компоненте деформации  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ , представляют собой замкнутые линии типа обмотки торообразного соленоида, заполняющие всю область кольца. Такая завихренность создает поле скорости с потоком  $(2\lambda a_0 / x_k) \sin \theta \sin \omega t$  через каждое сечение вихря, приводящим к периодическому изменению площади сечения кольца. Ненулевой вклад в импульс связан именно с этим потоком жидкости, имеющим суммарную составляющую, направленную вдоль оси  $x$ .

Вторая составляющая деформации (6.1) представляет собой периодический наклон плоскости кольца. Поскольку импульс стационарного кольца направлен вдоль его оси, то отклонение оси от невозмущенного положения также дает вклад в вихревой импульс, вычисление которого дает величину, в точности компенсирующую вклад от бочкообразной составляющей.

Представляет интерес вычисление энергии возмущений. Если эта энергия для каких-либо мод колебаний отрицательна, то при учете потерь энергии (например, акустическое излучение) такие возмущения будут усиливаться [11]. Для изозавихренных возмущений энергия определяется выражением [10, 11]

$$T = \frac{1}{2} \int \{v^2 - (\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{V}_0])\} d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \int \{(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{A}) - (\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{V}_0])\} d\mathbf{r} \quad (7.1)$$

где  $\mathbf{A}$  — векторный потенциал, определяемый формулой (1.6). Энергия в силу теоремы Арнольда выражается через квадраты линейных вариаций течения и для ее вычисления по формуле (7.1) достаточно решения лишь линейной задачи.

Выразим подынтегральное выражение в (7.1) через поле деформации. С учетом уравнения (1.5) можно получить

$$T = \frac{1}{2} \int \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t}, [\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\Omega}_0] \right) d\mathbf{r} \quad (7.2)$$

Если динамическая задача по определению  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$  решена, то формула (7.2) оказывается существенно удобнее (7.1), где даже при известном  $\boldsymbol{\varepsilon}$  необходимо находить векторный потенциал во всем объеме вихря с по-

мощью интеграла (1.6). Для колебаний вида (6.1) энергия возмущений

$$T_k = \int \frac{\sigma^2}{\mu} (\dot{\varepsilon}^\sigma \varepsilon^\psi - \dot{\varepsilon}^\psi \varepsilon^\sigma) d\sigma d\psi d\theta = \frac{a_0^2 \pi^2}{\mu} > 0$$

одинакова для всех  $k$ . Поскольку все  $T_k$  положительны, каждое возмущение описанного типа будет акустически устойчивым.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

Покажем, что уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \text{rot}[\mathbf{e} \times \mathbf{V}_0] - \mathbf{v} = \mathbf{F} \quad (\text{П.1})$$

где  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$  — произвольная функция, для которой  $\text{rot}[\mathbf{F} \times \boldsymbol{\Omega}_0] = 0$ , имеет частное решение  $\mathbf{e}$ , удовлетворяющее условию  $\text{rot}[\mathbf{e} \times \boldsymbol{\Omega}_0] = 0$ .

Предполагая необходимую гладкость, представим решение в виде разложения в степенной ряд по времени

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{e}(0) + t \left. \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} \right|_{t=0} + \frac{t^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial t^2} \right|_{t=0} + \dots \quad (\text{П.2})$$

Используя уравнение (П.1) и его частные производные по  $t$ , получим

$$\left. \frac{\partial^n \mathbf{e}}{\partial t^n} \right|_{t=0} = \frac{\partial^{(n-1)}}{\partial t^{(n-1)}} \left( \mathbf{F} - \text{rot}[\mathbf{e} \times \mathbf{V}_0] + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{rot}[\mathbf{e} \times \boldsymbol{\Omega}_0]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \right) \Big|_{t=0}$$

Пусть  $\mathbf{e}(0)$  — произвольная деформация, удовлетворяющая условию  $\text{rot}[\mathbf{e}(0) \times \boldsymbol{\Omega}_0] = 0$ . Тогда, используя векторное тождество (1.4), а также учитывая то, что для стационарного течения  $\text{rot}[\mathbf{V}_0 \times \boldsymbol{\Omega}_0] = 0$ , для всех коэффициентов разложения (П.2) последовательно получим

$$\text{rot} \left[ \left. \frac{\partial^n \mathbf{e}}{\partial t^n} \right|_{t=0} \times \boldsymbol{\Omega}_0 \right] = 0$$

Следовательно, построенное частное решение в каждый момент времени удовлетворяет условию  $\text{rot}[\mathbf{e}(t) \times \boldsymbol{\Omega}_0] = 0$ . Таким образом, функцию  $\mathbf{F}$  в (П.1), можно всегда скомпенсировать добавлением к основному решению тривиальной деформации.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Thomson Sir William G. Vibrations of a columnar vortex // Phil. Mag. 1880. V. 10. P. 155–168.
2. Thomson J. J. A treatise on the motion of vortex rings. London: Macmillan, 1883. 124 p.
3. Basset A. B. A treatise on hydrodynamics. V. 2. N. Y., 1961. 328 p.
4. Копьев В. Ф., Леонтьев Е. А. Излучение и рассеяние звука вихревым кольцом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 3. С. 83–95.
5. Ладиков Ю. П. Магнитно-вихревые кольца // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1960. № 4. С. 7–13.
6. Widnall S. E., Sullivan J. P. On the stability of vortex rings // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1973. V. 332. № 1590. P. 335–353.
7. Dhanak M. R., de Bernardinis B. The evolution of an elliptic vortex ring // J. Fluid Mech. 1981. V. 109. P. 189–216.
8. Widnall S. E., Bliss D., Zalay A. Theoretical and experimental study of the stability of a vortex pair // Aircraft wake turbulence and its detection. N. Y.; L.: Plenum press, 1971. P. 305–338.
9. Crow S. C. Stability theory for a pair of trailing vortices // AIAA Journal. 1970. V. 8. № 12. P. 2172–2179.
10. Арнольд В. И. Вариационный принцип для трехмерных стационарных течений идеальной жидкости // ПММ. 1965. Т. 29. № 5. С. 846–851.
11. Копьев В. Ф., Леонтьев Е. А. Акустическая неустойчивость плоских вихревых течений с круговыми линиями тока // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 3. С. 475–480.
12. Fraenkel L. W. Examples of steady vortex ring of small cross-section in an ideal fluid // J. Fluid Mech. 1972. V. 51. № 1. P. 119–135.
13. Безменова Т. Н., Гурьяшкин Л. П., Дмитриева В. Б. и др. Визуализация структуры турбулентного вихревого кольца // Тез. докл. 9-й науч.-техн. конф. по авиационной акустике. М.: ЦАГИ, 1989. С. 207–210.

Москва

Поступила в редакцию  
7.V.1990