

УДК 532.516.5.013.4

© 1991 г.

М. А. ГОЛЬДШТИК, Н. М. ЕРШ

**УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОМОДЕЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ В ТРУБЕ
ПРИ ОТСОСЕ**

Все известные точные решения уравнений Навье – Стокса автомодельные. Они чрезвычайно важны для понимания основ гидродинамики и в качестве тестовых примеров. Каждый раз, получая точное решение, приходится сталкиваться с проблемами их интерпретации и устойчивости. Есть примеры автомодельных течений, абсолютно устойчивых в малом (например, течение в круглой трубе) и абсолютно неустойчивых. Таковым является одно из решений, отвечающее равномерному вдуву в пористую круглую трубу и обладающее присоединенной циркуляционной зоной [1]. При всех числах Рейнольдса вдува такое автомодельное движение существует [2], но неустойчиво даже по отношению к возмущениям того же автомодельного класса. Однако наиболее интригующими свойствами обладают автомодельные решения при отсосе, когда наряду с областями неединственности имеется диапазон несуществования стационарных автомодельных решений.

Исследована устойчивость таких автомодельных течений при различных граничных условиях на стенке. Обнаружен колебательный режим в области несуществования автомодельных решений. Изучена проблема устойчивости к возмущениям общего вида. Рассчитана зависимость критических значений осевого числа Рейнольдса и числа Струхала при различных интенсивностях отсоса.

1. Основное течение. Пусть радиус трубы равен a , а скорость отсоса — V_a . Исследуемое автомодельное движение разыскивается в цилиндрических координатах в виде [2]

$$v_r = \frac{v}{a} V_r(r), \quad v_z = \frac{v}{a} zW(r), \quad v_\varphi = \frac{v}{a} V_\varphi(r), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{v^2}{a^2} \lambda z \quad (1.1)$$

где λ — произвольная постоянная; за масштаб длины принят размер a ; V_r , W , V_φ , λ — безразмерны. Представление (1.1) соответствует течению в трубе с равномерным по z вдувом или отсосом и глухим торцом $z=0$, на котором, однако, не ставятся условия прилипания, так что он может считаться плоскостью симметрии при двухстороннем течении. Подстановка (1.1) в уравнении Навье – Стокса приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} V_r V_r' - \frac{V_\varphi^2}{r} &= -\frac{p'}{\rho} + \left[\frac{(rV_r)'}{r} \right]' \\ \frac{V_r}{r} (rV_\varphi)' &= \left[\frac{(rV_\varphi)'}{r} \right]' \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$V_r W' + W^2 = \lambda + \frac{(rW')'}{r}, \quad (rV_r)' + rW = 0$$

где штрихом обозначено дифференцирование по r . Система (1.2) вырождена, так как два последних уравнения отщепились от двух первых, служащих для определения P и V_φ после нахождения V_r и W . Постоянная λ может быть исключена дифференцированием, тогда для определения V_r и W получается система четвертого порядка, для которой на оси $r=0$ ста-

вятся условия аналитичности $V_r(0)=W'(0)=0$. Условия на стенке при $r=1$ могут быть разными. В [1] рассмотрена лишь основная задача с условиями на стенке: $W(1)=0$ и $V_r(1)=\text{Re}$, где $\text{Re}=aV_a/\nu$ — число Рейнольдса; $\text{Re}>0$ при отсосе.

Решение (1.2) строится методом пристрелки путем варьирования параметров λ и $\gamma=W(0)/\text{Re}$. Как показано в [2, 3], зависимость $\gamma(\text{Re})$ носит сложный характер и состоит из семи ветвей, приведенных на фиг. 1. Около каждой из них показана схема течения в виде зависимости $W(r)$. При каждом Re число решений четно, причем в интервале отсосов $2,3<\text{Re}<9,1$ автомодельных решений не существует. При $\text{Re}=2,3$ трение на стенке обращается в ноль и возникает отрыв, но ничего подобного не происходит при рождении пары при $\text{Re}=9,1$.

Картина режимов сильно зависит от условий на стенке. В принятой постановке поток вдувается или отсасывается через стенки над прямым углом. Но физически это не обязательно так. В [4] используется более общее граничное условие на стенке $v_z=\Lambda(\partial v_z/\partial r)$ или $W(1)=\Lambda W'(1)$. При $\Lambda=0$ получается условие прилипания $W(1)=0$, при $\Lambda=\infty$ — условие скольжения $W'(1)=0$. Картина режимов для последнего случая представлена на фиг. 2. Четность числа решений не меняется, но существование имеет место при всех числах Рейнольдса. Горизонтальная прямая $\gamma=-2$ соответствует однородному «тривиальному» течению $W=\text{const}=-2\text{Re}$. Условие $W'(1)=0$ актуально для турбулентного течения с постоянной турбулентной вязкостью [5], которая не может отвечать за прилипание на стенке. Еще более сложная картина режимов соответствует случаю $\Lambda=1$ (фиг. 3). Стоит отметить, что полюсам функции $\gamma(\text{Re})$ отвечают течения при значении $\text{Re}=0$ с конечным $W(0)$.

2. Автомодельная устойчивость. Вопросы устойчивости рассмотрены для случая вдува и $\Lambda=0$ в [1], где показано, что ветвь 1 устойчива, а ветвь 2 неустойчива в смысле автомодельной эволюции. Последнее означает, что представление (1.1) сохраняется, а к уравнениям (1.2) слева добавляются нестационарные члены. При этом автономность двух последних уравнений сохраняется (малыми буквами обозначены величины, зависящие от времени t)

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + v_r \frac{\partial w}{\partial r} + w^2 = \lambda + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} + w = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Для анализа устойчивости к малым возмущениям достаточно линеаризовать (2.1), положив

$$w = W + w_1 e^{kt}, \quad v_r = V_r + v_{r1} e^{kt}, \quad \lambda = \lambda_0 + \lambda_1 e^{kt}$$

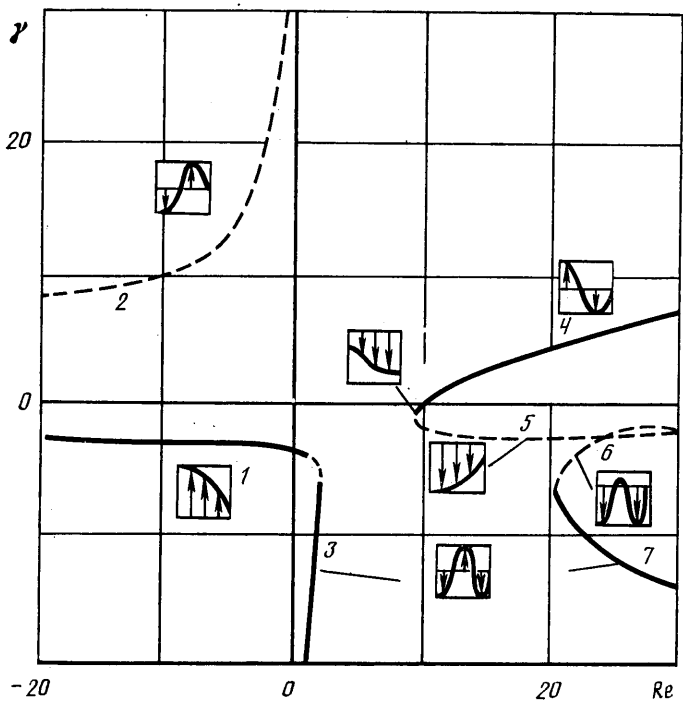
где V_r и W — решения стационарных уравнений (1.2), v_{r1} и w_1 — малые возмущения. Тогда, опуская индекс 1, получаем

$$\begin{aligned} (k+2W)w + V_r w' + W v_r = \lambda + w'' + r^{-1} w' \\ (r v_r)' + r w = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

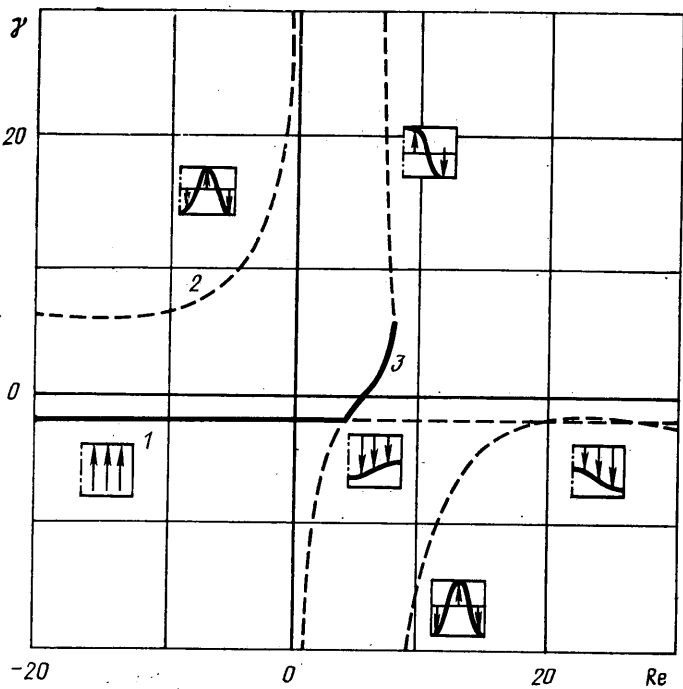
В классической постановке для возмущений ставятся следующие краевые условия:

$$v_r(0) = w'(0) = 0, \quad v_r(1) = 0, \quad w(1) = \Lambda w'(1) \quad (2.3)$$

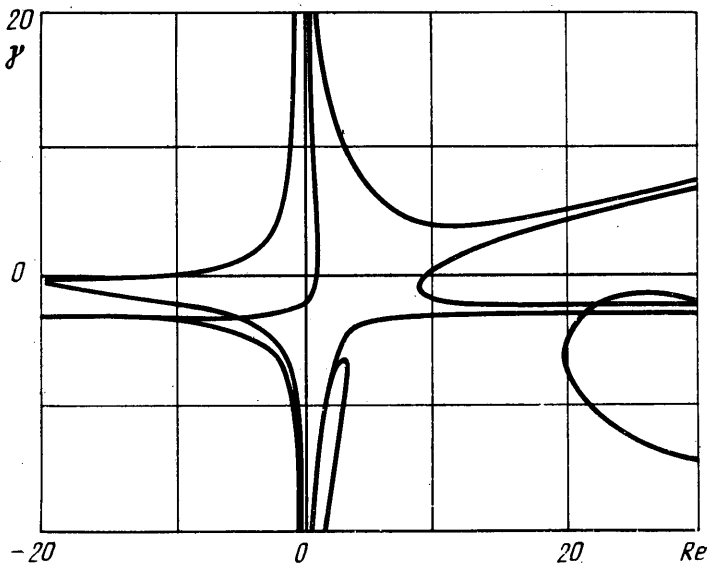
Для решения системы уравнений (2.2) удобно поставить нормировочное условие $w(0)=1$. Тогда можно решать задачу Коши, а последние два условия (2.3) выполнять за счет подбора параметров λ и k , например



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

осуществляя один шаг методом секущих. Результаты расчетов линейной устойчивости различных ветвей стационарных решений отражена на фиг. 1, 2, где штриховые линии относятся к неустойчивым режимам, а сплошные — к устойчивым. В точках потери существования (или рождения) решений значение $k=0$ и при рождении пары решений одна из ветвей устойчива, а другая нет, что соответствует общей теории [6]. Обращает на себя внимание также потеря устойчивости однородного режима отсоса со скольжением на стенке (ветвь 1, фиг. 2) при $Re > 4$. В этом случае устойчивостью наследуется однонаправленным, но неоднородным режимом, отвечающим ветви 3. Возникает вопрос: что происходит с решением, когда оно теряет устойчивость, все еще оставаясь автомодельным? Такая постановка относится к нелинейной системе (2.1). Для численного решения задачи об автомодельной эволюции удобно в (2.1) перейти к новым переменным

$$u'' = -\frac{1}{2}\omega \quad (2.4)$$

$$\dot{\omega} = 4x\omega'' + 8\omega' - 2u\omega' + 2u'\omega$$

$$x=r^2, \quad u=rv, \quad \omega=dw/dx=w'$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по t , а штрихом — по x . При этом краевые условия в случае $\Lambda=0$ имеют вид

$$u(0)=0, \quad u(1)=Re, \quad u'(1)=0, \quad \dot{\omega}(0)=4\omega'(0) \quad (2.5)$$

где четвертое условие выражает требование аналитичности при $x=0$.

Задача (2.4)–(2.5) может быть решена по явной схеме: задается функция $\omega(x)$, из первого уравнения (2.4) находится функция $u(x)$, удовлетворяющая первым двум условиям (2.5). Условие $u'(1)=0$ используется для определения $\omega(1)=\omega_N$ при помощи разложения $u_{N-1}=u_N - \frac{1}{2}h^2 u_N''$, откуда с учетом (2.4) и (2.5) получается: $\omega_N = 4(Re - u_{N-1})/h^2$. После этого вычисляется правая часть (2.4) во всех внутренних точках при использовании центральных разностей для вычисления производных. Величина $\omega'(0)$, входящая в последнее соотношение (2.6), вычисляется при помощи односторонней разностной формулы. В качестве начального условия естественно задать функцию $\omega_0(x)$

$$\omega_n(x) = W'(x)(1+\varepsilon)$$

где ε — числовой параметр. Его знак определяет «направление» начального возмущения.

Проведенные расчеты подтвердили результаты линейного анализа. Вместе с тем если в качестве исходного выбиралось неустойчивое решение, то характер эволюции зависел от знака ε . В одном случае решение эволюционировало к устойчивому режиму, в другом — уходило на бесконечность. При эволюции от устойчивого режима любое возмущение в направлении от неустойчивой ветви затухало. Возмущение в другом направлении обнаруживало порог, превышение которого приводило либо к уходу в бесконечность, либо к другому устойчивому режиму. Например, для значения $Re=10$ устойчивый режим, отвечающий ветви 4, имеет порог $\varepsilon=0,1$.

Попытки автомодельной эволюции в интервале несуществования стационарных автомодельных решений $2,3 < Re < 9,1$ каждый раз приводили к неограниченному росту. Это связано с тем, что на открытом конце трубы $z=\infty$ не поставлено никаких условий, кроме условия автомодельности, которое является слишком слабым. Тем самым приток энергии со стороны открытого конца ничем не ограничен. При отсосе граничные условия ставятся на участке вытекания, что и порождает все неприятности при больших числах Рейнольдса. Ничего подобного не происходит при задании условий на участках втекания. С аналогичными явлениями сталкиваемся в теории конических течений вязкой жидкости [7]. С этой точки зрения существование устойчивых многоячейстых режимов при $Re > 9,1$ представляется удивительным, тем более что одноподобные движения, отвечающие ветви 5, оказываются неустойчивыми!

Согласно опытным данным [8], уже при незначительных отсосах наблюдаются колебательные режимы. В связи с этим возникает вопрос, нельзя ли так сформулировать задачу, чтобы в интервале $2,3 < Re < 9,1$ был возможен колебательный автомодельный режим. Это можно сделать, если считать заданной не скорость отсоса V_a , а расходуемую мощность

$$N = \lambda \int_0^1 r w \, dr = -\lambda \operatorname{Re}$$

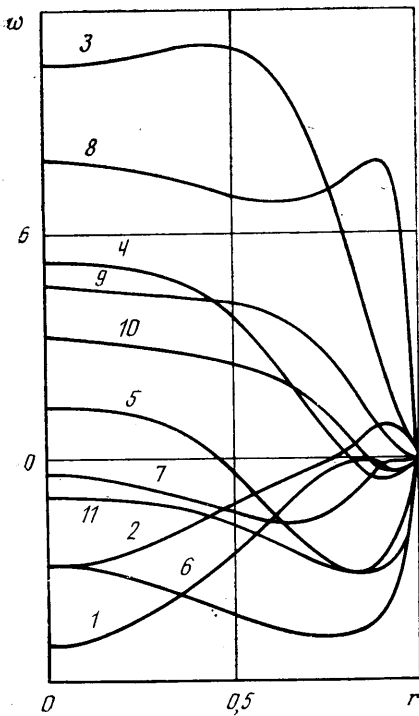
Последнее равенство следует из второго уравнения (2.1) и условия $v_r(1) = \operatorname{Re}$. То, что величина N играет роль мощности, следует из уравнения энергии, которое получается после умножения (2.1) на $r w$ и интегрирования по r

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{r w^2}{2} \, dr = N - \frac{3}{2} \int_0^1 r w^3 \, dr - \int_0^1 r w'^2 \, dr$$

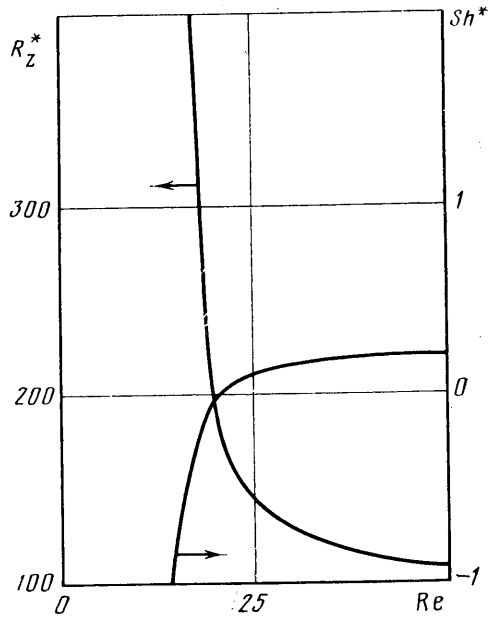
Здесь первое слагаемое справа соответствует мощности сил давления, последнее — мощности диссипации. В случае достаточно сильного отсоса $\lambda > 0$, $Re > 0$ и $N < 0$, что и дает надежду на регуляризацию режима. Правда, второе слагаемое, не будучи знакоопределенным, может породить неограниченный рост энергии при $w < 0$, но что происходит в действительности, определяется расчетом.

В данной постановке решение удобно искать непосредственно в терминах уравнений (2.1), не прибегая к (2.4).

Алгоритм решения состоит в следующем. Задается начальное поле $w(r)$. Интегрирование уравнения неразрывности от оси позволяет вычислить $Re = v_r(1)$. Параметр λ определяется соотношением $\lambda = -N/Re$. После этого осуществляется вычисление $w(r)$ на новом временном слое.



Фиг. 4



Фиг. 5

Проведенные расчеты показали, что в интервале $2,3 < Re < 9,1$ при фиксированном N существуют колебательные режимы. Пример показан на фиг. 4, где изображены этапы эволюции осевой скорости $w(r)$ в последовательности, соответствующей цифрам, для $N = -315,44$.

3. Устойчивость в общем случае. Согласно проведенному анализу, течение со скольжением ($\lambda = \infty$) устойчиво при ддуве и теряет устойчивость при $Re = 7,8$. В основном варианте, когда $\Lambda = 0$, при рождении ветвей 4 и 7 автомодельная устойчивость обретается вновь и сохраняется для любых отсосов. Возникает вопрос об устойчивости по отношению к возмущениям более общего вида

$$v_r = V_a V_r + \frac{u\theta}{r}, \quad v_\varphi = V_a V_\varphi + \frac{v\theta}{r} \quad (3.1)$$

$$v_z = V_0 V_z + w\theta, \quad p = P + q\theta$$

$$\theta = e^{i(\alpha z + m\varphi) + kt}$$

$$V_0 = V_a W(0)z, \quad V_0 V_z = V_a W(r)z$$

Амплитудные уравнения для функций u, v, w, p приведены в [1]. Как показали расчеты, неустойчивость имеет место уже в частном случае $V_\varphi = 0, m = 0$, т. е. для осесимметричного режима без вращения. В этой ситуации система амплитудных уравнений упрощается и приобретает вид

$$\begin{aligned}
 (i\alpha R_z V_z + k)u + \text{Re} \left[\left(V_r' - \frac{V_r}{r} \right) u + V_r u' \right] &= -rq' + u'' - \frac{u'}{r} - \alpha^2 u \\
 (i\alpha R_z V_z + k)w + \text{Re} (V_r w' + Ww) + R_z V_z' \frac{u}{r} &= -i\alpha q + w'' + \frac{w'}{r} + \alpha^2 w \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

$$u' + i\alpha r w = 0, \quad \text{Re} = \frac{aV_a}{v}, \quad R_2 = \frac{aV_0}{v}$$

Здесь R_2 — осевое число Рейнольдса, Re — как и выше, радиальное число Рейнольдса. В качестве граничных условий для возмущений вектора скорости на оси ставятся условия аналитичности, а на стенке — прилипания. По сравнению с (1.1) в (3.1) и соответственно в (3.2) изменена нормировка, что связано с необходимостью введения двух чисел Рейнольдса. Система (3.2) есть результат «замораживания» переменной z . Такой подход дает неплохие результаты при достаточно больших значениях волнового числа α [1, 9]. Координата z «невяно» входит в $R_2 = \text{Re} W(0)z$. Значит, величина R_2 служит безразмерным расстоянием от торца трубы и в случае потери устойчивости характеризует то место, где это происходит. Особенностью системы (3.2) является то, что она не переходит в (2.2) при $\alpha \rightarrow 0$, даже если ввести переменную $i\alpha w$.

Возмущения (3.1) принадлежат к другому классу. В [1] они названы классическими в отличие от входящих в (2.2), которые являются автомодельными. Расчеты показывают, что более «опасны» классические возмущения в том смысле, что они имеют меньшее критическое число Рейнольдса R_z^* . Использование возмущений (3.1) наиболее оправданно в случаях, когда течение устойчиво в автомодельном смысле. Так, в точках бифуркации стационарных режимов имеет место нейтральная устойчивость в автомодельном смысле, однако для возмущений вида (3.1) это, вообще говоря, не так.

Первый вопрос, возникающий при анализе (3.2), касается наименьшего значения Re , при котором неустойчивость вообще имеет место. Для ответа нужно положить $R_z = \infty$, а $\alpha = 0$, но так, чтобы произведение $\alpha R_z = R_{z1}$ оставалось конечным. После введения переменной $w_1 = \alpha w$ получается

$$(iR_{z1}V_z + k)u - \text{Re} \left[\left(W + \frac{2V_r}{r} \right) u + V_r u' \right] = -rq' + u'' - \frac{u'}{r} \quad (3.3)$$

$$(iR_{z1}V_z + k)w_1 + \text{Re}(V_r w_1' + W w_1) + R_z V_z' \frac{u}{r} = w_1'' + \frac{w_1'}{r}$$

$$u'/r + i w_1 = 0$$

Как показали расчеты, в диапазоне $0 < \text{Re} < 2,3$ режимы, отвечающие ветви 1 на фиг. 1, абсолютно устойчивы, поскольку оказалось, что для любых R_{z1} $\text{Real}(k) < 0$. В области $\text{Re} > 9,1$ находится значение $R_{z1} = R_{z1}^0$, отвечающее нейтральному режиму. В самой точке бифуркации $\text{Re} = 9,1$, где сливаются ветви 4 и 5, величина R_{z1}^0 бесконечно велика, но с ростом Re сразу же становится конечной и быстро убывает. Таким образом, при $\text{Re} = 9,1$ течение абсолютно устойчиво в малом, а с ростом Re в трубе находится сечение, начиная с которого поток становится неустойчивым. Тем самым можно ставить вопрос о критических режимах при конечных значениях α , отвечающих никаким нейтральным кривым. Критические параметры R_z^* и число Струхали $\text{St}^* = \text{Im}(k)V_0/(2\pi)$ в зависимости от Re представлены на фиг. 5. В отличие от вдува значение с ростом Re монотонно убывает, т. е. с усилением отсоса сечение, где возникает неустойчивость, приближается к глухому торцу. Критическое число Струхали, характеризующее частоту возникающих колебаний, с ростом Re быстро выходит на «классическое» значение $\text{St}^* = 0,2$, характерное для многих наблюдаемых автоколебательных процессов.

4. Заключительное замечание. Из рассмотренного примера следует, что возможны как устойчивые, так и неустойчивые автомодельные режимы. Поэтому всякий раз, когда найдено автомодельное решение, оно долж-

но быть исследовано на устойчивость. Исходя из общих соображений, можно утверждать, что за весьма малым исключением все течения при больших числах Рейнольдса неустойчивы. Однако неустойчивость пространственных автомодельных режимов к автомодельным возмущениям часто обусловлена заданным автомодельным характером поведения возмущений при $z=\infty$. Иногда этих условий оказывается достаточно для единственности и устойчивости хотя бы при малых числах Рейнольдса. Примерами могут служить течения в круглой или плоской трубе, течение в пограничном слое. Эти примеры характеризуются однонаправленностью движения.

В данной работе наряду с [1] построены примеры абсолютно неустойчивых автомодельных решений. В этих примерах либо на боковой поверхности заданы условия вытекания, либо на бесконечности реализуется знакопеременный режим. Однако достойно удивления, что в последнем случае возможны устойчивые в малом режиме (ветви 4 и 7 на фиг. 1). Впрочем, на небольшой части ветви 4, когда $9,1 < Re < 10$, осуществляется однонаправленное течение с отсосом на боковой поверхности и вдувом на бесконечности либо на конечном расстоянии L , где принудительно задается автомодельное поле скорости. Данные результаты весьма затрудняют физическую интерпретацию причин возникновения неустойчивости.

Что касается несуществования автомодельных решений в интервале $2,3 < Re < 9,1$, то, казалось бы, причина в том, что здесь имеет место смена знака градиента давления в некотором сечении $z=z_*$. При $z < z_*$, где скорости невелики, течение в основном вязкое и $\partial P/\partial z > 0$, тогда как в области $z > z_*$ локальное число Рейнольдса R_z становится достаточно большим, давление начинает падать с ростом z в связи с ростом квадрата скорости. В данной ситуации течение не может быть всюду автомодельным. Однако при $Re > 9,1$ снова становится возможен автомодельный режим с $\partial P/\partial z < 0$ при всех z . Это объяснение могло бы быть правильным, если бы не устойчивая часть ветви 1 в диапазоне $1 < Re < 2,3$, где неравенство $\partial P/\partial z < 0$ также достигается при всех z .

Насколько авторам известно, устойчивые течения, отвечающие ветвям 4 и 7, на опыте не наблюдались. Возможно, они обладают малым запасом устойчивости. Тогда для реализации их в опыте необходимо принять меры, чтобы на открытом конце трубы при $z=L$ был по возможности задан автомодельный профиль скорости $v_z(r)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольдштик М. А., Ериш Н. М. Устойчивость течения в трубе со вдувом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 63–71.
2. Гольдштик М. А. Вихревые потоки. Новосибирск: Наука, 1984. 366 с.
3. Terrill R. M., Thomas P. W. On laminar flow through a uniformly porous pipe // Appl. Sci. Res. 1969. V. 21. № 1. P. 37–67.
4. Taylor G. N. Fluid flow in regions bounded by porous surfaces // Proc. Roy. Soc. London, Ser. A. 1956. V. 234. № 1199. P. 456–475.
5. Гольдштик М. А. Вариационная модель турбулентного вращающегося потока // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 3. С. 22–32.
6. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
7. Гольдштик М. А., Шгерн В. Н., Яворский Н. И. Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск: Наука, 1989. 336 с.
8. Квейл, Леви. Ламинарное течение в трубе с оттоком через пористую стенку // Тр. амер. о-ва инж.-мех. Теплопередача. 1975. Т. 97. № 1. С. 66–72.
9. Варанаева В. Н., Ягодкин В. И. Об устойчивости течения в канале с пористыми стенками // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 5. С. 91–95.