

УДК 532.526.2

© 1991 г.

Г. В. ВОЙТКОВА, В. В. ЛУНЕВ

## О РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ ДАВЛЕНИЯ

В [1] показано, что уравнения нестационарного двумерного ламинарного пограничного слоя с заданным достаточно большим положительным градиентом давления  $dp/dx > 0$  имеют непрерывное решение только до точки  $x_0$  нулевого трения. В этой точке решение имеет особенности типа  $(x_0 - x)^{1/2}$  и, главное, непродолжимо за нее.

Но этот результат не содержит ответа на вопрос, что будет, если искать подобное решение в качестве предельного для расширенной нестационарной задачи с подходящими начальными и заданными стационарными граничными условиями. В самом деле, из общих соображений, казалось бы, следует, что в этом случае решение должно или может прийти в процессе эволюции к какому-то определенному стационарному пределу во всей области, в том числе в области  $x > x_0$ , запретной в постановке Гольштейна [1], если при этом не возникнут какие-либо периодические структуры.

Исследованию этого вопроса и посвящена предлагаемая работа.

На модельных аналогах и численным решением исходных уравнений показано, что при отсутствии непрерывных решений расширенных пограничного слоя с заданным положительным градиентом давления с учетом информации, приносимой из отрывной области течения встречным полем скоростей, могут сформироваться и имеют математический смысл обобщенные решения поставленной задачи в классе разрывных функций.

При этом разрывных решений стационарных уравнений может существовать множество, но единственным оказывается стационарный предел удовлетворяющих условиям сохранения решений расширенных нестационарных уравнений. В таком решении граница  $x_*$  применимости непрерывной ветви решения слева, или положение точки разрыва решений, оказывается сдвинутой вперед относительно точки нулевого трения  $x_0$ , определенной на непрерывном решении без учета влияния низлежащей области, т. е. всегда  $x_* \leq x_0$ . В прикладном отношении полученные результаты могут быть полезны при разработке численных методов, промежуточной стадией которых является решение уравнений пограничного слоя с заданным положительным градиентом давления (именно отсюда и возникла данная задача).

1. Под расширенной нестационарной задачей будем подразумевать обычную задачу для нестационарных уравнений несжимаемого ламинарного пограничного слоя со стационарными краевыми условиями и с произвольным начальным полем скоростей. В обычных обозначениях ( $u, v$  — компоненты скорости по осям  $x, y$ ;  $p$  — давление) эта задача имеет следующую математическую формулировку

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -q + \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad q = \frac{dp}{dx}, \quad \tau = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$y=0: u, v=0, y \rightarrow \infty, u \rightarrow U(x) \quad (1.2)$$

$$t=0: u=u_0(x, y)$$

В стационарном варианте ( $u_t=0$ ) это уравнение имеет особую точку, в которой трение на стенке  $\tau_w=0$ . Решение в окрестности этой точки

имеет асимптотику

$$u = \tau_w y + 1/2 y^2 \frac{dp}{dx} - cy^3, \quad c > 0$$

$$v = c_1 (x_0 - x)^{-1/2}, \quad \tau = [12c(x_0 - x)]^{1/2} \quad (1.3)$$

Знак константы  $c$  очевиден из характера нарастания профиля скорости. Это и есть особое решение [1], непродолжимое за точку  $x > x_0$ . Однако в общем случае точка, в которой  $\tau_w = 0$ , не является особой для нестационарной системы (1.1), а посему нет формальных препятствий строить эволюционное решение этого уравнения во всей области его определения с переходом к пределу.

Эта система имеет параболический тип с нелинейным конвективным оператором в левой части и двумя семействами характеристик.

$$dt = \frac{dx}{u}, \quad x = \text{const} \quad (1.4)$$

из которых первое, обусловленное левой частью первого уравнения, и является источником возникновения разрывов. В самом деле, положительный градиент давления  $q > 0$  индуцирует в некоторой области течения поле отрицательных скоростей, т. е. появление встречных потоков и, как следствие, возможное пересечение характеристик. Это и приводит к разрывам, механизм продольного сглаживания которых в данной постановке опущен вместе с учетом вязко-невязкого взаимодействия.

Трудности аналитического исследования подобных решений понятны. Поэтому для начала исследуем характер возникновения и распространения разрывов решений более простых, модельных уравнений.

2. Рассмотрим модельное уравнение, которое обладает теми же свойствами нелинейного конвективного оператора, что и исходная система (1.1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -q + (1-u) \quad u(0, x) = 1, \quad -\infty < x < \infty \quad (2.1)$$

В этом уравнении функция  $q(x)$  моделирует внешнее возмущение — градиент давления, а член  $(1-u)$  — эжектирующую роль внешнего потока, выравнивающую поле скоростей вдали от области наложения градиента. Важно то, что это уравнение имеет то же ответственное за появление разрывов семейство характеристик, что и исходные уравнения (1.1).

В стационарном варианте ( $u_t = 0$ ) точка  $x_0$ , в которой  $u = 0$ , является особой; решение в ее окрестности

$$u = [(1-q)(x-x_0)]^{1/2}, \quad 1-q > 0, \quad x > x_0$$

$$u = [(q-1)(x_0-x)]^{1/2}, \quad q-1 > 0, \quad x < x_0 \quad (2.2)$$

непродолжимо за точку  $x_0$  и при  $q > 1$  является моделью особой точки Гольштейна.

Левая часть уравнения (2.1) имеет дивергентную форму, а правая — ограничена, поэтому в соответствии с общей теорией таких уравнений применение теоремы Остроградского — Гаусса к бесконечно узкой области с внешним контуром  $\Gamma$ , охватывающей линию разрыва, даст в пределе известное интегральное условие сохранения [2]

$$\oint_{\Gamma} \left( u dx - \frac{1}{2} u^2 dt \right) = 0 \quad (2.3)$$

Это условие дает следующее уравнение для траектории распространения разрыва  $x=x_s(t)$ :

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{[u^2]}{[u]} = \frac{u_+ + u_-}{2} \quad (2.4)$$

где индексы минус и плюс относятся к величинам слева и справа от разрыва. В стационарном пределе разрыв остановится в том сечении, где выполняется условие его равновесия

$$[u^2] = 0, \quad u_+ + u_- = 0 \quad (2.5)$$

Ограничимся функцией  $q(x)$  ступенчатой формы: постоянной  $q=q_0$  на отрезке  $[x_1, x_2]$  и равной нулю вне его. Разрывы функции  $q(x)$  можно считать аналогом внезапного появления и исчезновения градиента давления, что типично, например, для сверхзвукового внешнего потока.

В стационарном варианте ( $u_s=0$ ) уравнение (2.1) при всюду постоянном  $q$  имеет два семейства интегральных кривых

$$Y = Z + \ln(Z-1), \quad Z > 1$$

$$\tilde{Z} = \frac{u}{1-q}, \quad Y = \frac{x-c}{1-q}, \quad q = \text{const} \quad (2.6)$$

$$Y = Z - \ln(1-Z), \quad Z < 1 \quad (2.7)$$

Соответствующие этим решениям кривые I и II показаны на фиг. 1, а сплошными линиями, штриховыми показаны их асимптоты  $\tilde{Z}=1$  и  $Z=-Y$ , из коих первая сама является решением всегда, а вторая — при  $q=1$ . В точке  $u=Z=0$  ветвь II имеет вертикальную касательную. Параметр сдвига  $c$  задает полное семейство этих интегральных кривых. В исходных переменных расположение ветвей I и II изображено на фиг. 1, б для  $1-q > 0$  и на фиг. 1, в для  $1-q < 0$ .

Поскольку других интегральных кривых при постоянном  $q$  это уравнение не имеет, решение задачи для ступенчатой функции  $q(x)$  может быть составлено лишь из кусков этих ветвей, соответствующих местному значению  $q$ .

Это решение всегда кусочно-гладкое вследствие разрывной функции  $q$  и зависит от  $q_0$  и длины  $l=x_2-x_1$ .

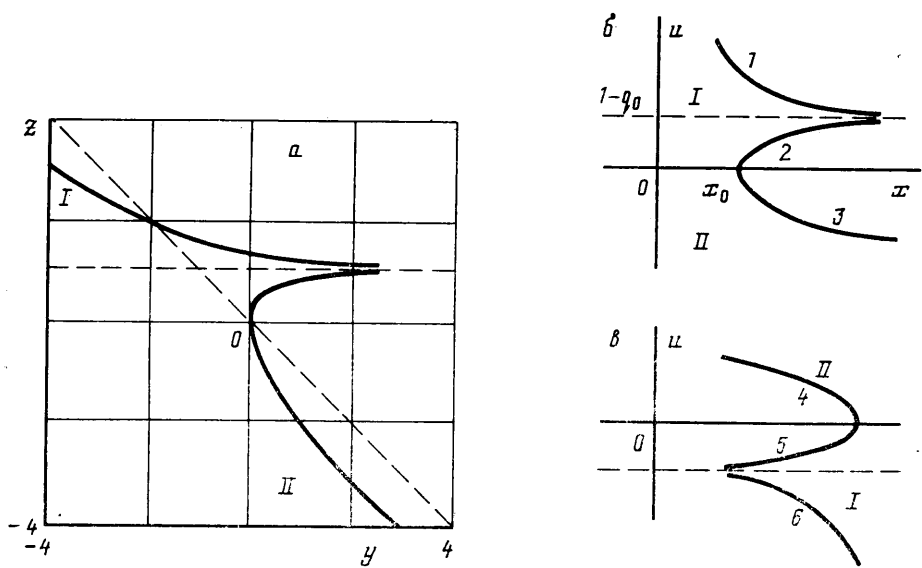
При  $q_0 \leq 1$  непрерывное решение существует всегда; различные его варианты показаны на фиг. 2, а: при  $x \leq x_1$  имеем  $u=1$ , при  $x > x_2$  решением является восходящая (выше точки  $O$ ) ветвь 2 семейства II, а на отрезке  $[x_1, x_2]$  используется показанная на фиг. 1, б кривая 1 семейства I, причем кривая 1' здесь отвечает величинам  $q_0 < 1$  или  $q_0=1, l=1$ , кривая 1'' —  $q_0=l=1$ , кривая 1''' —  $q_0=1, l > 1$ .

При  $1 < q_0 < 2$  правее точки  $x=x_1$  на фиг. 2, б следует перейти на нисходящую ветвь 4 семейства II. Однако это семейство непродолжимо вправо за особую точку  $x=x_0, u=0$  и не может пересечься с интегральной кривой 5' семейства II, проведенной в этой области через точку  $x_2$ , и образовать непрерывное решение.

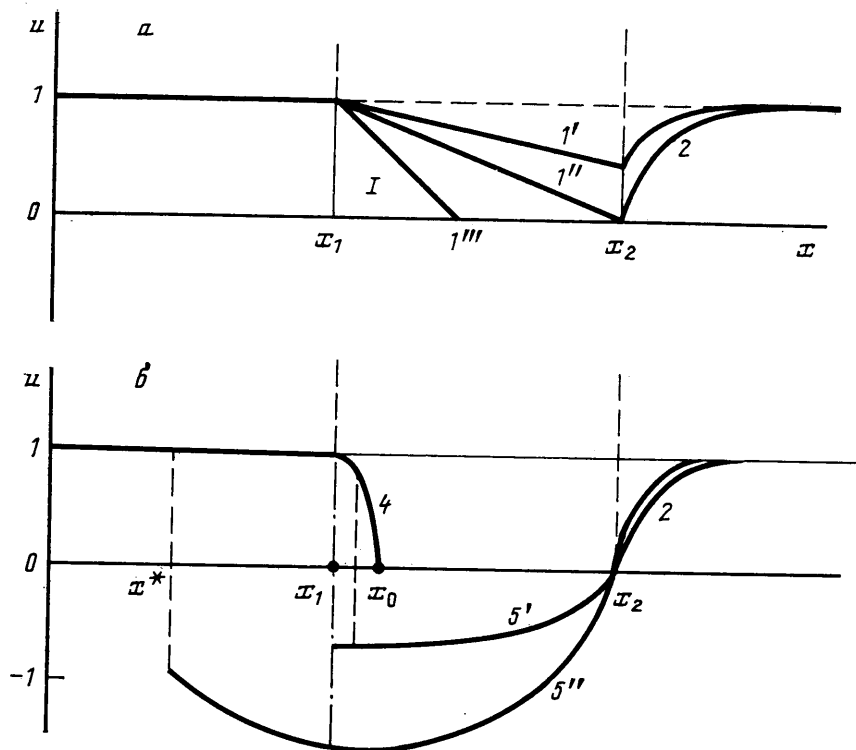
Таким образом, при достаточно большом возмущающем параметре  $q_0$ , моделирующим положительный градиент давления, построение непрерывных решений оказывается невозможным.

В связи с этим введем разрывные обобщенные решения этой задачи и исследуем их свойства. Прежде всего заметим, что таких решений для стационарной задачи можно построить множество, например на кривую 5' (фиг. 2, б) можно перейти с любой точки кривой 4 на отрезке  $[x_1, x_0]$ . Более того, вообще всегда можно посчитать решением, удовлетворяющим уравнению на участках гладкости, простейшую ступенчатую функцию

$$\begin{aligned} u &= 1, & x &= x_1, & x &> x_2 \\ u &= 1 - q_0, & x_1 &< x < x_2 \end{aligned} \quad (2.8)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Поэтому выделение единственного решения требует дополнительных предпосылок. Естественно интерпретировать такое решение как предел разрывного решения исходной нестационарной задачи. И это решение должно, во-первых, удовлетворять условию сохранения (2.5), а, во-вторых, и главное, будучи взятым в качестве начального распределения для

нестационарного уравнения (2.1), оно должно сохраняться во времени.

В свете этих требований проследим за эволюцией начального распределения (2.8), сгладив разрывы на некотором малом интервале  $\delta \ll l$ . Поскольку характеристики уравнения имеют наклон  $dx/dt = u$ , а по обе стороны точки  $x_2$  имеем  $u_+ > u_-$ , то при малых  $t$  в окрестности этой точки получим расходящийся пучок характеристик — «волну разрежения», которая исключает возможность сохранения подобного разрыва. Поэтому построенные выше на фиг. 1, 2 непрерывные (и даже гладкие) решения в окрестности точки  $x_2$  являются единственно возможным элементом предельного стационарного решения.

Но в точке  $x_1$ , наоборот,  $u_+ < u_-$  — что приводит к пучку сходящихся характеристик, и для выделения однозначного решения следует ввести разрыв, распространяющийся по закону (2.4). При этом в зависимости от условий задачи разрыв со временем может исчезнуть вовсе или же остановиться в пределе  $t \rightarrow \infty$  внутри или даже впереди области  $[x_1, x_2]$  наложенного положительного градиента давления.

Если  $u_+ = 1 - q_0 > 0$ , то этот разрыв будет распространяться вправо беспредельно, так как условие равновесия  $u_+ = -u_-$  нигде не может быть достигнуто. Последующее взаимодействие его с волной разрежения приведет к непрерывным решениям, показанным на фиг. 2, а.

При  $u_+ + u_- = 2 - q_0 > 0$  разрыв, перемещаясь вправо, имеет возможность достигнуть условия равновесия  $u_+ + u_- = 0$  и остановиться в некой точке  $x_* > x_1$ , соединяющей значения  $u_- = u_+$  на встречающихся ветвях решения, фиг. 2, б. Но при  $q_0 > 2$ ,  $u_+ + u_- < 0$  разрыв пойдет первоначально влево и при достаточно больших  $l$  интенсивности догоняющей его (из точки  $x_2$ ) волны разрежения может оказаться недостаточно для поворота его назад, что в итоге приведет к предельному типу решения с разрывом в точке  $x_* < x_1$  впереди вызвавшего его источника. Это решение будет состоять из кривой 5'', непрерывно состыкованной в точке  $x_1$  с кривой 3 ветви II, продолженной до точки  $x_*$ , в которой достигается значение  $u_+ = -1$ , что и позволяет построить показанное на фиг. 3 решение (для  $q_0 = 10$ ), разрывное в этой точке.

3. Полученное точное решение используем для выбора и апробации разностной схемы построения разрывных решений. Такая схема должна быть, как известно, консервативной, устойчивой, ее требует вычисления конвективных производных «по потоку», и одновременное удовлетворение обоим требованиям затруднительно. Поэтому здесь использована простейшая явная по времени разностная схема со следующей аппроксимацией левой части:

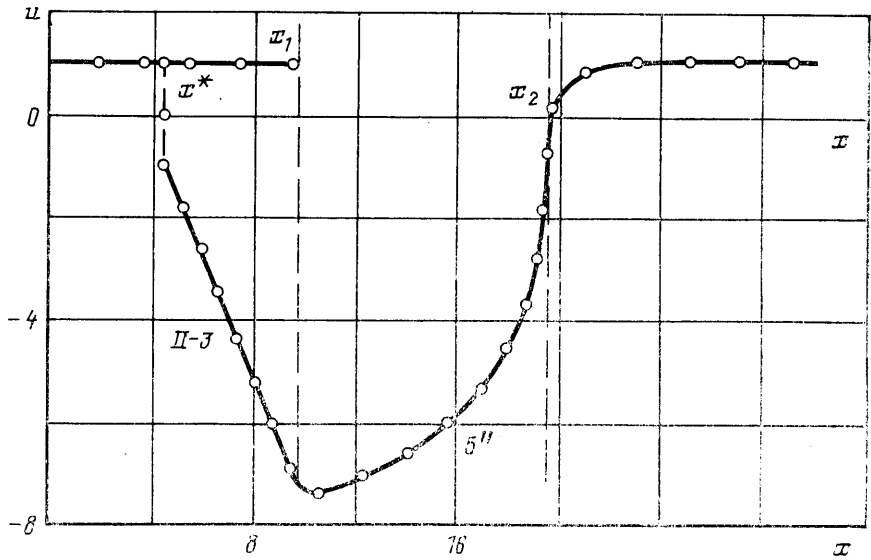
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \begin{cases} u_i^2 - u_{i-1}^2, & u_i^* > 0 \\ u_{i+1}^2 - u_i^2, & u_i^* < 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

$$u_i^* = \frac{1}{2} (u_{i+1} + u_{i-1})$$

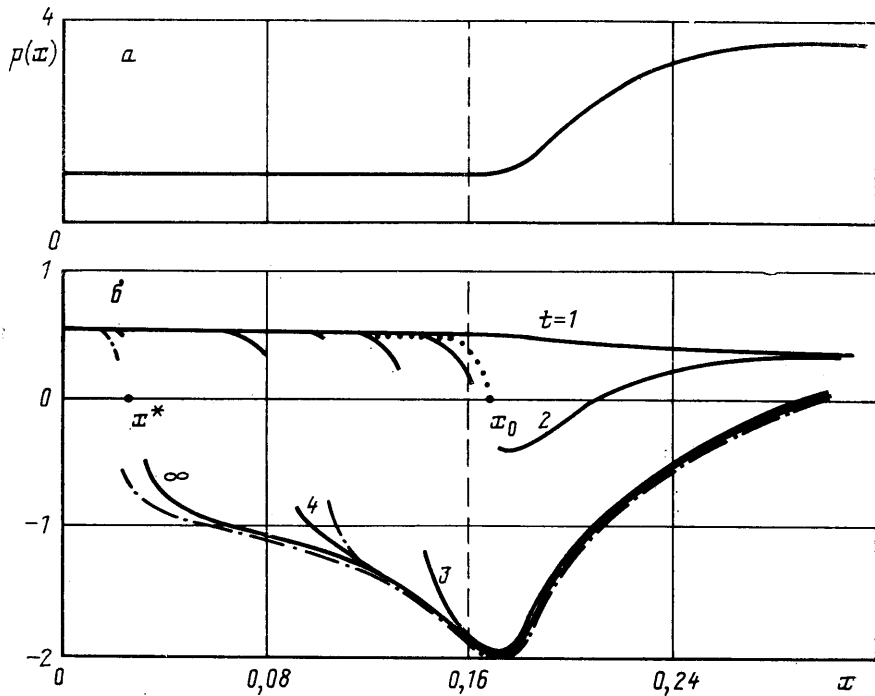
$$t_{n+1} - t_n = \Delta t, \quad x_i - x_{i-1} \approx \Delta x$$

Эта схема консервативна, как легко показать, лишь в областях с одинаковым знаком  $u$  или, в противном случае, в стационарном пределе, при  $t \rightarrow \infty$ . Но она правильно отслеживает направление движения разрыва. В самом деле, согласно (2.4), при  $u_i^* > 0$  разрыв перемещается вправо, а при  $u_i^* < 0$  — влево, обеспечивая перенос информации между областями в нужном с позиций строгой теории направлении. При  $u_i^* = 0$  подобная передача информации разностной схемой прекращается вместе с остановкой разрыва, что дает, как показали многочисленные апробационные расчеты, правильное конечное положение разрыва в решении и хорошую точность его вычисления, в том числе и правильное условие стационарного разрыва  $u_+ = -u_-$ .

В то же время к достоинствам этой схемы следует отнести отсутствие



Фиг. 3



Фиг. 4

(в отличие от полностью консервативных схем) вязкости при переходе через разрыв, поэтому разрыв не размывается, что, конечно, важно при выделении разрывных решений.

Следует отметить, что использование в (3.1) естественного, казалось бы, выбора  $u_i^* = u_i$  уже не гарантирует правильного положения разрыва. В частности, в этом случае оказывается невозможным получить описанное выше решение при  $q_0 > 2$ , разрывное в точке  $x$ . (фиг. 3), так

как такая схема в принципе не может дать отрицательных значений  $u$  при  $x < x_1$  и приводит к разрыву решения в точке  $x = x_1$  при точном в то же время воспроизведении кривой 5. Такая чувствительность метода к признаку, разделяющему способы аппроксимации производных, носят принципиальный и, видимо, общий характер.

4. В качестве следующего этапа рассмотрим задачу, уже достаточно близкую к погранслошной, для уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= -q + \frac{\partial \tau}{\partial y}, & \tau &= \frac{\partial u}{\partial y} \\ y=0: u &= 0, & y \rightarrow \infty: u &\rightarrow U(x) \\ t_0=0: u &= u_0(x, y) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Внешняя скорость  $U(x)$  должна удовлетворять невязкому при  $\tau=0$  уравнению.

Предварительные соображения, вытекающие из предыдущего анализа, сводятся к следующему. Поскольку левая часть уравнения, рассматриваемая как независимый дифференциальный оператор, имеет те же характеристики, что и уравнение (2.1), решение последнего послойно, при постоянных  $y$  должно привести к появлению разрыва общего типа  $x = x_s(t, y)$ . Однако наличие второй производной в уравнении (3.1) и крайние условия для него исключают, казалось бы, возможность существования любого разрыва, кроме вертикального  $x = x_s(t)$ . Существование же последнего не запрещено, так как в задаче нет продольного сглаживания решений ввиду отсутствия вторых производных по  $x$  и неучета эффектов вязко-невязкого взаимодействия.

На таком разрыве в стационарном при  $t \rightarrow \infty$  пределе должно выполняться то же условие равновесия (2.5). В самом деле, допустив чисто формально существование разрыва общего вида  $x = x_s(y)$ , получим интегрированием (4.1) следующее условие сохранения на нем:

$$[u^2] dy = [\tau] dx \quad (4.2)$$

Отсюда на вертикальном разрыве должно быть  $\Delta u = 0$ .

Явных глобальных решений этой задачи получить не удалось, поэтому ограничимся численным анализом.

На фиг. 4, б приведены распределения коэффициента трения  $c_f$  на пластине в различные моменты времени  $t=1, 2, \dots$ , в том числе и в пределе  $t \rightarrow \infty$ , на фиг. 5, а показаны профили скорости  $u = u_-$  (кривая 1) перед точкой разрыва на стенке и  $u = u_+$  (кривая 2) сразу за ней. Соответствующее распределение давления показано на фиг. 4а, в качестве начального выбран «безградиентный» профиль  $u_-$ . Для численной аппроксимации левой части уравнения использовалась схема (3.1), для правой части — обычные центральные разности на  $n+1$ -м временном слое.

Как видно, разрыв вблизи стенки виден достаточно четко, (сплошные линии относятся к сетке  $\Delta x = 0,01$ ,  $\Delta t = 3$ , штрихпунктирные — к  $\Delta x = 0,005$ ), но невязкое условие равновесия  $[u^2] = 0$  выполняется лишь при малых  $y$ . Более того, как следует из фиг. 5, с удалением от стенки это условие нарушается качественно, а относительная интенсивность разрыва убывает, что и естественно вследствие непрерывности граничного условия при  $y \rightarrow \infty$ .

Для объяснения этой ситуации, предположив разрыв существующим, определим его форму с учетом законов сохранения (4.2) и с учетом возможности его выделения при воздействии на такое разрывное решение полного оператора уравнения (4.1), т. е. с учетом поперечных вязких сил.

Анализ ограничим окрестностью стенки, где этот разрыв проявляется

наиболее рельефно, и зададим здесь профили скорости по обе его стороны при малых  $y$  в виде

$$u_{\pm} = a_{\pm}y + \frac{1}{2} b_{\pm}y^2$$

$$a = \tau_w = \tau(0) \quad (4.3)$$

Поскольку слева от разрыва имеем монотонно возрастающий, пограничный профиль скорости, а справа профиль скорости должен соответствовать отрывному с отрицательной вблизи стенки скоростью, переходящей в положительную, то можно предположить, что

$$a_- > 0, \quad a_+ < 0, \quad b_- < 0, \quad b_+ > 0 \quad (4.4)$$

Разлагая далее соотношение (4.2) в ряд, получим для формы разрыва уравнение

$$y^2(2a+by) \left[ a_+ - a_- + \frac{1}{2} y(b_+ - b_-) \right] = [a_+ - a_- + y(b_+ - b_-)] \frac{dx_s}{dy} \quad (4.5)$$

$$2a = a_+ + a_-, \quad 2b = b_+ + b_-$$

Для разрывных решений  $a_+ \neq a_-$ , поэтому для поиска главного члена решения этого уравнения его можно упростить, отбросив заведомо малые вторые члены в квадратных скобках

$$\frac{dx_s}{dy} = 2ay^2 + by^3 \quad (4.6)$$

Далее возможны два варианта.

Первый:  $a \neq 0$ . Тогда разрыв имеет форму  $x_s = \frac{1}{3}ay^3$ , или  $y_s = (3x/a)^{1/3}$ . Следовательно, скорости по его краям имеют, согласно (4.3), порядок  $u \sim x^{1/3}$ . Но под действием вязких сил любой разрыв диссипирует и на нем нарастает зона смешения толщиной  $\delta$ , порядок которой оценивается из условия однопорядковости стационарных членов уравнения (4.1)

$$uu_x \sim x^{-1/3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim x^{1/3} \delta^2 \quad (4.7)$$

$$\delta \sim x^{1/3} \sim y_s$$

Как видно, такой разрыв размазывается на область  $\delta$  с размером порядка отхода его от стенки, что делает выделение его из общего массива решения невозможным: фактически решение в целом будет непрерывным.

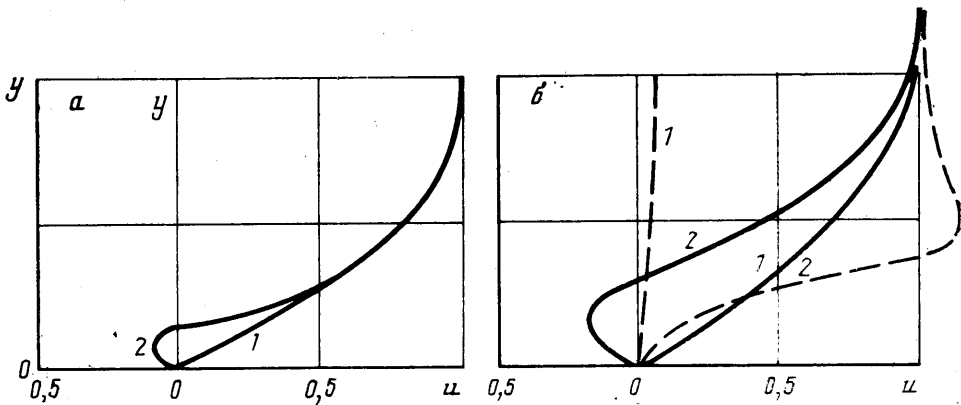
Второй случай, при  $a=0$ , соответствует невязкому условию  $[u^2]=0$  сохранения на разрыве и одновременно его стационарности. Поскольку профиль скорости в отрывной зоне должен быть более крутым, то следует ожидать, что  $b > 0$  и разрыв имеет как бы сносимую потоком форму  $y_s = (4x/b)^{1/4}$ . Проводя далее оценки, аналогичные (4.7), получим

$$\delta \sim x^{3/8} \ll y_s \sim x^{1/4} \quad (4.8)$$

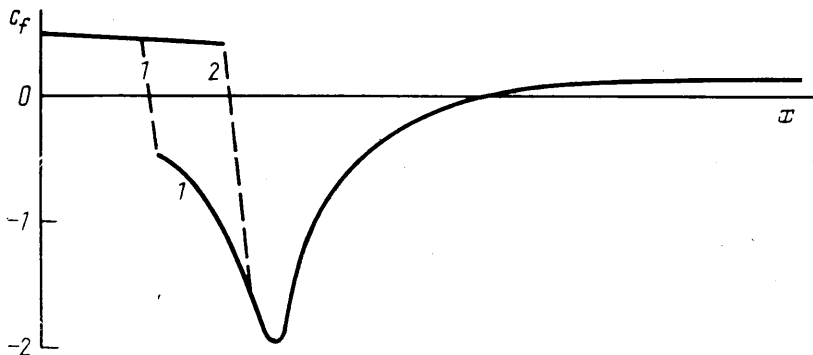
Таким образом, решение в этом случае может содержать разрыв с толщиной его диссипации  $\delta$ , малой по сравнению с отходом от границы области. В масштабе толщины погранслоя этот разрыв вблизи стенки можно считать невязким и полагать, что именно он просматривается в приведенном численном решении на фиг. 4, хотя и не столь четко, как в модельном решении на фиг. 3, из-за возможного попадания расчетных точек внутрь зоны диссипации разрыва или, может быть, роли схемной вязкости.

Разрывное решение исходно стационарной задачи не единственно: так,





Фиг. 5



Фиг. 6

при изменении апробированного в разд. 3 признака определения производных по знаку средней скорости  $u_i$  на знак местной  $u_i$  разрыв устанавливается при  $t \rightarrow \infty$ , но грубо не удовлетворяет условию сохранения импульса и не может, таким образом, быть элементом предельного стационарного решения исходной нестационарной задачи. Разрыв же, вычисленный с учетом закона сохранения, располагается в данном примере впереди области приложения градиента давления, как и при  $q_0 > 2$  в разд. 2. Тем более выделенный разрыв располагается впереди точки Гольдштейна с асимптотикой (1.2), полученной непрерывным продолжением левого решения до точки  $x$  (штриховая линия на фиг. 4). Это обстоятельство, собственно, и закрывает проблему, связанную с невозможностью продолжения непрерывного решения за эту точку.

5. Обратимся, наконец, к исходной системе (1.1) уравнений пограничного слоя. Сходимости численного процесса и получения стационарного предельного решения в этом случае удалось добиться с использованием при вычислении  $v$  из уравнения неразрывности схемы ( $i, j$  — номера точек по осям  $x, y$ )

$$-\frac{\Delta x}{\Delta y}(v_{ij}^n - v_{i,j-1}^n) = \begin{cases} u_{ij}^n - u_{i-1,j}^n, & x < x_s \\ u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n, & x > x_s \end{cases} \quad (5.1)$$

Здесь  $x_s$  — отслеживаемое положение точки смены знака трения.

Результаты расчетов для начального Блазиусовского профиля  $u_0(x, y)$  показаны на фиг. 5, б, 6. Решение, как видно, также носит разрывный ха-

ракетр с теми же свойствами разрыва в скорости  $u$ , что и в разд. 3. В самом деле, для уравнения импульсов  $v$  — не более чем коэффициент, не изменяющий качественной структуры оператора левой части. Вводя, как и в разд. 4, гипотетический разрыв, получим на нем в стационарном пределе следующее условие сохранения:

$$[u^2]dy = ([\tau] - [uv])dx \quad (5.2)$$

Вблизи стенки при малых  $y$  из уравнения неразрывности следует, что  $v \sim y^2$ , поэтому вторым членом справа можно пренебречь, и задача о форме и характере диссипации разрыва сведется к предыдущей, рассмотренной в разд. 4.

Что касается поля скорости  $v(x, y)$ , то оно формируется автоматически, независимо для каждой области непрерывности скорости  $u$ , т. е. раздельно по обеим сторонам разрыва последней. Выбранная же разностная схема (5.1) отражает эту закономерность и не содержит сквозных — через разрыв — производных, что исключает возможность его непосредственного сглаживания.

Это обстоятельство в то же время не дает возможности связать компоненты скорости  $v$  по обеим сторонам разрыва каким-либо дополнительным соотношением и, таким образом, закон сохранения массы на разрыве не выполняется.

Более того, разрывного решения, удовлетворяющего законам сохранения обоих уравнений, просто не существует. В частности, на полученной выше форме разрыва продольных скоростей  $x \sim y^4$  условие сохранения массы  $[u]dy + [v]dx = 0$  приводит к  $[u] \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow 0$ , т. е. к отвергнутому ранее непрерывному решению.

Поскольку компонента  $v$  определяется независимо для каждой линии  $x = \text{const}$  через интеграл по  $y$  от  $du/dx$ , то разрыв  $[v]$  распространяется в отличие от  $u$  на всю толщину пограничного слоя. На фиг. 5 показаны штриховыми линиями профили скорости  $v$  до (кривая 1) и после (кривая 2) точки разрыва на стенке.

В заключение еще раз обратим внимание на важность выбора признака вычисления производных в схеме (3.1). На фиг. 6 кривые 1 и 2 получены по рекомендованному и апробированному в разд. 3 признаку, кривая 2 — с  $u_i^* = u_i$ . Как и на фиг. 3, 4, последняя кривая существенно отличается от первой, не удовлетворяет условиям равновесия разрыва качественно и не может рассматриваться в качестве решения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Goldstein S. On laminar boundary-layer flow near a position of separation // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1948. V. 1. № 1. P. 43–69.
2. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977. 439 с.

Москва

Поступила в редакцию  
3.X.1990