

УДК 532.5.013.4

© 1991 г.

А. С. СЕГАЛЬ

ДИНАМИКА ЗАМКНУТОГО ФРОНТА ПОЛИМЕРИЗАЦИИ В ПЛОСКОМ РАДИАЛЬНОМ ПОТОКЕ

Движение свободной поверхности или границы раздела в высоковязких средах может сопровождаться так называемой неустойчивостью вязкого «пальцеобразования» (fingering), которая приводит к росту малых искривлений с образованием пальцевидной формы границы [1].

Вопрос о пальцеобразовании возникает также при проведении непрерывного процесса фронтальной полимеризации [2], когда реакционная среда протекает сквозь неподвижный фронт реакции полимеризации с увеличением конверсии и, следовательно, вязкости [3]. С динамической точки зрения фронт полимеризации отличается от границы раздела только переносом вещества в нормальном к нему направлении. При этом пальцеобразование можно трактовать как гидродинамическую неустойчивость фронта [4].

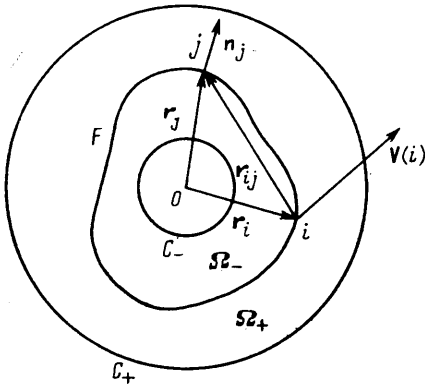
Вопрос о гидродинамической устойчивости стационарного цилиндрического фронта полимеризации в радиальном осесимметричном потоке рассматривался в [5]. В линейном приближении по амплитуде малых возмущений показана устойчивость фронта в широком диапазоне параметров в случае внутренней подачи среды (в направлении роста радиальной координаты). Аналогичные выводы получены в [6] для стационарного сферического фронта в радиальном центрально-симметричном потоке.

В настоящей работе численно исследуется поведение возмущений стационарного цилиндрического фронта произвольной амплитуды. Алгоритм расчета разработан на основе известного метода граничных интегральных уравнений [7]. Подтвержден вывод работы [5] об устойчивости фронта в случае внутренней подачи среды для возмущений произвольной амплитуды. Показана неустойчивость фронта и формирование радиальных «пальцев» маловязкой жидкости, направленных к оси течения, в случае внешней подачи среды (в направлении убывания радиальной координаты).

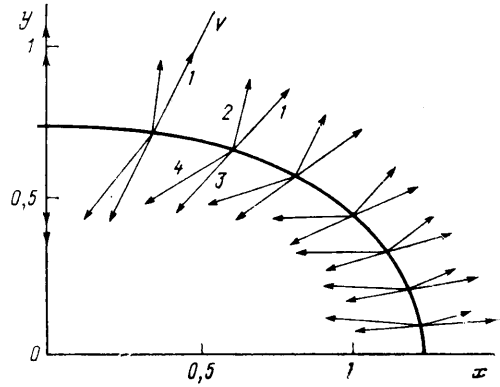
Предложенный метод легко модифицируется для расчета движения свободных поверхностей и границ раздела в химически инертных высоковязких средах. При этом он может быть использован для численного моделирования течений расплавов пластиков и стекол.

1. Ограничимся случаем угловых возмущений и будем считать поток плоским. Пусть замкнутый фронт полимеризации F расположен между двумя проницаемыми круглыми концентрическими границами C_- и C_+ с радиусами R_- и R_+ соответственно (см. фиг. 1). Собственную толщину фронта будем считать малой в сравнении с расстоянием между границами C_- и C_+ , так что его можно рассматривать как поверхность разрыва конверсии и температуры. Стационарное состояние фронта определяется равенством проекции локальной скорости потока на нормаль к нему и собственной нормальной скорости его распространения относительно среды U . Фронт при этом имеет форму окружности, концентрической с C_- и C_+ , с радиусом $R^0 = q/2\pi U$, где q — объемный расход реакционной среды, отнесенный к единице длины в направлении, перпендикулярном плоскости течения [5].

Основным реологическим эффектом полимеризации является резкое увеличение эффективной вязкости среды, усадка и появление неньютонских свойств не приводят к качественным изменениям картины течения [8]. В этой связи при расчете течений полимеризующихся сред за-



Фиг. 1



Фиг. 2

частую используется модель несжимаемой ньютоновской жидкости с вязкостью, зависящей от конверсии и температуры [3, 9]. Используя эту модель в рассматриваемой задаче, получим, что плотность среды ρ на фронте не меняется, а вязкость испытывает разрыв от μ_- до μ_+ .

В силу резкого увеличения вязкости среды на фронте влияние инерционных эффектов в областях, заполненных исходной смесью и конечным продуктом, существенно различно. Так, при внутренней подаче среды (от C_- к C_+ , фронт распространяется навстречу потоку) в области Ω_+ , заполненной конечным продуктом (см. фиг. 1), характерное число Рейнольдса $Re_+ = \rho R_+ U / \mu_+$ обычно мало и здесь инерционные эффекты можно не учитывать. В области Ω_- , заполненной исходной смесью, характерное число Рейнольдса $Re_- = \rho R^- U / \mu_-$ при этом может быть сравнимо с единицей. Однако, как будет показано ниже (см. также [5, 6]), в этом случае поведение фронта перестает зависеть от исходной смеси, поэтому в дальнейшем инерционные эффекты положим малыми во всей области течения, что не приведет к ошибке в расчете движения фронта.

В задаче отсутствует характерный «внешний» масштаб времени нестационарности: нестационарность связана с движением фронта и ее характерный временной масштаб определяется величиной R^0/U , соответствующей конвективному масштабу времени. При этом в пренебрежении инерционными эффектами задача становится квазистационарной: гидродинамические поля мгновенно подстраиваются под изменение положения фронта.

В рамках принятых допущений течение до и после фронта описывается уравнениями Стокса и неразрывности. На фронте вследствие несжимаемости среды и «слипания» потоков выполняются условия неразрывности векторов скорости и напряжения, а также условие его движения в виде локального закона Михельсона [4]

$$W = U + V_n \quad (1.1)$$

где W — нормальная скорость фронта относительно неподвижной системы координат, $V_n = \mathbf{V} \mathbf{n}$, \mathbf{V} — вектор скорости потока на фронте, \mathbf{n} — единичный вектор нормали, проведенный в направлении распространения фронта. В случае свободной поверхности или химически инертной границы раздела несмешивающихся сред отсутствует перенос вещества через них и соответственно в правой части (1.1) отсутствует величина U .

Прямое численное решение поставленной задачи затрудняется сложными условиями сращивания векторов скорости и напряжения на фронте, который может принимать различные нерегулярные формы. С другой стороны, практический интерес представляет в первую очередь поведение

самого фронта, а для его определения достаточно найти распределение вектора скорости только на нем самом. С этой целью естественно использовать метод граничных интегральных уравнений, который позволяет свести линейную эллиптическую краевую задачу в некоторой области к одному интегральному уравнению на границе этой области [7].

В силу своей применимости только к линейным задачам указанный метод не получил широкого распространения в гидродинамике. Впервые он был использован для анализа «медленных» течений в [10, 11]. Современное состояние вопроса подробно изложено в [12], особенности численной реализации метода обсуждаются в [13, 14].

Рассмотрим случай внутренней подачи среды. Из уравнений Стокса и неразрывности в области Ω_- следует интегральное представление для вектора скорости на фронте [7, 14]

$$V_-(i) = \int_{(C_+ + F)} [\Gamma(i, j) V_-(j) - B_-(i, j) P_{n_{j-}}(j)] ds_j \quad (1.2)$$

$$B_-(i, j) = (1/2\pi\mu_-) [\delta \ln r_{ij} - \{r_{ij} r_{ij}\} / r_{ij}^2]$$

$$\Gamma(i, j) = (2/\pi) (r_{ij} n_{j-}) \{r_{ij} r_{ij}\} / r_{ij}^4$$

где i — произвольная фиксированная точка фронта, j — «текущая» точка фронта или поверхности C_- , ds_j — элемент длины дуги в окрестности точки j , $P_{n_{j-}} = P n_{j-}$ — вектор напряжения на фронте, P — тензор напряжений, n_{j-} — единичный вектор внешней к области Ω_- нормали в точке j , δ — тензор Кронекера, r_{ij} — вектор, соединяющий точки i и j , $\{ \}$ — диадное произведение двух векторов, индекс минус относится к области Ω_- (см. фиг. 1).

Аналогично, рассматривая область Ω_+ , найдем

$$V_+(i) = \int_{(C_+ + F)} [\Gamma(i, j) V_+(j) - B_+(i, j) P_{n_{j+}}(j)] ds_j \quad (1.3)$$

$$B_+(i, j) = \mu_- B_-(i, j) / \mu_+, \quad P_{n_{j+}} = P n_{j+}$$

где n_{j+} — единичный вектор внешней к области Ω_+ нормали в точке j , индекс плюс относится к области Ω_+ .

Домножая (1.2) и (1.3) на μ_- и μ_+ соответственно и складывая, с учетом равенств $V_- = V_+$, $P_- n = P_+ n$, $n_{j-} = -n$, $n_{j+} = n$, справедливых на фронте, получим

$$V(i) = \frac{\mu_-}{\mu_- + \mu_+} \int_{(C_-)} [\dots]_- ds_j + \frac{\mu_+}{\mu_- + \mu_+} \int_{(C_+)} [\dots]_+ ds_j + \frac{\mu_- - \mu_+}{\mu_- + \mu_+} \int_{(F)} \Gamma(i, j) V(j) ds_j \quad (1.4)$$

где $[\dots]_-$ и $[\dots]_+$ — подынтегральные выражения в (1.2) и (1.3) соответственно (индексы у вектора V опущены в силу условий срачивания).

В дальнейшем ограничимся важным частным случаем, когда радиус R_- границы C_- существенно меньше, а радиус R_+ границы C_+ существенно больше характерного размера фронта. Тогда, переходя в (1.4) к пределу при $R_- \rightarrow 0$, $R_+ \rightarrow \infty$ и одновременно вводя безразмерные переменные, относя радиальную координату к радиусу стационарного фронта R^0 , а век-

тор скорости — к скорости U , получим

$$\mathbf{V}(i) - \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \int_{(F)} \Gamma(i, j) \mathbf{V}(j) ds_j = \frac{2\alpha}{\alpha+1} \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^2} \quad (1.5)$$

где $\alpha = \mu_-/\mu_+$, \mathbf{r}_i — радиус-вектор точки i . Предельный переход соответствует случаю, когда $R_+ \gg R^0$, но одновременно $R_+ \ll \mu_+/U_0$ ($Re_+ \ll 1$), т. е. сохраняется условие квазистационарности. Фактически этот предел представляет собой промежуточную асимптотику [4], отвечающую указанным неравенствам для R_+ . В случае обратной подачи среды (от C_+ к C_- , фронт по-прежнему распространяется навстречу потоку) в правой части (1.5) появляется знак минус, а величина α заменяется на $1/\alpha$.

Соотношение (1.5) можно рассматривать как линейное неоднородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода для вектора скорости на фронте. Свободный член уравнения описывает поле гидродинамического источника, интегральный — искажение этого поля за счет скачка вязкости (при $\mu_- = \mu_+$ имеем $\alpha = 1$ и интегральный член исчезает). Существенно, что ядро уравнения (1.5) регулярно: при $r_{ij} \rightarrow 0$ («текущая» точка пересекает фиксированную) выполняется $\mathbf{n}_j r_{ij} = -r_{ij}^2/R_i + o(r_{ij}^2)$, где R_i — радиус кривизны фронта в точке i , откуда имеем $\Gamma(i, i) = -(2/\pi) \{\boldsymbol{\tau}_i\}/R_i$, где $\boldsymbol{\tau}_i$ — единичный вектор касательной к фронту в точке i . В связи с этим к уравнению (1.5) применима альтернатива Фредгольма.

Собственными числами уравнения (1.5) являются $\xi_1 = -1$ и $\xi_2 = 1$ [14]. Первое собственное число простое, известна собственная функция сопряженного уравнения — единичный вектор внешней к области Ω_- нормали \mathbf{n}_j . Второе собственное число кратное, ему соответствуют три собственные функции, отвечающие квазитвердым движениям среды (поступательным движениям с единичной скоростью по двум взаимно перпендикулярным направлениям и вращательному движению с единичной угловой скоростью вокруг центра). При $0 < \alpha < 1$ множители $\xi = (\alpha-1)/(\alpha+1)$ или $\xi = (1/\alpha-1)/(1/\alpha+1)$ перед интегральным членом не попадают на спектр и уравнение (1.5) однозначно разрешимо. Однако при $\alpha \rightarrow 0$ имеем $\xi \rightarrow \xi_1 = -1$, $\xi \rightarrow \xi_2 = 1$ при внутренней и внешней подаче среды соответственно, поэтому поведение решения при $\alpha \ll 1$ требует дополнительного анализа.

Для нахождения предельного решения при $\alpha \rightarrow 0$ перепишем (1.5) в символическом виде (внутренняя подача среды)

$$\mathbf{V} - (\alpha-1)/(\alpha+1) \mathbf{IV} = 2\alpha/(\alpha+1) \Phi \quad (1.6)$$

где \mathbf{I} — линейный интегральный оператор, Φ — поле источника. Полагая $\mathbf{V} = \mathbf{V}^0 + \alpha \mathbf{V}^1 + \dots$ и учитывая, что $(\alpha-1)/(\alpha+1) = -1 + 2\alpha + \dots$, $2\alpha/(\alpha+1) = 2\alpha + \dots$, сгруппируем в (1.6) члены по степеням α

$$\mathbf{V}^0 + \mathbf{IV}^0 = 0, \quad \mathbf{V}^1 + \mathbf{IV}^1 = 2(\Phi - \mathbf{V}^0) \quad (1.7)$$

Первое из уравнений (1.7) показывает, что нулевое приближение принадлежит множеству решений однородного уравнения, соответствующего (1.5), в спектральной точке $\xi_1 = -1$, но не позволяет его найти. Найти его можно из второго уравнения (1.7) [15], которое отвечает той же спектральной точке, но неоднородно. Согласно альтернативе Фредгольма, для его разрешимости необходимо и достаточно, чтобы свободный член был ортогонален собственной функции сопряженного уравнения, откуда имеем

$$\int_{(F)} \mathbf{V}^0 \cdot \mathbf{n} ds_i = \int_{(F)} \Phi \cdot \mathbf{u} ds_i = 2\pi \quad (1.8)$$

Таким образом, предельное решение уравнения (1.5) при $\alpha \rightarrow 0$ выделяется из множества решений соответствующего однородного уравнения

нормировкой вектора скорости на 2π , что просто отвечает сохранению расхода. Полученный результат не случаен, так как при выводе уравнения (1.5) использовалось уравнение неразрывности. Сохранение расхода в уравнении (1.5) можно показать и непосредственно: домножая (1.5) скалярно на \mathbf{n}_i , интегрируя по фронту и меняя порядок интегрирования в двойном интеграле, получим условие (1.8).

Аналогичный анализ в случае внешней подачи среды показывает, что предельное решение при $\alpha \rightarrow 0$ имеет вид

$$\mathbf{V}^0 = \mathbf{V}_0 + \sum_{k=1}^3 C_k \mathbf{V}_k \quad (1.9)$$

где \mathbf{V}_0 — произвольное частное решение неоднородного уравнения (1.5) в спектральной точке $\xi_2 = 1$ (разрешимость этого уравнения может быть показана с помощью альтернативы Фредгольма подобно тому, как было показано сохранение расхода в (1.5)), \mathbf{V}_k — три собственные функции этого уравнения. Коэффициенты C_k находятся из системы

$$\sum_{k=1}^3 C_k \left(\int_{(F)} \mathbf{V}_k \mathbf{V}_l^* ds_i \right) = - \int_{(F)} \mathbf{V}_0 \mathbf{V}_l^* ds_i \quad (l=1, 2, 3) \quad (1.10)$$

где \mathbf{V}_l^* — три собственные функции соответствующего сопряженного уравнения.

2. Численное решение задачи проводится в прямоугольной декартовой системе координат, начало которой совпадает с источником. На каждом временном слое решается уравнение (1.5), в результате чего находится «мгновенное» распределение вектора скорости потока на фронте. После этого на основе соотношения (1.1) определяется положение фронта на новом временном слое.

Для численного решения (1.5) форма фронта аппроксимируется многоугольной фигурой, а распределение вектора скорости на нем — кусочно-постоянной функцией. При этом интегральное уравнение сводится к системе алгебраических линейных неоднородных уравнений относительно проекций векторов скорости на сторонах многоугольной фигуры на декартовы оси. Коэффициенты этой системы имеют вид определенных интегралов, взятых по сторонам этой фигуры. Недиagonalные интегральные коэффициенты аппроксимируются формулами Симпсона, диагональные, отвечающие переходу «текущей» точки фронта через фиксированную, могут быть вычислены по предельному значению ядра $\Gamma(i, i)$, полученному ранее. Однако удобнее исключить их с помощью стандартной процедуры регуляризации, основанной на том, что постоянный вектор является решением однородного интегрального уравнения, соответствующего (1.5), в спектральной точке $\xi_2 = 1$ [7].

Система алгебраических уравнений решалась методом последовательных исключений Гаусса [14]. При $\alpha \ll 1$ определитель системы, согласно соотношению $\xi \rightarrow \xi_{1,2} = \pm 1$ при $\alpha \rightarrow 0$, становится близок к нулю и метод Гаусса дает существенную ошибку.

Расчеты показали, что в случае внутренней подачи среды ошибка метода Гаусса возникает раньше (т. е. при больших значениях α), чем решение выходит на предельное значение, отвечающее $\alpha \rightarrow 0$, и проявляется только в отсутствии требуемой нормировки вектора скорости. Это обстоятельство, по-видимому, связано с тем, что собственное число $\xi_1 = -1$ — простое и ошибка метода Гаусса появляется лишь на последнем шаге исключения неизвестных, а затем при их восстановлении «пропорционально» переносится во все искомые величины. Надлежащая нормировка позволила полностью исключить эту ошибку.

В случае обратной подачи среды ошибка метода Гаусса возникала существенно позже, чем решение выходило на предельное значение, поэтому принимать дополнительные меры в данном случае не потребовалось.

Положение фронта на новом временном слое находится по явной разностной схеме.

Рассмотрим результаты расчетов. На фиг. 2 приведено распределение вектора скорости на эллиптическом фронте вида $(x/1,2)^2 + (y/0,8)^2 = 1$ при различных значениях α (количество расчетных точек $N=30$, стрелки 1 и 2 изображают векторы скорости при внутренней подаче среды и значени-

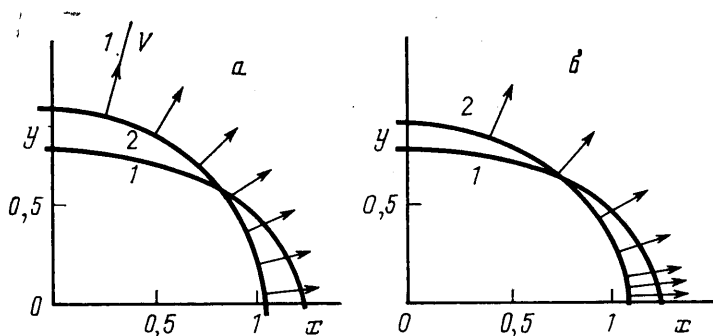
ях параметра $\alpha=0,99$ и $0,01$ соответственно, стрелки 3 и 4 — при внешней подаче и тех же значениях α). При $\alpha=0,99$ поле скоростей близко к полю гидродинамического источника или стока в случаях внутренней или внешней подачи среды соответственно. По мере уменьшения параметра α в случае внутренней подачи вектор скорости разворачивается в направлении нормали и одновременно убывает по величине, профиль скоростей при этом несколько выравнивается. В случае внешней подачи он, наоборот, разворачивается в сторону касательной и увеличивается, профиль скоростей в результате становится менее однородным. Данная тенденция сохраняется и при более сложной форме фронта. Заметим, что уменьшение или увеличение вектора скорости при его развороте в направлении нормали или касательной соответственно связано с сохранением расхода. При $\alpha\sim 0,01$ решение практически выходит на предельное значение, отвечающее $\alpha\rightarrow 0$, и при дальнейшем уменьшении α вектор скорости не меняется. При $\alpha\sim 10^{-5}$ в случае внешней подачи среды возникает искажение вектора скорости за счет ошибок метода Гаусса (см. разд. 1).

Динамика фронта первоначально такой же формы при внутренней подаче среды и различных значениях α приведена на фиг. 3 (фиг. 3, *a* отвечает $\alpha=0,01$, 3, *b* — $\alpha=0,99$, количество расчетных точек $N=30$, линия 1 изображает начальную форму фронта, линия 2 — форму фронта в моменты времени $t=2$ и $0,5$ для фиг. 3, *a* и *b* соответственно, величина шага по времени $\Delta t=0,05$). С течением времени фронт приближается к стационарной форме единичной окружности. Профиль скоростей на фронте при этом выравнивается: вектор скорости разворачивается в направлении нормали и по величине приближается к единице. Таким образом, происходит стабилизация фронта в стационарном состоянии, причем ход этого процесса слабо зависит от величины α (при уменьшении α скорость стабилизации незначительно уменьшается вследствие выравнивания профиля скоростей). В моменты времени более поздние, чем изображено на фиг. 3, фронт, все более замедляясь, приближается к стационарному состоянию.

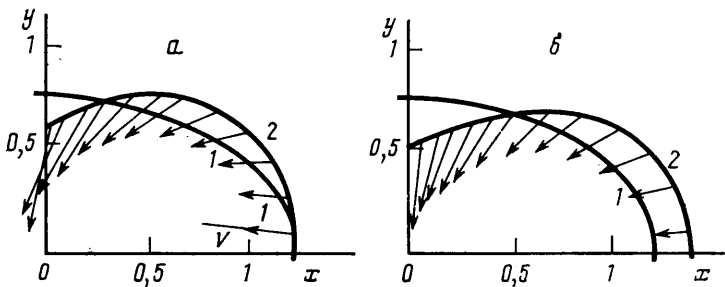
Поведение фронта в случае внешней подачи среды, приведенное на фиг. 4, существенно иное (фиг. 4, *a* и *b* соответствуют значениям параметра $\alpha=0,01$ и $0,99$, количество расчетных точек $N=48$, линия 1 изображает начальную форму фронта, линия 2 — форму фронта в моменты времени $t=0,4$ и $0,7$ для фиг. 4, *a* и *b* соответственно, величина шага по времени $\Delta t=0,05$). На большей части своей длины фронт «раздвигается» (удаляется от источника), а в окрестности минимума, наоборот, приближается к стоку. При этом вектор скорости потока в той части фронта, которая удаляется от стока, уменьшается по величине, а в окрестности минимума, наоборот, резко возрастает. Таким образом, формируется радиальная струя маловязкой исходной смеси, направленная к стоку, — возникает «пробой» [3] в радиальном направлении. Ход этого процесса также слабо зависит от величины параметра α . В моменты времени более поздние, чем изображены на фиг. 4, при расчете на фронте возникает «петля» и вычисления прекращаются. Физически это соответствует образованию «острия» на вогнутом участке фронта [4] — предложенный численный метод позволяет легко фиксировать это явление.

Аналогичные расчеты были проделаны для различных более сложных начальных конфигураций фронта, все они подтвердили отмеченные выше тенденции в поведении фронта.

В заключение отметим существенное отличие рассмотренных радиальных течений от аналогичных течений в каналах [16]. При течении в каналах условие малости нормальной скорости фронта в сравнении со среднерасходной скоростью потока, которое фактически соответствует приближению узкого канала, приводит к постоянству давления по любому поперечному сечению канала. При этом маловязкая исходная смесь,



Фиг. 3



Фиг. 4

располагающаяся в окрестности оси канала, и высоковязкий продукт, налипающий на его стенки, движутся под влиянием одного и того же продольного градиента давлений. Отсюда следует, что отношение градиентов продольной составляющей скорости в поперечном направлении в продукте и в исходной смеси имеет порядок $1/\alpha$. С математической точки зрения это отвечает сингулярному возмущению, которое малый параметр α вносит в решение и которое описывает формирование осевой струи исходной смеси («пробой»).

В радиальном потоке малый параметр α вносит в решение регулярное возмущение (см. разд. 1), поэтому градиенты скорости в исходной смеси и в продукте имеют один порядок, а градиенты давлений в соответствии с уравнениями Стокса относятся как α . При этом из условия неразрывности вектора напряжения на фронте в безразмерных переменных следует, что вектор напряжения на фронте имеет порядок α . В нулевом приближении по α замкнутая постановка задачи дается уравнениями Стокса и неразрывности в области после фронта с условием равенства нулю вектора напряжения и законом Михельсона на фронте (эквивалентная интегральная постановка отвечает рассмотренным в разд. 1 предельным случаям при $\alpha \rightarrow 0$). Движение фронта и поле скоростей на нем, найденные в результате решения этой задачи, не содержат характеристик движения среды до фронта и, таким образом, не зависят от нее (см. разд. 1). При этом условие неразрывности вектора скорости на фронте следует рассматривать как условие первого рода для уравнений Навье — Стокса в области до фронта, определяющее движение исходной смеси.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ben-Jacob E., Godbey R., Goldenfeld N. D. et al. Experimental demonstration of the role of anisotropy in interfacial pattern formation // Phys. Rev. Lett. 1985. V. 55. № 12. P. 1315–1318.

2. *Чечило Н. М., Хейливицкий Р. Я., Епиколопан Н. С.* О явлении распространения реакции полимеризации // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204. № 5. С. 1180–1181.
3. *Малкин А. Я., Жирков П. В.* Течение полимеризующейся жидкости // Теорет. основы хим. технологии. 1986. Т. 20. № 6. С. 784–797.
4. *Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М.* Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980. 478 с.
5. *Жижин Г. В., Сегаль А. С.* Гидродинамическая устойчивость цилиндрического фронта реакции, сопровождающейся сильным увеличением вязкости // ПМТФ. 1988. № 2. С. 62–70.
6. *Жижин Г. В., Сегаль А. С.* Гидродинамическая устойчивость сферического фронта реакции, сопровождающейся сильным увеличением вязкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 3. С. 46–53.
7. Метод граничных интегральных уравнений. Ред. Круз Т., Риццо Ф. М.: Мир, 1987. 210 с.
8. *Agarwall S. S., Klinstreuer C.* Analysis of styrene polymerization in a continuous flow tubular reactor // Chem. Eng. Sci. 1986. V. 41. № 12. P. 3101–3110.
9. *Malkin A. Ya., Sherysheva L. I. et al.* The flow of a polymerizing liquid in a cylindrical pipe // Polymer. Eng. Sci. 1983. V. 23. № 15. P. 804–809.
10. *Oseen G. W.* Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik. Leipzig: Akad. Verlagsgesellschaft, 1927. 337 s.
11. *Odquist F. K. G.* Über die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten // Math. Zeit. 1930. B. 32. № 3. S. 329–375.
12. *Белоносов С. М., Черноус К. А.* Краевые задачи для уравнений Навье – Стокса. М.: Наука, 1985. 311 с.
13. *Youngren G. K., Acrivos A.* Stokes flow past a particle of arbitrary shape. A numerical method of solutions // Fluid Mech. 1975. V. 69. № 2. P. 377–403.
14. *Паррон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
15. *Найфэ А. Х.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
16. *Жижин Г. В., Сегаль А. С.* Стационарные течения в каналах при автоволновом распространении химической реакции с резким изменением вязкости // ПМТФ. 1986. № 1. С. 61–68.

Ленинград

Поступила в редакцию
20.IX.1990