

УДК 532.59:517.958

© 1991 г.

И. М. МИНДЛИН

НОВЫЙ МЕТОД В НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ О ВОЛНАХ В ТЯЖЕЛОЙ СЛОИСТОЙ ЖИДКОСТИ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ ВЕРТИКАЛЬНО ДВИЖУЩИМСЯ ТВЕРДЫМ ТЕЛОМ

Решение задач, обозначенных в названии статьи, представляет собой весьма сложную проблему, поскольку необходимо обеспечить выполнение граничных условий на поверхности тела и на заранее неизвестных границах раздела между однородными фракциями идеальной несжимаемой жидкости. Когда граница является свободной (понятие «свободная граница» или «свободная поверхность» употребляется в случае, когда одна из двух фракций, разделяемых границей, представляет собой фиктивную жидкость нулевой плотности), давление на ней постоянно. Это обстоятельство вместе с интегралом Коши – Лагранжа позволяет в нестационарных задачах со свободной границей применить метод граничных интегральных уравнений [1, 2], благодаря чему уменьшается размерность пространства независимых переменных со всеми вытекающими отсюда преимуществами для численного решения.

Когда жидкая граница разделяет тяжелые однородные фракции различной плотности, давление на границе не является постоянным, не существует интеграла Коши – Лагранжа и метод граничных интегральных уравнений (для решения нескольких задач Дирихле – по одной внутри каждой фракции) не избавляет от тяжелой процедуры «стыковки» решений на эволюционирующих границах, которая должна обеспечить непрерывность давления. Метод, предложенный в [3, 4] для тяжелых слоистых жидкостей, пригоден только для стационарных течений, ибо основан на том, что в стационарном случае границы раздела являются линиями тока.

Здесь используется отличный от упомянутых метод редукции обозначенных в заглавии нелинейных задач к равносильным задачам меньшей размерности. Формулируются интегродифференциальные уравнения, которые полностью освобождают от необходимости заниматься проблемой условий на границах раздела жидких фракций. Это существенное преимущество достигается тем, что интегродифференциальные уравнения составляются не относительно потенциала скорости (как, например, в [1, 2]), не относительно вариаций линий тока (как в [3]), а относительно скачка касательной к границе раздела составляющей скорости (точнее, относительно функции, отличающейся от скачка положительным множителем). Эволюционное уравнение для этой функции автоматически обеспечивает непрерывность давления в окрестности границы раздела (в частности, постоянство давления на свободной поверхности).

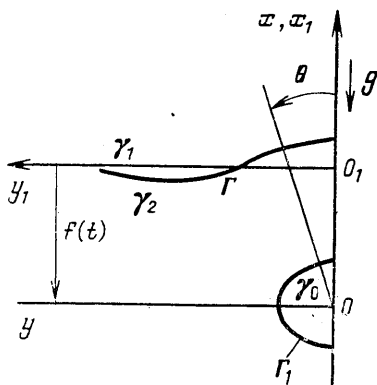
В [5] содержится обзор результатов, которые относятся к случаям, когда тело, погруженное в однородную жидкость со свободной поверхностью, движется по заданному закону и, следовательно, движение жидкости не влияет на движение тела. Относительно аналитических результатов в [5] отмечается, что «даже в линейной постановке решение сопряжено с большими трудностями учета точных граничных условий непротекания на теле, которые иногда обходятся введением дополнительных предположений. Так, например, получила большое распространение замена реального конечного тела системой точечных источников и стоков».

Задачи о взаимодействии вертикально движущегося тела и тяжелой идеальной несжимаемой жидкости (исключая случай неограниченной однородной жидкости) в известных автору работах [6, 7] также исследуются на основе замены тела точечными источниками, что позволяет (при весьма жестких ограничениях на форму тела) линеаризованные уравнения гидродинамики и уравнения движения тела решать независимо. В этой связи уместно подчеркнуть, что указанные ниже аналитические результаты для естественно всплывающего шара получены в ходе совместного решения уравнений гидродинамики и уравнения движения тела.

Решения предложенных интегродифференциальных уравнений определяют поля

скоростей, которые (поля) внутри каждой функции являются решениями уравнений Эйлера для идеальной жидкости.

1. Постановка задачи. Рассматриваются осесимметричные (с осью симметрии x) течения идеальной несжимаемой жидкости. Сила тяжести направлена вниз вдоль оси x (фиг. 1). Жидкая поверхность Γ разделяет две однородные жидкие фракции плотности γ_1 и γ_2 ($\gamma_1 < \gamma_2$). Твердое тело, ограниченное поверхностью Γ_1 , имеет вертикальную ось симметрии и может двигаться только поступательно вдоль вертикали. Рассматриваются течения, при которых граница раздела жидких фракций может быть поверхностью разрыва касательной к ней составляющей скорости — вихревой



Фиг. 1

пеленой. Эта пелена формируется в силу различия плотностей жидких фракций.

Пусть x, y_1 — абсолютные (неподвижные) оси, xy — подвижные оси, связанные с телом, t — время, $f(t)$ — абсолютная координата подвижного полюса O ; r, θ, φ — сферические координаты с полюсом O ; $\varphi = \text{const}$ — уравнение меридиональной полуплоскости, $u(t) = f'(t)$ — скорость тела.

Пусть граница Γ_1 тела описывается уравнением $r = r_*(\theta)$, граница Γ раздела между жидкими фракциями — уравнением $x_1 = W(\theta, t)$. Поверхности Γ и Γ_1 разнесены в пространстве; диффузией через Γ и поверхностным натяжением пренебрегаем.

Соотношениями $r = \rho r_*(\theta)$ и $x_1 = \sigma + W(\theta, t)$ введем в меридиональной полуплоскости две системы криволинейных координат: (ρ, θ) и (σ, θ) так, что граница тела будет описываться уравнением $\rho = 1$, а граница Γ уравнением $\sigma = 0$ (в области $\sigma < 0$ — фракция плотности γ_2). Для любой функции F положим $F(\rho, \theta, t) = F^*(\sigma, \theta, t)$, где $\sigma = \rho r_*(\theta) \cos \theta + f(t) - W(\theta, t)$.

Следующие ниже уравнения записаны в безразмерных переменных. Размерные единицы длины R_0 и времени T_0 выбираются из условий $4\pi R_0^3 = 3V$, $gT_0^2 = R_0$, где V — объем тела, g — ускорение свободного падения. Если тело — шар, то R_0 — радиус шара и $r_* = 1$. Безразмерное ускорение свободного падения равно единице.

Уравнения движения запишем в виде

$$\Psi(\rho, \theta, t) = -\rho r_*(\theta) \sin \theta B(\rho, \theta, t), \quad B = B_1(\rho, \theta, t) + B_2(\rho, \theta, t) \quad (1.1)$$

$$B = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma_1} \frac{A_1(\theta_1, t) r_*^2(\theta_1) \sin^2 \theta_1 \cos \varphi}{\sqrt{R_1}} d\theta_1 d\varphi \quad (1.2)$$

$$R_1 = \rho^2 r_*^2(\theta) + r_*^2(\theta_1) - 2\rho r_*(\theta) r_*(\theta_1) \tau$$

$$\tau = \cos \theta \cos \theta_1 + \sin \theta \sin \theta_1 \cos \varphi, \quad \Gamma_1: \quad 0 \leq \theta_1 \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$B_2 = \frac{1}{4\pi r} \iint \frac{A_2(\theta_1, t) [W(\theta_1, t) - f(t)] \sin^2 \theta_1 \cos \varphi}{\sqrt{R_2}} d\theta_1 d\varphi \quad (1.3)$$

$$R_2 = [W(\theta_1, t) - f(t)]^2 + \rho^2 r_*^2(\theta) \cos^2 \theta_1 - 2\rho r_*(\theta) \cos \theta_1 [W(\theta_1, t) - f(t)] \tau$$

$$\Gamma: \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta_1 < \pi/2 \quad (f(t) \cos \theta_1 < 0)$$

$$\pi/2 < \theta_1 \leq \pi, \quad x_1(0) > 0 \quad (f(t) \cos \theta_1 < 0)$$

$$\begin{aligned} \sin \theta \frac{\partial A_2}{\partial t} = & -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{A_2 \cos^2 \theta}{(W-f)^2} \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial \sigma_+} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial \sigma_-} \right) \right] - \\ & - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{A_2 \sin^2 \theta \cos \theta}{W-f} u \right) - \varepsilon_1 \frac{\partial P^*}{\partial \theta_+} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{\partial P^*}{\partial \theta_+} = & -\frac{\partial W}{\partial \theta} - 2b_1 \frac{\partial \Psi^*}{\partial \sigma_+} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \theta_+^2} + b_2 \frac{\partial \Psi^*}{\partial \theta_+} - \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[b_3 \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial \sigma_+} \right)^2 \right] + b_4 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial \theta_+} \right) + b_5 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial \sigma_+} \right) + \\ & + b_6 \frac{\partial \Psi^*}{\partial \theta_+} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \sigma_+} + b_7 \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial \sigma_+} \right)^2 + b_8 \frac{\partial \Psi^*}{\partial \sigma_+} + \\ & + u(t) \frac{\cos \theta \sin \theta}{W-f} \left[b_4 \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \theta_+^2} + b_5 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial \sigma_+} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$l = \frac{\operatorname{ctg} \theta}{W-f}, \quad l_1 = 1 + l \frac{\partial W}{\partial \theta}, \quad b_1 = -l^3 l_1 \sin^2 \theta$$

$$b_2 = u(t) l^2 (1 + l_1) \sin^2 \theta, \quad b_3 = l^2 \left[1 + l(1 + l_1) \sin^2 \theta \frac{\partial W}{\partial \theta} \right]$$

$$b_4 = l l_1 \operatorname{tg} \theta, \quad b_5 = -\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} - l(1 + l_1) \operatorname{tg} \theta \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

$$b_6 = -2l^3 \operatorname{tg} \theta \left[l_1 (1 + 2 \sin^2 \theta) + 3l^2 \sin^2 \theta \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 \right]$$

$$b_7 = 2l^3 \sin^2 \theta b_4, \quad b_8 = u(t) b_5 l^2 \sin^2 \theta \operatorname{tg} \theta \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\cos^3 \theta}{\sin \theta (W-f)^2} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \theta_+} - u(t) \frac{\sin \theta \cos \theta}{W-f} \frac{\partial W}{\partial \theta} \quad (1.6)$$

$$-\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \theta_+} = u(t) r_*^2(\theta) \cos \theta \quad (1.7)$$

$$F_+ = \lim_{\rho \rightarrow +0} F, \quad F_+^* = \lim_{\sigma \rightarrow +0} F^*, \quad F_-^* = \lim_{\sigma \rightarrow -0} F^*$$

для любых функций $F(\rho, \theta, t)$, $F^*(\sigma, \theta, t)$; $\varepsilon_1 = \gamma_2/\gamma_1 - 1$.

В этих уравнениях Ψ — функция тока, определяет поток жидкости через поверхность, неподвижную относительно абсолютных осей x_1, y_1 ; B — нормальная к меридиональной полуплоскости составляющая векторного потенциала [8]. Соотношения (1.2) и (1.3) определяют составляющую B векторного потенциала как сумму интегралов типа потенциала простого слоя электрических зарядов, распределенных по поверхностям Γ_1 и Γ с

плотностями, пропорциональными $A_1(\theta, t)$ и $A_2(\theta, t)$ соответственно; P — давление. Введением потенциала простого слоя на Γ обеспечивается скачок касательной к поверхности $\sigma=0$ составляющей скорости. Уравнения (1.4), (1.5) предопределяют эволюцию во времени интенсивности A_2 вихрей на вихревой пелене Γ ; они получены в [9] из уравнений движения идеальной несжимаемой жидкости. Здесь в отличие от [9] правая часть в (1.5) выражена через функцию тока. Уравнение (1.6), управляющее эволюцией границы Γ , следует из предположения, что находящаяся на вихревой поверхности жидкая частица может перемещаться в нормальном к поверхности направлении только вместе с поверхностью. Уравнение (1.7) означает, что соприкасающиеся точки тела и жидкости имеют равные нормальные к поверхности составляющие скорости.

Если интенсивность A_1 ограничена, то равенство (1.2) обеспечивает выполнение на бесконечности условий

$$\rho \rightarrow +\infty, \quad B_1 \rightarrow 0, \quad \frac{\partial B_1}{\partial \rho} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial B_1}{\partial \theta} \rightarrow 0$$

Функции A_2 и W должны удовлетворять таким требованиям, чтобы обеспечивались условия

$$\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad B_{2+}^* \rightarrow 0, \quad \frac{\partial B_{2+}^*}{\partial \sigma_+} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial B_{2+}^*}{\partial \sigma_-} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial B_{2+}^*}{\partial \theta_+} \rightarrow 0 \quad (1.8)$$

Эти условия означают, что жидкость на бесконечности покоится.

Равенства (1.1)–(1.7) представляют собой систему интегродифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $A_1(\theta, t)$, $A_2(\theta, t)$, $W(\theta, t)$, $u(t)$. Аргумент θ изменяется в пределах от 0 до π на поверхности Γ_1 , на которой определена функция $A_1(\theta, t)$, и на вдвое меньшем интервале на поверхности Γ ; при этом $f(t)\cos\theta < 0$ на Γ .

Систему (1.1)–(1.7) нужно замкнуть уравнением эволюции скорости $u(t)$ твердого тела. В случае естественно всплывающего тела замыкающим служит уравнение Ньютона

$$m \frac{du}{dt} = -m + G \quad (1.9)$$

$$G = -2\pi \int_0^\pi P_+ r_*^2(\theta) \sin\theta \cos\theta d\theta \quad (1.10)$$

где m — масса тела, G — равнодействующая сил давления на поверхность тела. Сила G определяется интегрированием давления P по поверхности. Интегрируя по частям, заменив производную $\partial P/\partial\theta$ с помощью одного из уравнений Эйлера для идеальной жидкости, использовав условие (1.7) на поверхности тела, получим, в частности, для шара ($r_* = 1$)

$$G = \frac{4}{3} \pi \gamma + \pi \gamma \int_0^\pi \left[-\sin\theta \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \rho_+} \right) + \operatorname{ctg}\theta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \rho_+} \right)^2 + u \sin\theta \cos\theta \left(2 \frac{\partial \Psi}{\partial \rho_+} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho_+^2} \right) \right] d\theta$$

Здесь γ — плотность жидкости, соприкасающейся с шаром. К уравнениям следует присоединить начальные условия

$$t=0, \quad A_1 = A_{1,0}(\theta), \quad A_2 = A_{2,0}(\theta), \quad W = W_0(\theta), \quad u = u_0, \quad f = H \quad (1.11)$$

Уравнения (1.1)–(1.10) сохраняют силу на интервале $t > 0$, пока твердое тело не пересекает границы раздела Γ и пока каждый луч $\theta = \text{const}$ пересекает Γ не более чем в одной точке.

В случае многослойной жидкости уравнения модифицируются: каждая дополнительная граница раздела приводит к появлению двух неизвестных функций, аналогичных $A_2(\theta, t)$ и $W(\theta, t)$; векторный потенциал B получает дополнительное слагаемое типа B_2 ; вносятся соответствующие дополнения в граничные и начальные условия.

Аналогичные уравнения могут быть записаны и для случая, когда твердое тело пересекает границу раздела Γ между жидкими фракциями (например, колеблется около положения равновесия, в котором тело омывается обеими фракциями). В этом случае в области $\rho > 1$ (т. е. вне тела) нужно вместо (σ, θ) ввести более удобную систему криволинейных координат, ибо уравнение границы Γ (в области $\rho > 1$) уже нельзя записать в виде $x_1 = W(\theta, t)$. В частности, уравнение границы Γ может отыскиваться в виде $x_1 = W(\rho, t)$ ($\rho \geq 1$) и вместо (σ, θ) может рассматриваться координатная система (σ, ρ) , $x_1 = \sigma + W(\rho, t)$.

Задача (1.1)–(1.11) допускает формальное решение в виде рядов по целым степеням t [10], которое необходимо для построения алгоритма численного решения поставленной задачи, подобно сделанному в [11]. Эта необходимость вызвана тем, что эволюционное уравнение (1.4) не разрешено относительно производной по времени.

2. Медленно всплывающий шар и волны. Пусть в начальный момент шар и жидкость покоятся. Начальные условия имеют вид

$$t=0, A_1=A_2=W=u=0, f=H \quad (2.1)$$

Если шар находится достаточно далеко от границы раздела ($|H| \gg 1$), то решение задачи можно строить в виде рядов по степеням параметра μ , который вводится следующим образом. Модифицируем равенства (1.1), положив

$$B = B_1 + \mu B_2(\rho, \theta, t), B^* = \mu B_1^* + B_2^*(\sigma, \theta, t)$$

$$\Psi(\rho, \theta, t) = -\rho r_* \sin \theta (B_1 + \mu B_2), \Psi^* = -[\sigma + W - f] \text{tg} \theta (\mu B_1^* + B_2^*) \quad (2.2)$$

Остальные соотношения остаются без изменений. Тем самым параметр μ вводится в уравнения (1.4)–(1.7), (1.9), (1.10). Решение этих уравнений ищется в виде рядов

$$\begin{aligned} A_i(\theta, t) &= A_{i,0}(\theta, t) + \mu A_{i,1}(\theta, t) + \mu^2 A_{i,2}(\theta, t) + \dots \quad (i=1, 2) \\ W(\theta, t) &= \mu W_1(\theta, t) + \mu^2 W_2(\theta, t) + \dots \\ u(t) &= u_0(t) + \mu u_1(t) + \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\Psi(\rho, \theta, t) = \Psi_0(\rho, \theta, t) + \mu \Psi_1(\rho, \theta, t) + \mu^2 \Psi_2(\rho, \theta, t) + \dots$$

Построив ряды, следует положить $\mu = 1$.

Физический смысл параметра μ очевиден: это своеобразный коэффициент связи между двумя активными очагами возмущения — всплывающим шаром и поверхностью раздела Γ . При достаточно большом расстоянии $|H|$ взаимное влияние этих очагов достаточно мало, так что значение $\mu = 1$ также мало.

Подставив $r_* = 1$ в уравнения (1.2)–(1.10), разложив с помощью (2.2), (2.3) обе части каждого уравнения в ряды по степеням μ , приравняв коэффициенты при одинаковых степенях параметра, получим последовательность систем линейных интегродифференциальных уравнений относительно $A_{i,h}$ ($i=1, 2$), W_h , u_h . Техника построения решений такого рода линей-

ным систем в виде рядов со слагаемыми $c_j(t)f_j(\theta)$ по собственным функциям $f_j(\theta)$ соответствующих линейных интегральных операторов описана в [12]. Коэффициенты $c_j(t)$ являются решением задачи Коши для счетной системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

В частности, решения уравнений первых приближений представляются формулами

$$A_{1,0}=3\varepsilon_0 t, \quad A_{1,1}=0, \quad A_{1,2}=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(t) (2k+3) P_{k+1}'(\cos \theta)$$

$$A_{2,0}=0, \quad A_{2,1}=8\varepsilon_* \cos^2 \theta \sum_{k=0}^{+\infty} v_k(t) (2k+3) P_{k+1}'(\cos 2\theta)$$

$$W_1 = \cos^3 \theta \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(t) (2k+1) P_k(\cos 2\theta), \quad u_0=2\varepsilon_0 t, \quad u_1=0$$

$$h=-H(1-\varepsilon^2 t^2), \quad \varepsilon_*=(\gamma_2-\gamma_1)/(\gamma_2+\gamma_1)$$

$$\varepsilon_0=(\gamma-\gamma_0)/(\gamma+2\gamma_0)$$

Здесь γ — плотность жидкости, соприкасающейся с шаром, γ_0 — плотность шара, $\varepsilon^2=-\varepsilon_0/H>0$ (предполагается), $P_k(x)$, $P_k'(x)$ — стандартизованный многочлен Лежандра степени k и его производная [13].

Функции $u_2(t)$, $a_k(t)$ определяются уравнениями

$$u_2' = \frac{3\varepsilon_* \gamma_0}{\gamma+2\gamma_0} \left[\left(\frac{v_0}{h} \right)' + \frac{3}{5} \frac{v_0+v_1}{H} \frac{\varepsilon^2 t}{(1-\varepsilon^2 t^2)^2} \right], \quad u_2(0)=0$$

$$a_0(t) = \frac{1}{2} u_2(t) - \frac{\varepsilon_*}{2h} v_0(t)$$

$$a_n = -\frac{\varepsilon_*}{h^{n+1}} \sum_{k=0}^n v_k(t) \frac{1}{2^{n+1}} \frac{n!}{k! (n-k)!}, \quad n \geq 1$$

Функции $v_n(t)$, $c_n(t)$ являются решением счетной системы дифференциальных уравнений

$$v_n' = -\frac{1}{4} (c_n + 2c_{n+1} + c_{n+2}) - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{H} \frac{\varepsilon^2 t^2}{(1-\varepsilon^2 t^2)^3} N_n -$$

$$-\frac{3}{2} \frac{\varepsilon^2}{H} \frac{S_n}{(1-\varepsilon^2 t^2)^2} - \frac{\varepsilon^2 t}{1-\varepsilon^2 t^2} [n v_{n-1} - v_n - (n+3) v_{n+1}] \quad (2.4)$$

$$c_n' = \frac{2\varepsilon_*}{|h|} \left[n v_{n-1} + \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j v_{n+j} \right] +$$

$$+\frac{1}{H^2} \frac{\varepsilon^2 t}{(1-\varepsilon^2 t^2)^3} Q_n + \frac{\varepsilon^2 t}{1-\varepsilon^2 t^2} [(n+1) c_{n+1} + 3c_n - n c_{n-1}]$$

$$N_0=3, \quad N_1=S_0=Q_0=Q_1=1, \quad S_1=0, \quad n>1 \quad N_n=S_n=Q_n=0$$

В силу (2.1) должны выполняться условия $c_n(0)=0$, $v_n(0)=0$.

Два параметра ε_0 и ε_* определяют два временных масштаба задачи: чем меньше $|\varepsilon_0|$, тем медленнее движется шар, и чем ближе ε_* к едини-

це, тем выше частота внутренних волн. Если шар движется достаточно медленно ($|\varepsilon_0| \ll \varepsilon_*$), то, пока он пройдет, например, половину первоначального расстояния $|H|$ (примерно за время $\varepsilon t < 0,7$), на границе Γ сформируется достаточно развитая волновая картина. Приведем результаты для этого случая.

В системе (2.4) положим $c_{N+j} \equiv 0$, $v_{N+j} \equiv 0$ ($j=1, 2, \dots; N$ — произвольно выбранное натуральное число). Полученная усеченная линейная система с медленно меняющимися коэффициентами может быть приближенно проинтегрирована с погрешностью порядка ε_0^2 .

Пусть решение некоторой линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами представляется набором гармоник с постоянными частотами и амплитудами. Если «возмутить» коэффициенты такой системы «медленно» меняющимися функциями, то можно ожидать, что решение возмущенной системы (пусть приближенно и особенно на конечном интервале времени) будет описываться набором синусов и косинусов с медленно меняющимися частотами и амплитудами. Это физически прозрачное соображение и положено в основу интегрирования системы (2.4) при $|\varepsilon_0| \ll \varepsilon_*$. В результате приближенного интегрирования получаются формулы

$$c_n(t) = (-1)^n \frac{\varepsilon_0}{H^2} \sum_{k=1}^{N+1} B_{nk} \varphi_k(\tau) \quad (2.5)$$

$$v_n(t) = (-1)^n \frac{1}{H} \left| \frac{\varepsilon_0}{H} \right|^{1/2} \left[y_{n+1}(\tau) + \left(2 \frac{|\varepsilon_0|}{\varepsilon_*} \right)^{1/2} \sum_{k=1}^{N+1} D_{nk} F_k(\tau) \right]$$

$$F_k(\tau) = - \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \frac{x_k(0)}{\sqrt{u_k}} \sin \beta_k(\tau), \quad \beta_k = \left(\frac{\varepsilon_* u_k}{2|\varepsilon_0|} \right)^{1/2} \arcsin \tau$$

$$\varphi_k(\tau) = x_k(\tau) - \frac{x_k(0)}{1-\tau^2} (1 - \varepsilon \delta_k \ln(1-\tau^2)) \cos \beta_k -$$

$$- \left(2 \frac{|\varepsilon_0|}{\varepsilon_*} \right)^{1/2} \sum_{j=1}^{N+1} b_{kj}(\tau) \sin \beta_j$$

$$b_{kj} = \frac{\tau}{(1-\tau^2)^{1/2}} x_j(0) \frac{\sqrt{u_j}}{u_j - u_k} V_{kj}, \quad k \neq j$$

$$b_{kk} = \frac{x_k(0)}{2\sqrt{u_k}} \left[\frac{2\tau\alpha_k}{(1-\tau^2)^{1/2}} + \frac{1-2\alpha_k}{1-\tau^2} \arcsin \tau \right]$$

$$x_k(\tau) = \sum_{j=0}^{+\infty} x_{kj} \tau^{2j}, \quad y_k(\tau) = \tau \sum_{j=0}^{+\infty} y_{kj} \tau^{2j}$$

$$\sigma_{k,0} = 0, \quad m > 0 \quad \sigma_{k,m} = \sum_{j=0}^{m-1} y_{kj}$$

$$x_{km} = - \frac{4}{u_k} \sum_{j=0}^N B_{jk} [(j+2)(j+1)\sigma_{j+1,m-j} - (j-1)\sigma_{j-1,m}] +$$

$$\begin{aligned}
 & +B_{0,k}(m+1) \left[1 - \frac{|H|}{H\varepsilon_*} + \frac{1}{2} m \left(u_k - 4 \frac{|H|}{H\varepsilon_*} \right) \right] \\
 (2m+1)y_{km} = & (-1)^k \frac{1}{8} (m+1) (mN_{k-1} + 2S_{k-1}) + (k-1)\sigma_{k-1,m} + \\
 & + \sigma_{km} - (k+2)\sigma_{k+1,m} + \sum_{j=1}^{N+1} D_{k-1,j} x_{jm} \\
 L_n(u) = & \frac{1}{n!} e^u \frac{d^n}{du^n} (u^n e^{-u})
 \end{aligned}$$

Здесь $\tau = \varepsilon t$ — «медленное» время, $0 < u_1 < u_2 < \dots < u_{N+1}$ — нули полинома Лагерра $L_{N+1}(u)$ [13]. Постоянные в (2.5) определяются соотношениями

$$n=0, 1, \dots, N, \quad B_{nk} = L_n(u_k) b_k, \quad n > N, \quad B_{nk} = 0 \quad (2.6)$$

$$b_k^2 = \sum_{j=0}^N L_j^2(u_k), \quad b_k > 0, \quad \delta_k = \frac{1}{4} + \frac{1}{4u_k} B_{Nk}^2 (N+1)^2$$

$$4D_{nk} = B_{nk} - 2b_{n+1,k} + B_{n+2,k}$$

$$V_{ki} = \sum_{j=0}^N B_{jk} [jB_{j-1,i} - (j+1)B_{j+1,i}]$$

$$\alpha_k = 1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1, i \neq k}^{N+1} \frac{u_k}{u_i - u_k} V_{ki}^2, \quad k \neq j \quad \sum_{n=0}^N B_{nk} B_{nj} = 0.$$

Эти постоянные не зависят от физических параметров. В (2.5) функции $x_k(\tau)$, $y_k(\tau)$, $F_k(\tau)$ не зависят от $|H|$. Ряды для $x_k(\tau)$, $y_k(\tau)$ сходятся на интервале $\tau^2 < 1$ не медленнее геометрической прогрессии со знаменателем τ^2 .

Волны на Γ формируются колебаниями, модулированными по амплитуде и частоте. Спектр этих колебаний приближенно представляется набором частот

$$\frac{d\beta_k}{dt} = \frac{\omega_k}{\sqrt{1-\tau^2}} = \left(\frac{\varepsilon_* u_k}{2|h|} \right)^{1/2}, \quad \omega_k = \left(\frac{\varepsilon_* u_k}{2|H|} \right)^{1/2}, \quad k=1, 2, \dots, N+1$$

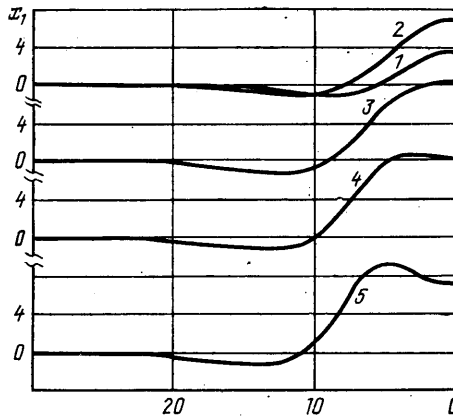
Таблица нулей нескольких первых полиномов Лагерра имеется, например, в [14].

Наглядное представление об эволюции поверхности Γ дает фиг. 2. Расчеты велись по формулам (2.5), (2.6) при $\varepsilon_0 = 0,02$, $\varepsilon_* = 0,95$, $H = -10$, $N = 15$. Линии 1–5 описываются уравнениями

$$x_1 = V(\theta, \tau), \quad y_1 = [W_1 - H(1-\tau^2)] \operatorname{tg} \theta \quad (\varepsilon_0 V = H^2 W_1)$$

при $\tau^2 = 0,10; 0,15; 0,20; 0,25; 0,30$ соответственно. Функция $V(\theta, \tau)$ не зависит от $|H|$, τ^2 примерно равно доле первоначального расстояния $|H|$, пройденной шаром к моменту $t = \tau/\varepsilon$, безразмерное смещение границы Γ равно W_1 . Например, когда шар прошел два радиуса ($\tau^2 = 0,20$, кривая 3), максимальное смещение поверхности Γ равно 0,0016 радиуса. Для указанных моментов времени при $N = 11$ и 15 графики качественно (наклоны касательных, выпуклость и т. п.) весьма схожи и количественно различаются не более чем на 5%.

Для функции тока из (1.1)–(1.3) следуют формулы



Фиг. 2

$$\Psi(\rho, \theta, t) = \Psi_0 + \mu \Psi_1 + \mu_2 \Psi_2 + \dots \Big|_{\mu=1} = -\frac{\varepsilon_0 t}{\rho} \sin^2 \theta +$$

$$+ \varepsilon_* \sum_{k=0}^{+\infty} v_k(t) \frac{(k+1)(k+2)}{2k+3} S_k(\rho, \theta, t) [P_{k+2}(\cos \beta) - P_k(\cos \beta)] +$$

$$+ \varepsilon_* \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(t) \frac{(k+1)(k+2)}{2k+3} \frac{1}{\rho^{k+1}} [P_{k+2}(\cos \theta) - P_k(\cos \theta)] + \dots$$

$$\cos \beta = \left(\cos \theta - \frac{\rho}{2h} \right) \frac{1}{z}, \quad z = \left(1 - \frac{\rho}{h} \cos \theta + \frac{\rho^2}{4h^2} \right)^{1/2}$$

$$S_k = \rho \left(\frac{\rho}{2hz} \right)^{k+1}, \quad \sigma h < 0 \quad \left(1 - \frac{\rho \cos \theta}{h(t)} > 0 \right)$$

$$S_k = \frac{|h|}{h} \rho \left(\frac{2hz}{\rho} \right)^{k+2}, \quad \sigma h > 0 \quad \left(1 - \frac{\rho \cos \theta}{h(t)} < 0 \right)$$

Предложенный метод применим также в задачах о волнах в тяжелой слоистой жидкости, возбуждаемых вертикально движущимся жидким телом и, в частности, кольцевым вихрем [15].

Изучаемые в статье задачи могут исследоваться описанным в [16] методом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афанасьев К. Е., Афанасьева М. М., Терентьев А. Г. Исследование эволюции свободных границ при нестационарном движении тел в идеальной несжимаемой жидкости методами конечных и граничных элементов // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 5. С. 8-13.
2. Морозенко С. Ю., Ясько Н. Н. Численное моделирование неустановившихся течений идеальной жидкости со свободными границами // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 2. С. 3-7.
3. Бежанов К. А., Тер-Крикоров А. М. Многослойные установившиеся течения идеальной несжимаемой жидкости над неровным дном // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 750-760.
4. Бежанов К. А., Тер-Крикоров А. М. Обтекание тела многослойным потоком идеальной несжимаемой тяжелой жидкости // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 3. С. 392-400.
5. Стурова И. В. Численные расчеты в задачах генерации плоских поверхностных волн: Препринт № 5. Красноярск: ВЦ СО АН СССР, 1990. 48 с.
6. Срегенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.

7. Акуленко Л. Д., Михайлов С. А., Нестеров С. В., Чайковский А. А. Численно-аналитическое исследование колебаний твердого тела на границе раздела двух жидкостей // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 59–66.
8. Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 655 с.
9. Миндлин И. М. К теории нестационарных вихрей в идеальной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 6. С. 3–11.
10. Миндлин И. М. О волнах в тяжелой двухслойной жидкости, возбуждаемых естественно всплывающим шаром // Колебания и волны в жидкости и газе. Горький: Горьк. политехн. ин-т, 1990. С. 54–63.
11. Гильман О. А., Миндлин И. М. Кольцевые вихри в неорганической тяжелой жидкости с кусочно-постоянной плотностью // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 6. С. 38–44.
12. Миндлин И. М. О вихрях в неограниченной идеальной жидкости // Горький: Горьк. политехн. ин-т, 1982. 36 с. – Деп. в ВИНТИ 24.06.82, № 3269–82.
13. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976. 327 с.
14. Миндлин И. М. О параметрическом резонансе маятников с вибрирующей точкой подвеса // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 4. С. 36–40.
15. Миндлин И. М. Интегриродифференциальные уравнения в динамике вихрей и волн в тяжелой жидкости с кусочно-постоянной плотностью. Горький: Горьк. политехн. ин-т, 1988. 39 с. – Деп. в ВИНТИ 26.08.88, № 6733–В88.
16. Миндлин И. М. Метод обобщенного потенциала скорости в динамике тяжелой жидкости с кусочно-постоянной плотностью. Н. Новгород: Н. Новг. политехн. ин-т, 1991. 11 с. – Деп. в ВИНТИ 30.01.91, № 498–В91.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
26.XI.1990