

УДК 532.526.2:536.25

© 1991 г.

В. М. АГРАНАТ, В. Г. ЗВЕРЕВ, А. В. МИЛОВАНОВА

**ВЛИЯНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ГАЗА
НА ТРЕНИЕ И ТЕПЛОБМЕН ПРИ ЛАМИНАРНОЙ СМЕШАННОЙ
КОНВЕКЦИИ НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЕ**

Проблема ламинарной смешанной конвекции на горизонтальной пластине в приближении Буссинеска исследована достаточно полно (см. библиографию в [1-4]). В настоящей работе в развитие [4] в общем случае (без использования допущения Буссинеска) при помощи интегрально-асимптотического метода [5, 6] получены простые приближенные аналитические формулы, позволяющие оценить влияние переменности физических свойств газа на коэффициенты трения и теплообмена при ламинарной смешанной конвекции на горизонтальной пластине [4]. Для апробации аналитических результатов задача решена также численно методом [7].

1. Постановка задачи. Рассмотрим обтекание плоской горизонтальной полубесконечной пластины с постоянной температурой поверхности T_w вязким теплопроводным потоком газа, имеющим вдали от пластины постоянные скорость u_∞ и температуру T_∞ . Термогравитационные силы, обусловленные неоднородностью поля температуры, индуцируют продольный градиент давления. Предположим, что число Рейнольдса Re достаточно велико для применимости модели пограничного слоя, а число Маха $M_\infty \ll 1$, что позволяет игнорировать работу сил трения и давления. Уравнения и граничные условия для ламинарной смешанной конвекции на горизонтальной пластине для сжимаемого вязкого совершенного газа с постоянной теплоемкостью и незначительной диссипацией механической энергии запишутся в виде [8]

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.1)$$

$$0 = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \mp g, \quad p = \rho R T$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

$$y=0: \quad u=v=0, \quad T=T_w$$

$$y \rightarrow \infty: \quad u=u_\infty, \quad T=T_\infty \quad (1.2)$$

Верхний и нижний знаки во втором уравнении движения и ниже относятся к течениям над и под пластиной соответственно, а остальные обозначения общепринятые.

Предположим, что плотность среды ρ в соответствии с уравнением состояния из (1.1) является функцией, обратно пропорциональной темпе-

ратуре [8], а динамический коэффициент вязкости μ и коэффициент теплопроводности λ изменяются по степенному закону

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} = \frac{T_\infty}{T}; \quad \frac{\lambda}{\lambda_\infty} = \frac{\mu}{\mu_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty}\right)^\omega \quad (1.3)$$

При этом число Прандтля $Pr = \mu c_p / \lambda$ рассматривается как физическая постоянная газа.

Из уравнения движения в проекции на ось y системы (1.1) и упрощенного уравнения состояния (1.3) находим член с индуцированным плавучестью градиентом давления

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \mp g T \frac{\partial}{\partial x} \int_y^\infty \frac{1}{T} dy \quad (1.4)$$

2. Приближенное аналитическое решение. В случае смешанной конвекции на горизонтальной пластине выбор квазиавтомодельной переменной $\eta \sim x^{-3/8}$ дает достаточно хорошее приближение локально-автомодельного решения к локально-неавтомодельному [4]. Исходя из этого, введем по аналогии с преобразованием Дороницына [8] новые переменные и безразмерные функцию тока и температуру

$$\chi = \frac{x}{L}, \quad \eta = AL^{-1/8} \sqrt{\frac{u_\infty}{2\mu_\infty \rho_\infty}} x^{-3/8} \int_0^y \rho dy$$

$$f(\chi, \eta) = \frac{\psi(x, y)}{A\sqrt{2}u_\infty\mu_\infty\rho_\infty x} \quad (2.1)$$

$$\theta(\chi, \eta) = \frac{T}{T_\infty}, \quad A = \left(\frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{1}{Fr\sqrt{Re}}\right)^{1/8}$$

$$Re = u_\infty L \rho_\infty / \mu_\infty, \quad Fr = u_\infty^2 / (Lg)$$

Здесь $\psi(x, y)$ — функция тока, тождественно удовлетворяющая уравнению неразрывности (1.1); Fr — число Фруда; Re — число Рейнольдса.

При переходе от координат x, y к безразмерным координатам χ, η в уравнениях появляется величина $\partial\eta/\partial x$, выражение для которой находим, следуя методике расчета [9]

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{-1}{L\theta} \int_0^\eta \left(\frac{3}{8} \chi^{-1}\theta + \theta_x'\right) d\eta$$

Система (1.1) и соответствующие ей граничные условия (1.2) преобразуются к виду

$$(\theta^{\omega-1} f_{\eta\eta}')_{\eta'} + \frac{f}{\chi^{1/8}} f_{\eta\eta}'' = \frac{1}{4\chi^{1/8}} (f_{\eta'}')^2 + 2\chi^{1/8} (f_{\eta\eta}'' f_{\eta'}' - f_x' f_{\eta\eta}'') \mp$$

$$\mp \frac{8}{3} \theta \int_\eta^\infty \left\{ \theta_x' \chi - \frac{\theta_{\eta'}'}{\theta} \int_0^\eta \left(\frac{3}{8} \theta + \theta_x' \chi\right) d\eta \right\} \frac{d\eta}{\theta} \quad (2.2)$$

$$(\theta^{\omega-1} \theta_{\eta'}')_{\eta'} + \chi^{-1/8} Pr f \theta_{\eta'}' = 2 Pr \chi^{1/8} (f_{\eta'}' \theta_x' - f_x' \theta_{\eta'}') \quad (2.3)$$

$$\eta=0: \quad f=f_{\eta'}'=0, \quad \theta=\theta_w; \quad \eta=\infty: \quad f_{\eta'}'=A^{-2}\chi^{-1/8}, \quad \theta=1$$

Для упрощения анализа рассмотрим задачу (2.2)–(2.3) в локально-автомодельной постановке ($f_x' = f_{\eta\eta}'' = \theta_x' = 0$) и заменим в ней (за исключением подынтегрального выражения) переменные величины μ , λ , ρ постоянными, вычисленными по определяющей температуре θ_m , в качестве которой выбрана средняя температура пограничного слоя

$$\frac{\mu}{\mu_\infty} = \frac{\lambda}{\lambda_\infty} = \theta_m^{\omega}, \quad \frac{\rho}{\rho_\infty} = \frac{1}{\theta_m}, \quad \theta_m = \frac{\theta_w + 1}{2} \quad (2.4)$$

$$\theta_m^{\omega-1} f_{\eta\eta\eta}''' + \chi^{-1/s} f f_{\eta\eta}'' = \Phi(\eta) = \frac{1}{4} \chi^{-1/s} (f_\eta')^2 \pm \theta_m \int_{\eta}^{\infty} \theta^{-2} \theta_\eta' \left(\int_0^{\eta} \theta d\eta \right) d\eta$$

$$\theta_m^{\omega-1} \theta_{\eta\eta}'' + \chi^{-1/s} \text{Pr} f \theta_\eta' = 0 \quad (2.5)$$

Цель дальнейшего анализа — найти приближенные аналитические формулы для безразмерных коэффициентов трения и теплообмена $a = f_{\eta\eta}''(\chi, 0)$ и $b = \theta_\eta'(\chi, 0)$, с помощью которых определяются локальные коэффициент трения c_f и число Нуссельта Nu_x

$$c_f = \frac{2\tau_w}{\rho_\infty u_\infty^2} = \sqrt{\frac{2}{\text{Re}_x}} A^3 \chi^{1/s} \theta_m^{\omega-1} a$$

$$\text{Nu}_x = \frac{q_w x}{\lambda_\infty \Delta T} = -\sqrt{\frac{\text{Re}_x}{2}} \frac{\theta_m}{\theta_w - 1} A \chi^{1/s} b \quad (2.6)$$

Из уравнения движения (2.5), следуя [4–6], получим приближенное интегральное соотношение

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\theta_m^{1-\omega} a \eta^3}{6\chi^{1/s}}\right) (a + \Phi(\chi, 0)\eta) d\eta = \frac{1}{A^2 \chi^{1/s}} \quad (2.7)$$

Применяя к правой части уравнения движения (2.5) метод интегрирования по частям, с учетом граничных условий (2.3) находим

$$\Phi(\chi, 0) = \pm \theta_m \int_0^{\infty} (1-\theta) d\eta \quad (2.8)$$

Для приближенного вычисления величины $\Phi(\chi, 0)$ будем использовать в (2.8) разложение функции θ в ряд Тейлора в окрестности точки $\eta=0$. Из уравнения сохранения энергии (2.5) и граничных условий (2.3) получим

$$\theta \approx \theta_w + b\eta - \text{Pr} \chi^{-1/s} \theta_m^{1-\omega} a b \eta^4 / 4! \quad (2.9)$$

$$b = (1 - \theta_w) \left(\frac{1}{6} \text{Pr} \chi^{-1/s} \theta_m^{1-\omega} a \right)^{1/3} \Gamma^{-1}(4/3) \quad (2.10)$$

где значение b выписано в первом приближении.

С учетом (2.10) можно показать, что для $\theta_w \neq 1$ функция θ , представленная приближенно отрезком ряда Тейлора (2.9), ни при каких η не примет значение $\theta=1$. Поэтому из соображений конечности интеграла в формуле (2.8) ограничим область интегрирования функции $(1-\theta)$ точкой $\eta_\infty < \infty$, в которой функция θ , полученная с учетом двух первых ненулевых членов разложения (2.9), принимает значение $\theta=1$: $\eta_\infty = (1-\theta_w)/b$.

Подставляя (2.9) в (2.8) и интегрируя от 0 до η_∞ , с учетом (2.10)

находим

$$\Phi(\chi, 0) = \pm 1/2 \Gamma(4/3) (1 + 0,4 \Gamma^3(4/3)) \theta_m (1 - \theta_w)^{1/6} \text{Pr} \chi^{-1/6} \theta_m^{1-\omega} a^{-1/3} \quad (2.11)$$

Используя (2.11) и следуя [4], из соотношения (2.7) получим уравнение пятой степени

$$z^5 - z^3 = C \xi_1 \text{Pr}^{-1/3} (\theta_w - 1) \theta_m^{(\omega+1)/2}$$

$$z = \left(\frac{a}{a_0} \right)^{1/3}, \quad a_0 \simeq \frac{\theta_m^{(1-\omega)/2}}{A^3 \chi^{1/6} \sqrt{6 \Gamma^3(4/3)}} \quad (2.12)$$

$$C = \pm (3^{5/2}/4) \Gamma^{5/2}(4/3) \Gamma(5/3) \times \\ \times (1 + 0,4 \Gamma^3(4/3)) \simeq \pm 2,8398, \quad \xi_1 = 1/(\text{Gr}_x \sqrt{\text{Re}_x})$$

Здесь ξ_1 — параметр смешанной конвекции [10], a_0 — значение a при $\xi_1 = 0$, т. е. a_0 соответствует коэффициенту трения для вынужденной конвекции сжимаемого газа на горизонтальной пластине c_{f0} . Учитывая некоторую погрешность вычисления a_0 и применяя метод асимптотической коррекции [11], с учетом (2.6) приходим к следующей формуле:

$$c_{f0} \sqrt{\text{Re}_x} = 0,664 \theta_m^{(\omega-1)/2} \quad (2.13)$$

Зависимость (2.13) близка к эмпирической формуле Юнга, полученной для обтекания пластины газом с большими скоростями [8], если в ней положить $M_\infty = 0$

$$c_{f0} \sqrt{\text{Re}_x} = 0,664 [0,45 + 0,55 \theta_w + \\ + 0,09 (c_p/c_v - 1) M_\infty^2 \sqrt{\text{Pr}}]^{(\omega-1)/2}$$

Из уравнения (2.12) аналогично [4] получим формулы

$$a/a_0 \simeq [0,5 (1 + \sqrt{1 \pm 11,36 (\theta_w - 1) \xi_1 \text{Pr}^{-1/3} \theta_m^{(1+\omega)/2}})]^{3/2} \quad (2.14)$$

$$c_f \sqrt{\text{Re}_x} = 0,664 \theta_m^{(\omega-1)/2} a/a_0 \quad (2.15)$$

Если при решении задачи [4] о смешанной конвекции на горизонтальной пластине в приближении Буссинеска (при $|\theta_w - 1| \ll 1$) для вычисления функции $\Phi(x, 0)$ использовать алгоритм данной работы, то получим формулу

$$c_f \sqrt{\text{Re}_x} = 0,664 [0,5 (1 + \sqrt{1 \pm 11,36 \xi \text{Pr}^{-1/3}})]^{3/2} = 0,664 \frac{a}{a_0}$$

$$\xi = \frac{|\text{Gr}_x|}{\text{Re}_x^{5/2}} = |\theta_w - 1| \xi_1 \quad (2.16)$$

которая отличается от аналогичной формулы работы [4] только числовым коэффициентом перед ξ и дает лучшее согласование с численными результатами [12].

Для нахождения безразмерного коэффициента теплообмена b обратимся к уравнению для температуры в (2.5). С учетом двух первых членов асимптотического разложения получим соотношение

$$1 - \theta_w = b \int_0^\infty \left(- \frac{\text{Pr} \theta_m^{1-\omega} a \eta^3}{6 \chi^{1/6}} \right) \left(1 - \frac{\text{Pr} \theta_m^{2(1-\omega)} \Phi(\chi, 0) \eta^4}{24 \chi^{1/6}} \right) d\eta$$

из которого вытекает формула

$$\left(\frac{b}{b_0}\right)^{-1} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-1/3} \pm 0,4733(\theta_w - 1)\xi_1 \text{Pr}^{-2/3}\theta_m^{(1+\omega)/2} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-2}$$

$$b_0 = \frac{\text{Pr}^{1/3}(1-\theta_w)\theta_m^{(1-\omega)/2}}{A\chi^{1/3}\sqrt{6}\Gamma^{3(1/3)}} \quad (2.17)$$

Здесь b_0 соответствует локальному числу Нуссельта Nu_{x_0} , полученному при $\xi_1=0$, т. е. в случае вынужденной конвекции сжимаемого газа на горизонтальной пластине. Применяя для уточнения b_0 метод асимптотической коррекции [11], с учетом (2.6), (2.17) получим

$$\frac{\text{Nu}_{x_0}}{\sqrt{\text{Re}_x}} = 0,332 \text{Pr}^{1/3}\theta_m^{(\omega-1)/2}, \quad \frac{\text{Nu}_x}{\sqrt{\text{Re}_x}} = 0,332 \text{Pr}^{1/3}\theta_m^{(\omega-1)/2} \frac{b}{b_0} \quad (2.18)$$

В приближении Буссинеска [4] локальное число Нуссельта Nu_x следует находить по формуле

$$\frac{\text{Nu}_x}{\sqrt{\text{Re}_x}} = 0,332 \text{Pr}^{1/3} \left[\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-1/3} \pm 0,4733\xi \text{Pr}^{-2/3} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-2} \right]^{-1} \quad (2.19)$$

где a/a_0 задается (2.16).

Анализируя (2.13) и (2.18), приходим к аналогии Рейнольдса [8] между процессами трения и теплообмена для вынужденной конвекции сжимаемого газа на горизонтальной пластине при малых дозвуковых скоростях обтекания

$$\text{Nu}_{x_0} = 1/2 \text{Re}_x c_{f_0} \text{Pr}^{1/3} \quad (2.20)$$

установленной также путем обобщения численных результатов при $\omega=1$, $\text{Pr}=0,6-15$ [8].

Полученные выше формулы являются уточнением и обобщением формул из [4] на случай произвольных значений θ_w .

3. Численное решение. Исходную систему уравнений (1.1) для численной реализации удобно преобразовать к другому виду путем перехода от координат x, y к координатам $\xi(x), \eta_1(x, y) = y^{\nu} u_{\infty} \rho_{\infty} / (\mu_{\infty} x)$ и вводя приведенную функцию тока f_1 и безразмерную температуру θ_1 по следующим формулам:

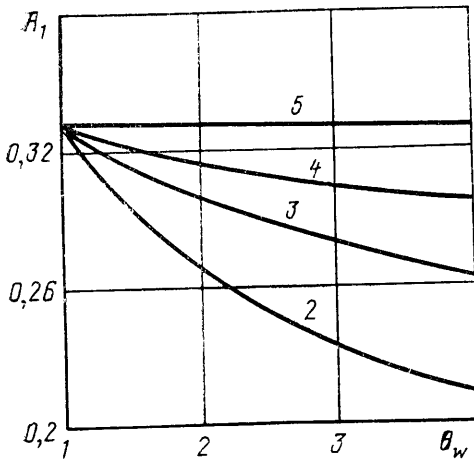
$$f_1(\xi, \eta_1) = \frac{\psi(x, y)}{\sqrt{\rho_{\infty} u_{\infty} \mu_{\infty} x}}, \quad \theta_1(\xi, \eta_1) = \frac{(T - T_{\infty})}{(T_w - T_{\infty})} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & ((1+B\theta_1)^{\omega} F_{\eta_1}')_{\eta_1}' + \frac{f_1}{2} F_{\eta_1}' \pm \frac{\xi}{2} \left[\eta_1 \frac{\theta_1}{(1+B\theta_1)} + \right. \\ & \left. + \int_{\eta_1}^{\infty} \frac{\theta_1}{1+B\theta_1} d\eta_1 + \xi \int_{\eta_1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\theta_1}{1+B\theta_1} \right) d\eta_1 \right] = \frac{\xi}{2} [f_{1\eta_1} F_{\xi}' - f_{1\xi} F_{\eta_1}'] \end{aligned} \quad (3.2)$$

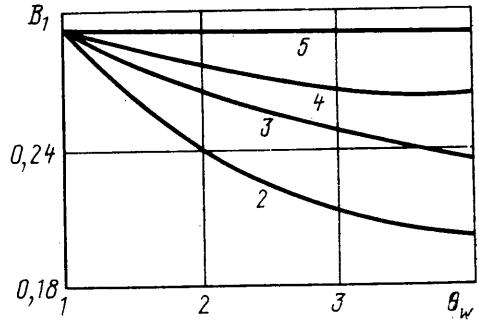
$$\left(\frac{(1+B\theta_1)^{\omega}}{\text{Pr}} \theta_{1\eta_1}' \right)_{\eta_1}' + \frac{f_1}{2} \theta_{1\eta_1} = \frac{\xi}{2} [f_{1\eta_1}' \theta_{1\xi}' - \theta_{1\eta_1}' f_{1\xi}'] \quad (3.3)$$

$$\eta_1=0: \quad \theta_1=1, \quad F=0, \quad f_1=f_{1w}=0, \quad \eta_1=\infty: \quad \theta_1=0, \quad F=1 \quad (3.4)$$

$$F = (1+B\theta_1) f_{1\eta_1}', \quad f_1 = \int_0^{\eta_1} f_{1\eta_1}' d\eta_1 + f_{1w}, \quad B = \frac{T_w - T_{\infty}}{T_{\infty}} \quad (3.5)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Остальные обозначения соответствуют приведенным выше. Безразмерными параметрами, определяющими решение полученной системы уравнений (3.2)–(3.4), являются ξ , Pr , ω и относительный перепад температуры B . Из нее легко получается «традиционный» вид системы уравнений, используемый многими авторами [12, 13] для анализа этой задачи в приближении Буссинеска, для чего необходимо в (3.2)–(3.3) формально положить $B=0$. Локальные число Nu_x и коэффициент трения c_f с использованием переменных (3.1) запишутся в виде ($\eta_1=0$)

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = -(1+B\theta_1)^\omega \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_1}, \quad \frac{c_f \sqrt{Re_x}}{2} = (1+B\theta_1)^\omega \frac{\partial (F(1+B\theta_1)^{-1})}{\partial \eta_1}$$

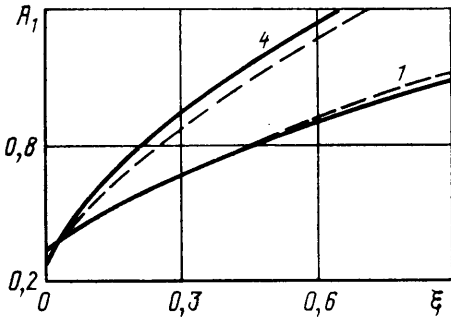
Уравнения движения (3.2) и энергии (3.3) однотипны по своей структуре. Для их численного решения использовалась полностью неявная разностная схема, имеющая погрешность аппроксимации $O(\Delta^2 \eta_1 + \Delta \xi)$ в случае постоянного по координате η_1 шага и первый порядок аппроксимации, когда разбиение по η_1 является неравномерным. Ее построение осуществлялось на основе применения итерационно-интерполяционного метода [7]. Решение неавтономной задачи ($\xi > 0$) осуществлялось путем маршевого прохода по координате ξ . Для взаимного согласования профилей θ_1 и F при расчете в фиксированном сечении по ξ использовались итерации. Решение считалось найденным, если выполнялось условие

$$|\theta_1^{(k)} - \theta_1^{(k-1)}| < \epsilon, \quad |F^{(k)} - F^{(k-1)}| < \epsilon$$

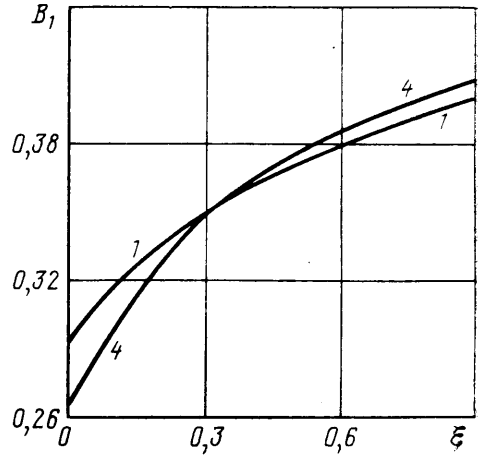
где k – индекс итерации.

В численных расчетах использовалось значение $\epsilon=0,0001$. Условия на внешней границе пограничного слоя выставлялись при $\eta_{1\infty}=8$. Для получения значений $c_f(\xi)$ и $Nu_x(\xi)$ с высокой точностью (четыре знака в мантиссе числа) применялись подробные как равномерная (с шагом $\Delta \eta_1=0,05$), так и неравномерная (со сгущением вблизи поверхности) по η_1 сетки. Использование последней позволяло без потери точности по c_f и Nu_x в 3 раза сокращать необходимое число узлов по η_1 по сравнению с равномерной сеткой. Шаг $\Delta \xi$ по маршевой координате ξ составлял 0,01 в области $\xi > 0$. Тестирование программы осуществлялось путем решения аналогичной задачи в приближении Буссинеска и сравнения локальных значений $c_f(\xi)$ и $Nu_x(\xi)$ с табличными данными работы [13]. Различие по c_f и Nu_x составило менее 0,1% в диапазоне изменения параметра плавучести $0 < \xi < 4$. При решении автономной задачи при $\xi=0$ (ω и B – произвольные) сравнение по c_f с приведенной выше эмпирической формулой Юнга [8] при $M_\infty^2 \rightarrow 0$ дало согласование не хуже 2% при $0 < \omega < 1$ и $B < 3$.

4. Анализ результатов. Сравнение численных результатов с аналитическими для смешанной конвекции первого типа ($\xi > 0$) проводилось по $c_f \sqrt{Re_x}$ и $Nu_x / \sqrt{Re_x}$ для пяти случаев описания течения. Первый случай соответствовал приближению Буссинеска, остальные – случаю когда ρ изменяется согласно (1.3), а μ и λ – по закону (1.4), где $\omega=0; 0,5; 0,75$;



Фиг. 3



Фиг. 4

1 соответственно. Четвертый случай ($\omega=0,75$) лучше других описывает реальное изменение физических свойств газа вследствие хорошего соответствия с формулой Саттерлэнда [8]. Случаи II–V в отличие от I характеризуются зависимостью искомых величин $c_f \sqrt{\text{Re}_x}$ и $\text{Nu}_x / \sqrt{\text{Re}_x}$ от трех параметров ξ , θ_w (или $B=\theta_w-1$) и Pr . При численных расчетах полагалось $\text{Pr}=0,7$, что характерно для воздуха.

На фиг. 1, 2 показано влияние температурного фактора $\theta_w=T_w/T_\infty$ на коэффициенты $A_1=c_{f0} \sqrt{\text{Re}_x}/2$ и $B_1=\text{Nu}_{x0}/\sqrt{\text{Re}_x}$ для случая чисто вынужденной конвекции (т. е. $\xi=0$), когда в (3.2)–(3.5) рассматривается автономная задача (случаи II–V обозначены цифрами 2–5 соответственно). Результаты по аналитическим формулам (2.13) и (2.18) ввиду их малой погрешности относительно численных (менее 2% для $c_{f0} \sqrt{\text{Re}_x}$ и 4% для $\text{Nu}_{x0}/\sqrt{\text{Re}_x}$) на этих рисунках не указываются. В сравнении со случаем IV неучет переменности физических свойств ($\omega=0$) занижает локальные значения $c_{f0} \sqrt{\text{Re}_x}$ (кривая 2, фиг. 1) и $\text{Nu}_{x0}/\sqrt{\text{Re}_x}$ (кривая 2, фиг. 2) до 27% при изменении температурного фактора до $\theta_w=4$. При использовании значений $\omega=0,5$ и 1 (случаи III и V) при $\theta_w < 4$ погрешность в определении $c_{f0} \sqrt{\text{Re}_x}$ по отношению к случаю IV достигает –11 и 12%, а в определении $\text{Nu}_{x0}/\sqrt{\text{Re}_x}$ –10 и 10% соответственно.

На фиг. 3 показано изменение локального коэффициента трения $A_1=c_f \sqrt{\text{Re}_x}/2$ в зависимости от параметра плавучести ξ , штриховой кривой обозначены результаты по аналитическим формулам (2.14)–(2.16). Кривая 1 соответствует приближению Буссинеска, 4 – случаю IV при $\theta_w=4$. Промежуточные кривые (при $1 < \theta_w < 4$) лежат между линиями 1 и 4. Видно, что с увеличением θ_w чувствительность $c_f \sqrt{\text{Re}_x}$ к изменению ξ увеличивается. При изменении θ_w до 4 приближение Буссинеска занижает результаты до 24% для $\xi=0,2$ и до 34% для $\xi=1$. Таким образом, для расчета коэффициента трения приближение Буссинеска применимо лишь в очень ограниченной области по ξ и для малых θ_w .

На фиг. 4 изображена зависимость $B_1=\text{Nu}_x/\sqrt{\text{Re}_x}$ от параметра плавучести ξ . Обозначения кривых соответствуют фиг. 3. Видно, что в отличие от c_f число Nu_x менее чувствительно к воздействию подъемных сил. Результаты по формулам (2.17)–(2.19) хорошо (до 4%) соответствуют численным значениям, поэтому не нанесены на график. Сравнение кривых 1 и 4 показывает, что приближение Буссинеска с точностью до 10%

можно использовать при расчете коэффициента теплообмена в диапазонах изменения параметра плавучести $0 < \xi < 1$ и температурного фактора $1 < \theta_w < 4$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мартыненко О. Г., Соковишин Ю. А. Теплообмен смешанной конвекцией. Минск: Наука и техника, 1975. 255 с.
2. Schneider W., Wasel M. G. Breakdown of the boundary-layer approximation for mixed convection above a horizontal plate // Int. J. Heat and Mass Transfer. 1985. V. 28. № 12. P. 2307–2313.
3. Lin H.-T., Chen C.-C., Yu W.-S. Mixed convection from a horizontal plate to fluids of any Prandtl number // Wärme- und Stoffübertragung. 1989. B. 24. № 4. S. 225–234.
4. Агранат В. М., Милованова А. В. Теплообмен и трение в пограничном слое при смешанной конвекции на горизонтальной пластине // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 6. С. 41–46.
5. Турский Г. А. Сублимация тупого тела в окрестности критической точки в плоском и осесимметричном потоке смеси газов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1961. Т. 1. № 5. С. 884–902.
6. Агранат В. М. Влияние градиента давления на трение и теплообмен в запыленном пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 5. С. 105–108.
7. Гришин А. М., Берцун В. Н., Зинченко В. И. Итерационно-интерполяционный метод и его приложения. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1981. 160 с.
8. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
9. Турский Г. А. К теории гиперзвукового обтекания плоских и осесимметричных затупленных тел вязким, химически реагирующим многокомпонентным потоком газа при наличии вдува // Науч. тр. Ин-та мех. МГУ. 1975. № 39. С. 5–38.
10. Redekopp L. G., Charwat A. F. Role of buoyancy and the Boussinesq approximation in horizontal boundary layers // J. Hydronaut. 1972. V. 6. № 1. P. 34–39.
11. Дильман В. В., Полянин А. Д. Методы модельных уравнений и аналогий в химической технологии. М.: Химия, 1988. 303 с.
12. Чжэнь, Спэрроу, Мукоглу. Смешанная конвекция в пограничном слое на горизонтальной пластине // Теплопередача. 1977. № 1. С. 70–76.
13. Рамачандран, Армали, Чжэнь. Смешанная конвекция около горизонтальной пластины // Теплопередача. 1983. № 2. С. 177–180.

Томск

Поступила в редакцию
4.VI.1990