

УДК 532.526.013.4

© 1991 г.

Р. К. БАГБЕКОВ, Е. Д. ТЕРЕНТЬЕВ

ОБ ОДНОЙ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ТЯЖЕЛОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, СТЕКАЮЩЕЙ ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

Теоретическое изучение движения вязкой жидкости основывается на анализе уравнений Навье — Стокса. Если же рассматриваемое течение таково, что характерное число Рейнольдса R большое, то используется теория пограничного слоя. Это теория является асимптотической с малым параметром $R^{-1/2}$. В основе ее лежит выделение в потоке двух характерных областей: внешней невязкой и внутренней, в которой учитываются вязкие касательные напряжения. Из решения внешней задачи определяются на обтекаемой поверхности давление и касательная скорость, которые используются для решения внутренней задачи. Однако такая классическая схема не позволяет описать ни отрыв пограничного слоя, ни его неустойчивость. В 1969 г. появляется новая теория пограничного слоя [1, 2] — пограничный слой с самоиндуцированным давлением (пограничный слой с взаимодействием). В рамках этой теории был описан отрыв пограничного слоя. При распространении ее на нестационарные дозвуковые течения и течение несжимаемой жидкости удалось описать неустойчивость пограничного слоя [3, 4]. В качестве малого параметра в этой теории использовалась величина $R^{-1/8}$, а в течении были выделены три характерные области. Аналогичный подход для течения тяжелой вязкой жидкости со свободной поверхностью по наклонной плоскости был развит в работе [5], в ней в качестве малого параметра использовалась величина $R^{-1/7}$, а в течении были выделены четыре характерные области. Ниже, в рамках предположений работы [5] рассмотрена начальная линейная задача о развитии во времени возмущений, вызванных отклонением свободной поверхности. Показано, что возмущения принимают форму волнового пакета, распространяющегося вниз по наклонной плоскости. Решение найдено с помощью прямых и обратных интегральных преобразований. Графики возмущенного давления построены при больших значениях характерного времени с помощью метода перевала.

1. Рассмотрим движение слоя вязкой несжимаемой жидкости, стекающей вниз по наклонной плоскости под действием силы тяжести. Невозмущенное движение будем считать установившимся, со скоростью, параллельной наклонной плоскости. Выберем в качестве основных размерных величин параметры невозмущенного движения: U_0 — скорость свободной границы, H_0 — высота слоя жидкости, ρ_0 — плотность жидкости. Используя их, проведем обезразмеривание зависимых и независимых переменных. Введем декартову систему координат с осью x' , направленной вдоль наклонной плоскости, осью y' — в глубь жидкости; отсчет y' будем вести от невозмущенной свободной поверхности. В качестве основных используем уравнения Навье — Стокса; описанный переход к безразмерному виду приводит к двум параметрам: числу Рейнольдса $R=2U_0H_0/3\nu_0$, где ν_0 — коэффициент кинематической вязкости, и числу Фруда $F=U_0/\sqrt{H_0g_0}$, где g_0 — ускорение свободного падения. Введенная скорость U_0 определяется как $U_0=2H_0^2g_0 \sin(\alpha)/3\nu_0$, где α — угол, образованный наклонной плоскостью с горизонталью. Обезразмеривание условий равенства нормальных напряжений на свободной поверхности приводит к еще одному безразмерному параметру $S_t=\sigma_0/(\rho_0H_0U_0)$, где σ_0 — коэффициент поверхностного натяжения.

Основное невозмущенное течение, подчиняющееся уравнениям Навье — Стокса, условиям прилипания на наклонной плоскости при $y'=1$ и усло-

виям непрерывности напряжений на свободной поверхности $y'=0$, можно записать в виде

$$u_s=1-(y')^2, \quad v_s=0, \quad p_s=\frac{4}{3}R^{-1}y' \operatorname{ctg}(\alpha), \quad \eta=0 \quad (1.1)$$

где u_s и v_s — составляющие вектора скорости вдоль осей x' и y' , p_s — давление, η — отклонение свободной поверхности от невозмущенного положения $y'=0$. Устойчивость течения (1.1) по линейному приближению была изучена в [6, 7]. Дальнейший анализ течений, близких к невозмущенному, опирался на нелинейную теорию [8–10]. В статье рассматривается задача о развитии первоначально заданных возмущений свободной поверхности и продольной скорости для больших чисел Рейнольдса. Для удобства асимптотического анализа введем малый параметр $\varepsilon=R^{-1/7}$.

Введем также характерные время t и продольную координату x [5]

$$t'=\varepsilon^{-3}t, \quad x'=\varepsilon^{-1}x \quad (1.2)$$

Пусть в начальный момент времени $t=0$ задано отклонение свободной поверхности

$$\eta=\varepsilon^2 f(x), \quad f(x) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty \quad (1.3)$$

Тогда для описания развития возмущений удобно использовать схему течения, предложенную в работе [5]. Согласно этой схеме, все течение разбивается на четыре характерные области по переменной y' . Если пронумеровать их от свободной поверхности, то первая область имеет толщину $y' \sim \varepsilon^3$, вторая — $y' \sim \varepsilon^2$, третья — $y' \sim 1$ и четвертая — $y' \sim \varepsilon^2$. Решение для первых трех областей удастся построить в явном виде, что дает возможность поставить задачу для четвертой (нижней) области, выписав так называемое условие взаимодействия, связывающее давление в четвертой области с продольной скоростью на ее внешней границе. Из решения задачи в четвертой области можно определить произвольную функцию, входящую в описание течения в верхних областях. Поэтому сразу, пользуясь результатами работы [5], остановимся только на анализе решения в четвертой области. Если величина $f(x)$ в (1.3) порядка единицы, то это приводит к нелинейной задаче. Предположим, что $f(x)$ является малой по сравнению с единицей, тогда задача будет линейной. Согласно [5], асимптотические разложения в четвертой области имеют вид

$$\begin{aligned} f(x) &= \delta f_1(x), \quad y' = 1 - \varepsilon^2 y_4 \\ u &= \varepsilon^2 u_{41} + \dots = \varepsilon^2 (2y_4 + \delta u_{41}') + \dots \\ v &= \varepsilon^3 \delta v_{41}' + \dots, \quad p = \varepsilon^4 \delta p_{41}' + \dots \end{aligned} \quad (1.4)$$

После подстановки разложений (1.4), (1.2) в систему уравнений Навье — Стокса, учета верхних областей и условия (1.3) получим следующую линейную задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{41}'}{\partial x} - \frac{\partial v_{41}'}{\partial y_4} &= 0, \quad \frac{\partial p_{41}'}{\partial y_4} = 0 \\ \frac{\partial u_{41}'}{\partial t} + 2y_4 \frac{\partial u_{41}'}{\partial x} - 2v_{41}' &= -\frac{\partial p_{41}'}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 u_{41}'}{\partial y_4^2} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Предельное условие взаимодействия при $y_4 \rightarrow \infty$ связывает давление и продольную скорость

$$p_{41}' = \frac{1}{2} \left(S_t - \frac{8}{15} \right) \left(\frac{\partial^2 u_{41}'}{\partial x^2} \right)_{y_4 \rightarrow \infty} \quad (1.6)$$

Задание начального условия (1.3) определяет в третьей области начальное возмущение продольной скорости

$$u=1-y_3^2-\varepsilon^2\delta 2y_3f_1(x)+\dots, \quad y_3=y'=1-\varepsilon^2y_4 \quad (1.7)$$

Переход в четвертую область приводит к предельному требованию при $y_4 \rightarrow \infty$, задающему условия сращивания продольных скоростей; согласно (1.7), имеем

$$u=\varepsilon^2(2y_4-2\delta f_1(x)+\dots)$$

Однако в задании скорости u_{41}' в четвертой области в начальный момент имеется свобода. Для постановки задачи достаточно потребовать

$$u_{41}'(0, x, y_4) = u_{410}(x, y_4) \quad (1.8)$$

и наложить на u_{410}' условия

$$u_{410}'(x, 0)=0, \quad u_{410}'(x, y_4) \rightarrow -2f_1(x) \quad (y_4 \rightarrow \infty) \quad (1.9)$$

На гладкой наклонной плоскости зададим условия прилипания

$$u_{41}'(t, x, 0)=0, \quad v_{41}'(t, x, 0)=0 \quad (1.10)$$

Решение задачи (1.5), (1.6), (1.8) – (1.10) будем искать в классе функций, интегрируемых по модулю по переменной x в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ при любых фиксированных t и y , а также растущих при $t \rightarrow \infty$ не быстрее, чем по экспоненциальному закону. Выбор класса функций позволяет разложить решение в интеграл Фурье по переменной x и в интеграл Лапласа по времени t

$$\begin{aligned} & (u_{41}^*(\omega, k, y_4), v_{41}^*(\omega, k, y_4), p_{41}^*(\omega, k)) = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} \int_0^{+\infty} e^{-\omega t} (u_{41}'(t, x, y_4), v_{41}'(t, x, y_4), p_{41}'(t, x)) dt \end{aligned}$$

Преобразование уравнений (1.5), граничных (1.10), предельных (1.6) и начальных (1.8) условий такое же, как и в работе [5]. Отметим, что в рассматриваемой задаче для образца возмущения продольной скорости u_{41}^* из-за начального условия (1.8) возникает неоднородное уравнение Эйри. Пределав выкладки, получим явные выражения для u_{41}^* , v_{41}^* , p_{41}^* . В частности, p_{41}^* имеет вид

$$p_{41}^* = i\pi \left(S_t - \frac{8}{15} \right) k \frac{G(\Omega, k)}{4H(\Omega, k)} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} G(\Omega, k) &= \frac{d \operatorname{Bi}(\Omega)}{d\Omega} \int_{\Omega}^{\infty} \operatorname{Ai}(z) u_0(\omega, k, z) dz \int_{\Omega}^{\infty} \operatorname{Ai}(z) dz - \\ & - \frac{d \operatorname{Ai}(\Omega)}{d\Omega} \left(\int_{\Omega}^{\infty} \operatorname{Ai}(z) dz \int_{\Omega}^z \operatorname{Bi}(z_1) u_0(\Omega, k, z_1) dz_1 + \right. \\ & \left. + \int_{\Omega}^{\infty} \operatorname{Bi}(z) dz \int_z^{\infty} \operatorname{Ai}(z_1) u_0(\Omega, k, z_1) dz_1 \right); \quad \Omega = \frac{3\omega(3ik)^{1/2}}{2} \\ H(\Omega, k) &= \frac{d \operatorname{Ai}(\Omega)}{d\Omega} + \frac{S_t - 8/15}{4} k^2 (3ik)^{1/2} \int_{\Omega}^{\infty} \operatorname{Ai}(z) dz \end{aligned}$$

Здесь $Ai(z)$, $Bi(z)$ — функция Эйри [14]. Для функции, учитывающей начальные данные (1.8), введено обозначение

$$u_0(\Omega, k, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \frac{\partial u_{410}(X, z/(3ik)^{1/3} - \Omega/(3ik)^{1/3})}{\partial y_4} dx \quad (1.12)$$

Приравняв нулю знаменатель выражения (1.11), получим дисперсионное уравнение, связывающее частоту ω и волновое число k свободных колебаний; эти значения ω и k задают полюса функции p_{41} .

Используют также [5, 11, 12] другую форму записи дисперсионного уравнения

$$H(\Omega, k) \int_{\Omega}^{\infty} Ai(z) dz = \Phi(\Omega) + \frac{S_t - 8/15}{4} k^2 (3ik)^{1/3} = 0 \quad (1.13)$$

$$\Phi(\Omega) = \frac{d Ai(\Omega)}{d\Omega} \int_{\Omega}^{\infty} Ai(z) dz$$

Из формулы (1.11) давление вычисляется с помощью обратных преобразований Фурье — Лапласа

$$p_{41}'(t, x) = \frac{1}{4i\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikhx} dk \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} e^{\omega t} p_{41}^*(\omega, k) d\omega, \quad l > l_0 \quad (1.14)$$

где l_0 — некоторая постоянная, такая, что все корни дисперсионного уравнения (1.12) $\omega(k)$ при изменении k вдоль действительной оси лежат слева от линии $\text{Im } \omega = l_0$.

После того как давление p_{41}' найдено, отклонение поверхности от невозмущенного состояния находится как

$$\eta_{21}(t, x) = \frac{1}{S_t - 8/15} \int_{-\infty}^x dx_1 \int_{-\infty}^{x_1} p_{41}'(t, x_2) dx_2 \quad (1.15)$$

2. Вычислим давление p_{41}' и отклонение поверхности η_{21} . Рассмотрим внутренний интеграл по ω из (1.14) аналогично [13]. При действительных k все особенности p_{41}^* в плоскости ω сводятся к счетному набору полюсов первого порядка. Это позволяет разложить обратное преобразование Лапласа в сходящийся ряд по вычетам подынтегральной функции. При $t \gg 1$ главным из всех членов будет первый, отвечающий первому неустойчивому корню $\omega_1(k)$ дисперсионного уравнения [13]. Остальные члены оцениваются как $O(t^{-7})$, причем равномерно по x . Тогда для больших t имеем

$$\begin{aligned} p_{41}'(t, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikhx} \text{res}(e^{\omega t} p_{41}^*(\omega, k))_{\omega=\omega_1(k)} dk = \\ &= -i^{1/3} 2^{-13} 3^{-7/3} \left(S_t - \frac{8}{15} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k^{1/3} G(\omega_1(k), k) e^{ikhx + \omega_1(k)t}}{Ai(\Omega_1) [\omega_1(k) - (S_t - 8/15) ik^3/2]} dk \\ \Omega_1 &= 3^{1/3} 2^{-1} \frac{\omega_1(k)}{(ik)^{3/2}} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Пользуясь тем, что функция Эйри обладает свойством

$$\text{Ai}((\Omega)_c) = (\text{Ai}(\Omega))_c, \quad \text{Bi}((\Omega)_c) = (\text{Bi}(\Omega))_c$$

где индекс c означает комплексное сопряжение, легко показать, что если $\omega_n(k)$ есть n -й корень дисперсного уравнения (1.12) при действительных k , то $(\omega_n(k))_c$ — также корень при $k = |k|e^{-i\pi}$. Последнее утверждение позволяет преобразовать выражение (2.1), записав его в виде

$$p_{i1}'(t, x) = -3^{-3/2} \left(S_t - \frac{8}{15} \right) \text{Re} \int_0^{\infty} \frac{i^{1/2} k^{3/2} G(\omega_1(k), k) e^{ikx + \omega_1(k)t}}{\text{Ai}(\Omega_1) [\omega_1(k) - (S_t - 8/15) ik^{3/2}]} dk \quad (2.2)$$

Используя методику работы [11], можно провести точное вычисление интеграла (2.2). Однако, поскольку сама формула (2.2) определяет давление при больших значениях t , можно ограничиться главным членом разложения по методу перевала [15]. Запишем функцию, стоящую в показателе экспоненты в виде

$$kx + \omega_1(k)t = t\varphi(k, V), \quad V = x/t, \quad \varphi = kV + \omega_1(k)$$

С помощью ЭВМ для фиксированного V найдем решения уравнения

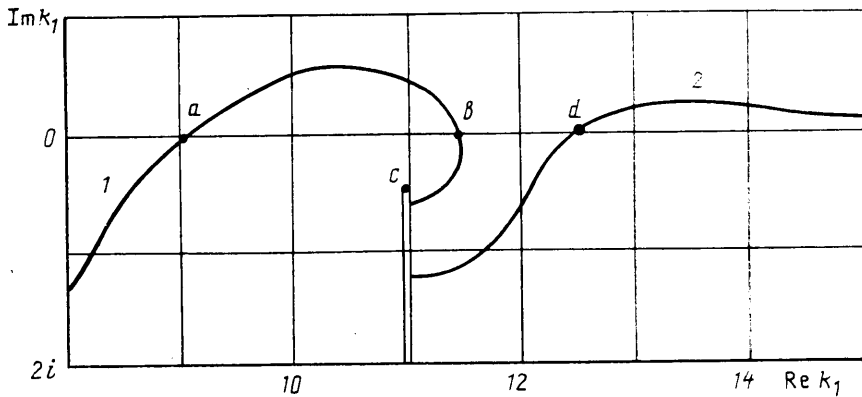
$$\frac{d\varphi(k, V)}{dk} = iV + \frac{d\omega_1(k)}{dk} = 0$$

Их оказывается счетное множество. При изменении V получается счетное множество траекторий или семейств. Для построения p_{i1}' необходимо рассмотреть лишь два семейства точек перевала $k_{s1}(V)$ и $k_{s2}(V)$ функции $\text{Re}[\varphi]$. Оба семейства состоят из простых точек перевала, поскольку в них выполнено $d^2\omega/dk^2 \neq 0$. Расположение этих семейств на плоскости k аналогично расположению семейств точек перевала в задаче о пограничном слое на плоской пластине [11]. Графики $k_{s1}(V)$ и $k_{s2}(V)$ удобнее привести не на плоскости k , а на плоскости k_1 , где переменная k_1 вводится как

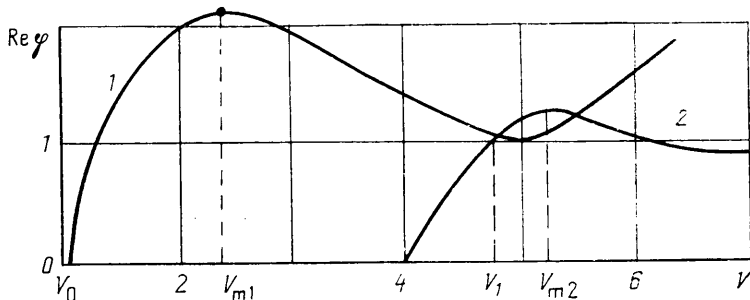
$$k = 15^{-3/2} 6^{-1/2} \left(\frac{8}{15} - S_t \right)^{-3/2} k_1$$

Новая переменная k_1 позволяет записать дисперсионное уравнение (1.13) в форме, совпадающей с дисперсионным уравнением для плоскопараллельного течения Пуазейля [12]. Первое семейство $k_{1s1}(V)$ лежит на линии, обозначенной цифрой 1 на фиг. 1, она начинается снизу, уходит под разрез и упирается в точку ветвления $s = 12,94 - i0,44$ функции $\omega_1(k_1)$, при этом параметр V изменяется от 0 до ∞ . Линия первого семейства пересекает действительную ось в точках $a = 11,09$ и $b = 13,34$ соответственно при $V = 2,38$ и $4,88$. Второе семейство $k_{1s2}(V)$ лежит на линии, выходящей из-под разреза, проведенного из точки s параллельно мнимой оси; эта линия пересекает действительную ось в точке $d = 14,53$ при $V = 5,20$; при $V \rightarrow \infty$ линия $k_{1s2}(V)$ уходит в бесконечно удаленную точку, приближаясь к действительной оси.

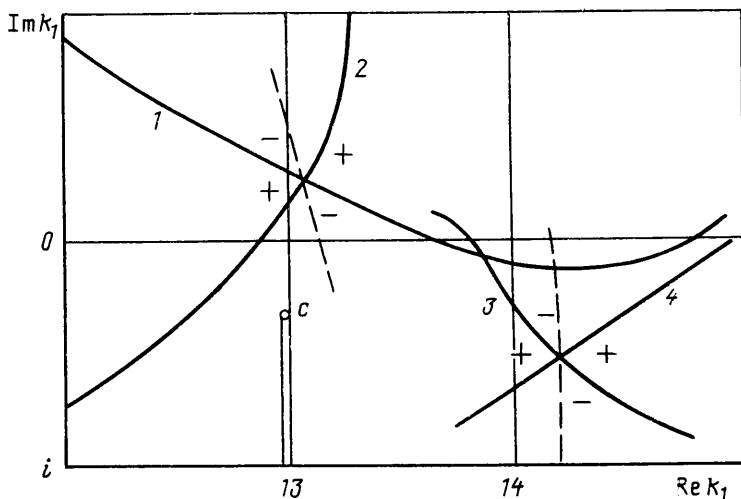
Рассмотрим вопрос, для каких диапазонов V следует пользоваться семействами $k_{1s1}(V)$ и $k_{1s2}(V)$. На фиг. 2 приведены графики зависимостей $\text{Re}\varphi(k_{1s1}(V), V)$ и $\text{Re}\varphi(k_{1s2}(V), V)$ от V , они помечены цифрами 1 и 2 соответственно. Первое семейство можно использовать для значений $V > V_0 = 1,07$, так как для них выполнено $\text{Re}\varphi(k_{1s1}(V), V) > 0$, для $V < V_0$ имеем $\text{Re}\varphi(k_{1s1}(V), V) < 0$ и интеграл (2.2) будет определяться граничной точкой $k_1 = 0$, поскольку $\varphi(0, V) = 0$. Для $V > V_0$ будем выпускать из точек первого семейства две линии уровня k_{1k11} и k_{1k12} , определяе-



Фиг. 1

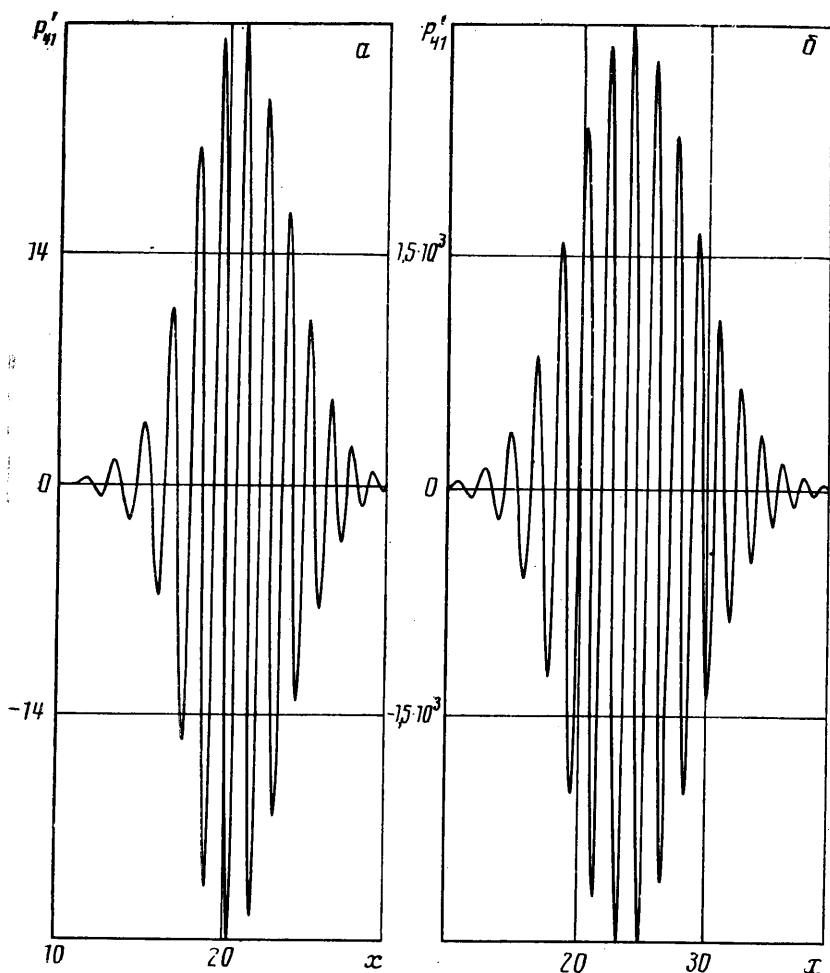


Фиг. 2



Фиг. 3

мые уравнением $\text{Re } \varphi(k_1, V) = \text{Re } \varphi(k_{1s1}(V), V)$. На фиг. 3 при $V=4,74$ изображены эти линии уровня и помечены цифрами 1 и 2 соответственно, знаком плюс помечены те области, в которых $\text{Re } \varphi(k_1, V) > \text{Re } \varphi(k_{1s1}(V), V)$ и минус — где $\text{Re } \varphi(k_1, V) < \text{Re } \varphi(k_{1s1}(V), V)$. Исходный путь интегрирования в (2.2) можно преобразовать в новый путь, такой, что максимальное значение $\text{Re } \varphi(k_1, V)$ на нем будет достигнуто в точке $k_{1s1}(V)$, а направление в точке перевала определится условием $\text{Im } \varphi(k_1, V) = \text{Im } \varphi(k_{1s1}(V), V)$.



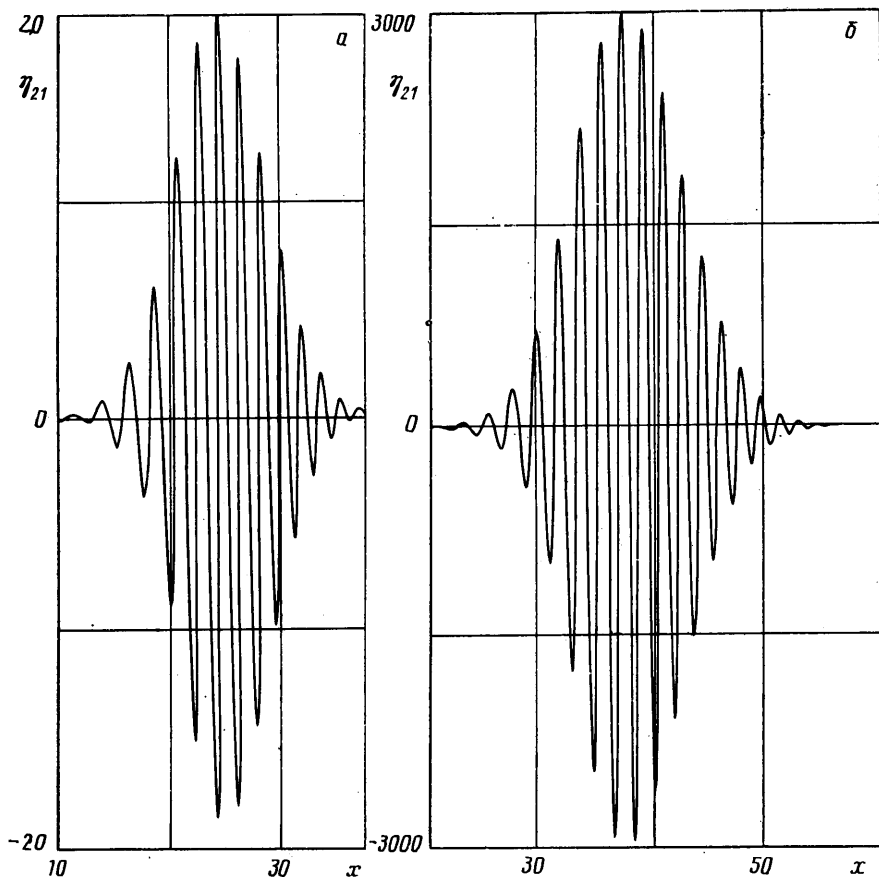
Фиг. 4

Этот путь показан на фиг. 3 пунктирной линией. Такая конфигурация линий уровня сохраняется вплоть до значения $V=V_1=4,71$. Значение V_1 отвечает точке пересечения кривых $\text{Re}\varphi(k_{1s1}(V), V)$ и $\text{Re}\varphi(k_{1s2}(V), V)$, она отмечена на фиг. 2. Для $V>V_1$ деформация пути интегрирования (2.2) в новый, отвечающий требованию метода перевала путь, становится невозможной, так как линия уровня k_{1R11} уходит под разрез, проведенный из точки s . Однако для $V>V_1$ доступными становятся точки второго семейства k_{1s2} . Характерная конфигурация линий уровня k_{1R21} и k_{1R22} , определяемых из уравнения $\text{Re}\varphi(k_1, V)=\text{Re}\varphi(k_{1s2}(V), V)$ для $V>V_1$, изображена на фиг. 3. Особым является значение $V=V_1$, при котором необходимо учитывать две перевальные точки, принадлежащие двум семействам.

Опять возвращаясь к переменной k и используя обозначение k_s для точки перевала и ϑ_s для угла, который составляет новый путь интегрирования с осью x , запишем выражение для $p_{41}'(t, x)$ при больших t

$$p_{41}' = -3^{-3/2} \left(S_t - \frac{8}{15} \right) (2\pi)^{1/2} \left| \frac{d^2 \omega_1(k_s)}{dk^2} \right|^{-1/2} t^{-1/2} N(k_s, \vartheta_s, t, x) \quad (2.3)$$

$$N(k_s, \vartheta_s, t, x) = \text{Re} \left\{ \frac{i^{1/2} k_s^{7/2} G(\omega_1(k_s), k_s) e^{i k_s x + \omega_1(k_s) t}}{\text{Ai}(\Omega_{1s}) [\omega_1(k_s) - (S_t - 8/15) i k_s^3 / 2]} e^{i \vartheta_s} \right\}$$



Фиг. 5

Для интервала $V_0 < V < V_1$ следует взять $k_s = k_{s1}(V)$, а для $V > V_1$ положить $k_s = k_{s2}(V)$.

Вычисление возмущения давления p_{i1}' и возмущения свободной поверхности η_{21} было проведено по формулам (2.3) и (1.15) соответственно для значения параметра $S_t = 0,1$, при $t = 10$ и 15 . В качестве начальных условий (1.3) и (1.8) были выбраны функции

$$f_1(x) = -e^{-(x-\frac{1}{2})^2}/2, \quad u'_{i10} = -2(1-e^{-y})f_1(x) \quad (2.4)$$

Поскольку функции $\text{Re}f(k_{1s2}(V), V)$, и $\text{Re}f(k_{1s2}(V), V)$ достигают максимумов соответственно при $V = V_{m1} = 2,38$ и $V = V_{m2} = 5,20$ (фиг. 2), то для больших t на графиках давления p_{i1}' (фиг. 4) и свободной поверхности η_{21} (фиг. 5) будут иметь место два волновых пакета. Поскольку $\text{Re}f(k_{1s1}(V_{m1}), V_{m1})$ существенно превосходит $\text{Re}f(k_{1s2}(V_{m2}), V_{m2})$, то на графиках приведен только один пакет (см. фиг. 2).

Помимо указанных в (2.4) функций, задающих начальные условия, были использованы и другие. Вычисления велись для диапазона t от 10 до 30. Они показали, что качественно картина развития возмущений такая же, как и на плоской пластине [13]. Линейная стадия развития возмущений связана с экспоненциальным ростом амплитуды. Вверх по потоку уходит высокочастотный волновой «язык». В окрестности максимума возмущений, движущегося с групповой скоростью $V_{m1} = 2,38$, сосредоточены

волны, отвечающие максимальному инкременту нарастания по времени длинноволновых возмущений, предсказываемых классической теорией устойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нейланд В. Я.* К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 4. С. 53–57.
2. *Stewartson K.* On the flow near the trailing edge of a flat plate. II // *Mathematika*. 1969. V. 6. № 31. P. 106–121.
3. *Smith F. T.* On the non-parallel flow stability of the Blasius boundary layer // *Proc. Roy. Soc. Lond. A*. 1979. V. 355. № 1724. P. 91–109.
4. *Жук В. И., Рыжов О. С.* Свободное взаимодействие и устойчивость пограничного слоя в несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. 1980. Т. 253. № 6. С. 1326–1329.
5. *Махмудов А. А., Терентьев Е. Д.* О течении жидкости по наклонной плоскости при больших числах Рейнольдса // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 601–609.
6. *Benjamin T. B.* Wave formation in laminar flow down an inclined plane // *J. Fluid Mech.* 1957. V. 2. № 6. P. 554–574.
7. *Yih C.-S.* Stability of liquid flow down an inclined plane. // *Phys. Fluids*. 1963. V. 6. № 3. P. 321–334.
8. *Шкадов В. Я.* Уединенные волны в слое вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 1. С. 63–66.
9. *Демехин Е. А., Демехин И. А., Шкадов В. Я.* Солитоны в стекающих слоях вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 4. С. 9–16.
10. *Pumir A., Manneville P., Pomeau Y.* On solitary waves running down an inclined plane // *J. Fluid Mech.* 1983. V. 135. P. 27–50.
11. *Рыжов О. С., Терентьев Е. Д.* О переходном режиме, характеризующем запуск вибратора в дозвуковом пограничном слое на пластинке // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 974–986.
12. *Bogdanova E. V., Ruzhov O. S.* Free and induced oscillations in Poiseuille flow // *Quant. Mech. and Appl. Math.* 1983. V. 36. Pt 2. P. 271–287.
13. *Терентьев Е. Д.* Линейная задача о вибраторе, совершающем гармонические колебания на закритических частотах в дозвуковом пограничном слое // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 264–272.
14. *Справочник по специальным функциям* / Под ред. М. Абрамовица. И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
15. *Федорюк М. В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

Москва

Поступила в редакцию
11.III.1990