

УДК 532.546

© 1991 г.

**М. В. КАЧАН, С. Ф. ПИМЕНОВ, С. М. СУЩИЙ,  
М. Б. ЭНТЭЛЬ**

**О НЕКОТОРЫХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ  
УРАВНЕНИЯ ЛЕЙБЕНЗОНА**

Рассматриваются автомодельные одномерные решения уравнения Л. С. Лейбензона  $c^2\theta_t = \theta_{zz}^k$  ( $z \geq 0$ ,  $k \geq 2$ ). Построены приближенные решения для двух случаев, когда начальное значение  $\theta = \theta_1 = \text{const} > 0$ , а на границе поддерживается либо постоянное значение  $\theta = \theta_2 < \theta_1$ , либо задается поток (направленный «наружу»). В первой задаче определена зависимость граничного потока от определяющих параметров. Характерным свойством рассмотренных типов движений является существование вблизи границы расширяющейся со временем области, в которой поток практически не зависит от координаты.

1. Уравнение одномерной плоской диффузии (или теплопроводности) с коэффициентом диффузии, зависящем от концентрации (температуры)  $\theta$  по степенному закону ( $K(\theta) \sim \theta^n$ ), сводится к уравнению Л. С. Лейбензона [1, 2]

$$c^2 \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \theta^k, \quad k = n + 1 \quad (1.1)$$

(при  $k=2$  оно также называется уравнением Буссинеска). Такая ситуация встречается, например, при политропическом движении газа в пористой среде, фильтрации жидкостей в средах при неполном насыщении, движении грунтовых вод, при некоторых механизмах теплопроводности. В ряде практических задач требуется найти решение (1.1) в полубесконечной среде  $z \geq 0$ , удовлетворяющее начальному и одному из граничных условий

$$\theta(z, 0) = \theta_1 > 0 \quad (1.2)$$

$$\theta(0, t) = \theta_2 \geq 0, \quad t > 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \theta^k(0, t)}{\partial z} = \psi(t), \quad t > 0 \quad (1.4)$$

Задача (1.1)–(1.3) является автомодельной и при  $\theta_2 > 0$  заменой  $\xi = 1/2 cz \theta_2^{-(k-1)/2} t^{-1/2}$ ,  $f = \theta/\theta_2$  сводится к краевой задаче для известного нелинейного уравнения [1–4]

$$\frac{d^2 f^k}{d\xi^2} + 2\xi \frac{df}{d\xi} = 0 \quad (1.5)$$

$$f(0) = 1, \quad f(\infty) = \lambda = \theta_1/\theta_2 \quad (1.6)$$

При  $\theta_2 = 0$  (так называемая «задача опорожнения бассейна» [1]) замена  $\xi = 1/2 cz \theta_1^{-(k-1)/2} t^{-1/2}$ ,  $f = \theta/\theta_1$  приводит к уравнению (1.5) с условиями

$$f(0) = 0, \quad f(\infty) = 1 \quad (1.7)$$

Условие (1.4) задает на границе поток. В частном случае, когда  $\psi(t) = \sigma t^{-1/2}$ ,  $\sigma = \text{const}$ , решение  $\theta(z, t)$  также автомодельно [3]

$$\theta(z, t) = \theta_1 f(\xi), \quad \xi = \frac{cz}{2\theta_1^{(k-1)/2} t^{1/2}} \quad (1.8)$$

где  $f(\xi)$  — решение уравнения (1.5), удовлетворяющее условиям

$$\frac{df^k(0)}{d\xi} = \frac{2\sigma}{c\theta_1^{(k+1)/2}} \equiv A, \quad f(\infty) = 1 \quad (1.9)$$

Располагая решением (1.5), (1.9) и пользуясь методами, развитыми в [3], можно построить приближенное решение задачи (1.1), (1.2), (1.4) для произвольной монотонной функции  $\psi(t)$ .

Далее строятся приближенные решения уравнения (1.5) при условиях (1.6), (1.7), (1.9) и следующих ограничениях: а) поток направлен «наружу» ( $A > 0$ ,  $\lambda > 1$ ); б)  $k \geq 2$ , т. е. уравнение существенно нелинейно; отметим, что при фильтрации жидкостей в зоне аэрации в мелкодисперсных (глинистых) почвах  $k$  может достигать 15 [5], а электронный механизм теплопроводности в плазме дает  $k = 7/2$  [6]. Другие дополнительные ограничения указаны ниже.

2. В [1, 2] описано качественное поведение решений (1.5), (1.6): при любом  $\xi$  имеем  $f'(\xi) > 0$ ,  $f''(\xi) < 0$ ,  $f$  быстро стремится к  $\lambda$  при  $\xi \rightarrow \infty$ ; для  $k=2$  решения (1.5), (1.6) получены численно. Там же отмечено, что эффективное построение решений (1.5), (1.6) затруднено тем, что не удается свести эту задачу к задаче Коши.

Ограничимся в рассмотрении теми физически интересными ситуациями, когда  $\lambda$  заметно больше единицы, что соответствует большим значениям  $\alpha = f'(0)$ . Конкретную область применимости полученных аппроксимаций, которая зависит от  $k$ , можно оценить с помощью фигур, приведенных ниже.

Переписав уравнение (1.5) в развернутом виде, можно заметить, что при условии  $\xi < 1/2 k(k-1) f^{k-2} df/d\xi$ , всегда выполняющимся в окрестности начала координат, решение (1.5), (1.6) близко к решению уравнения  $(f^k)'' = 0$ . Иначе говоря, точная асимптотика решения вблизи нуля имеет вид

$$f^{(0)}(\xi, \alpha) = (\alpha k \xi + 1)^{1/k}$$

Для построения приближенного решения  $f^{(a)}(\xi)$  на всей полуоси  $\xi \geq 0$  представим его в виде

$$f^{(a)}(\xi) = f^{(0)}(\xi, \alpha) (1 - \delta) \quad (2.1)$$

и подставим в (1.5). Несложные оценки показывают, что получившееся уравнение при не слишком больших  $\xi$  можно линеаризовать по  $\delta$ . Тогда в области  $\alpha k \xi \gg 1$  (только здесь и становится заметным расхождение  $f^{(0)}(\xi, \alpha)$  и точного решения) получим

$$-\alpha k^2 (\xi \delta'' + 2\delta') + 2(\alpha k)^{1/k} k^{-1} \xi^{1/k} - 2(\alpha k)^{1/k} \xi^{1/k} (\xi \delta' + \delta k^{-1}) = 0 \quad (2.2)$$

Сравнивая в (2.2) различные члены, замечаем, что при

$$(\alpha k)^{-1} \ll \xi < \xi^* = \alpha^{(k-1)/(k+1)} k^{(2k-1)/(k+1)}$$

для  $\delta$  справедливо уравнение

$$\xi \delta'' + 2\delta' = 2(\alpha k)^{1/k} \xi^{1/k} \alpha^{-1} k^{-3} \quad (2.3)$$

Фактически (2.3) соответствует первой итерационной поправке, определяемой уравнением  $[(f^{(a)})^k]'' + 2\xi [f^{(0)}]' = 0$ , решение которого, стремя-

щесся при  $\xi=0$  к нулю, имеет вид

$$\delta = 2\xi^{1+1/k}(\alpha k)^{1/k-1}p^{-1}, \quad p = (2k+1)(k+1) \quad (2.4)$$

Поскольку при малых  $\xi \ll (\alpha k)^{-1}$  удовлетворительная точность обеспечивается решением  $f^{(0)}(\xi)$ , а величина  $\delta(\xi)$  в этой области мала, то (2.4) можно использовать вплоть до  $\xi=0$ . Отсюда также следует, что в области  $\xi \ll \xi^*$  максимальная относительная погрешность асимптотики  $f^{(0)}(\xi, \alpha)$  не превышает величины

$$\delta \ll \delta(\xi^*) = 2k/p < 0,27 \quad (2.5)$$

При  $\xi \gg \xi^*$  линеаризовать уравнение (1.5) с подставленным выражением (2.1) по  $\delta$  уже нельзя. Однако поиск решения в этом случае может быть облегчен тем обстоятельством, что в точке

$$\xi_0 = (\alpha k)^{(k-1)/(k+1)} \left[ \frac{p}{2(k+2)} \right]^{k/(k+1)} \simeq (0,93-1)\xi^* \quad (2.6)$$

производная  $[f^{(a)}]'$  равна нулю. Тогда легко проверить, что выражение для  $\delta$  в области  $\xi \gg \xi_0$ , обеспечивающее в точке  $\xi = \xi_0$  сшивку производной и самой функции, имеет вид

$$\delta = 1 - \text{const } \xi^{-1/k}$$

что соответствует выходу  $f^{(a)}(\xi)$  на постоянное значение, которое естественно отождествить с  $\lambda$ . Таким образом, при  $\xi \gg \xi_0$  для  $f^{(a)}(\xi)$  имеем

$$f^{(a)}(\xi) = [1 - \delta(\xi_0)] f^{(0)}(\xi_0) = \left( \frac{k+1}{k+2} \right) \left( 1 + \left[ \frac{(\alpha k)^2 p}{2(k+2)} \right]^{k/(k+1)} \right)^{1/k} = \lambda \quad (2.7)$$

Выражая из (2.7)  $\alpha(\lambda) \sim (\lambda^{k+1} k^{-3})^{1/2}$ , тем самым полностью определяем решение (2.1).

На фиг. 1 приведены для сравнения «точное» (полученное численно)  $f^{(e)}(\xi)$  и приближенное  $f^{(a)}(\xi)$  решения задачи (1.5), (1.6) для различных пар  $(k, \lambda)$ : 1 — (3; 2,25), 2 — (3; 6,45), 3 — (5; 7,25). На фиг. 2 представлена функция  $\Delta_k(\lambda)$ , которая определяет максимальное значение относительной ошибки в зависимости от  $\lambda$  при различных значениях  $k$  (указаны цифрами)

$$\max_{0 \leq \xi < \infty} (|f^{(a)}(\xi) - f^{(e)}(\xi)| / f^{(e)}(\xi)) \leq \Delta_k(\lambda)$$

Видно, что с ростом как  $\lambda$  (что эквивалентно росту  $\alpha$ ), так и  $k$  точность приближенного решения возрастает. Связано это с увеличением отношения коэффициентов в уравнении (2.2). При больших  $k$ , как видно на фиг. 1, 2, сравнительно высокая точность достигается даже при  $\lambda$ , близких к единице.

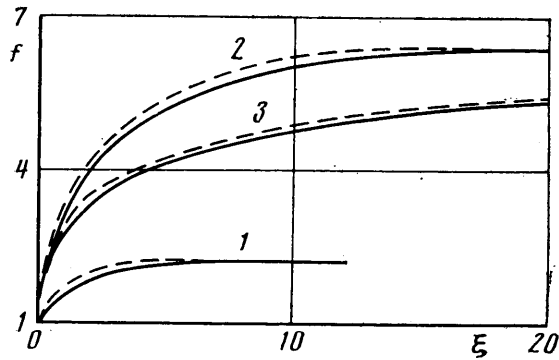
3. Малость величины  $\delta(\xi)$  при  $\xi \ll \xi^*$  (см. (2.5)) означает, что уравнение

$$d^2 f^h / d\xi^2 = 0 \quad (3.1)$$

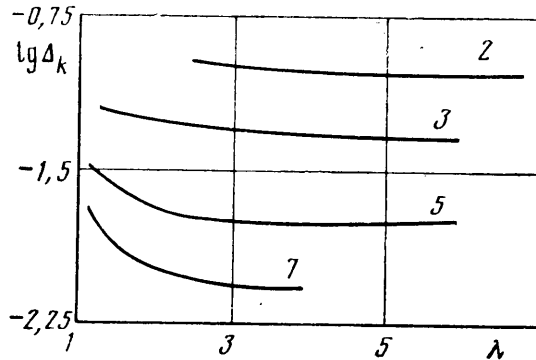
дает достаточно хорошее приближение к точному решению в этой области. Переходя от  $\xi$  снова к переменным  $z$  и  $t$ , видим, что (3.1) соответствует приближению для потока

$$|q| = \frac{\partial \theta^h}{\partial z} = \alpha k \theta_2^k \frac{\partial \xi}{\partial z} \simeq c \left( \frac{\theta_1^{k+1}}{4kt} \right)^{1/2} \quad (3.2)$$

Таким образом, вблизи поверхности поток не зависит от координаты.



Фиг. 1



Фиг. 2

Оценка (3.2) справедлива в области  $0 < z \leq z^*$ , где

$$z^* = c^{-1} \theta_2^{(k-1)/2} t^{1/2} \xi^* \approx c^{-1} (\theta_1^{k-1} kt)^{1/2}$$

Существование двух областей движения, в первой из которых (прилегающей к границе) сосредоточена основная часть всего перепада величины  $f$ , но поток почти постоянен (что и выражает уравнение (3.1)), а во второй перепады  $f$  малы и поток медленно уменьшается, установлено в [4] в задаче об осесимметричном радиальном движении жидкости и газа (при  $k=2$ ), когда в качестве граничного условия (на оси) задается поток.

4. Рассмотрим теперь уравнение (1.5) с условиями (1.7). В случае  $k=2$  задача (1.5), (1.7) сводится к задаче о пограничном слое на плоской пластине [1], решение которой известно. Хотя точка  $\xi=0$ , в которой  $f(\xi)=0$ , является особой для уравнения (1.5), с физической точки зрения очевидно, что при  $\lambda \rightarrow \infty$  решение (1.5), (1.6) после перенормировки (см. формулу (4.3)) должно соответствовать задаче (1.5), (1.7). Для построения решения, однако, проще поступить следующим образом: выбираем  $f^{(0)}(\xi, \alpha)$  в виде (асимптотически точном при малых  $\xi$ )

$$f^{(0)}(\xi, \alpha) = (\alpha k \xi)^{1/k} \quad (4.1)$$

Тогда уравнение (3.1) примет вид

$$\left( \frac{k+1}{k+2} \right) \left[ \frac{(\alpha k)^2 p}{2(k+2)} \right]^{1/(k+1)} = \lambda = 1 \quad (4.2)$$

Формулы (2.4) и (2.6) не меняются; следует только отметить, что теперь  $\alpha$  определяется выражением  $\alpha k = (f^k(0))^{1/k}$ .

Вытекающая из (4.2) зависимость  $\alpha \sim \lambda^{(k+1)/2}$  является точной для решений уравнения (1.5) с условиями  $f(0)=0, f(\infty)=\lambda$  (и асимптотически точной при  $\lambda \rightarrow \infty$  для задачи (1.5), (1.6)). Действительно, эти решения допускают преобразование [2, 4]

$$f_1(\xi) = \mu^{-r} f_2(\mu \xi), \quad r = 2/(k-1) \quad (4.3)$$

откуда

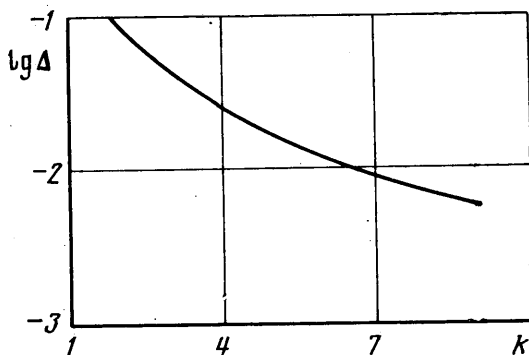
$$\frac{f_1(\infty)}{f_2(\infty)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \mu^{-r}$$

С другой стороны, в пределе  $\xi \rightarrow 0$  с учетом (4.1) получим

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{f_1(\xi)}{f_2(\xi)} = \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^{1/k} = \mu^{-r} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{f_2(\mu \xi)}{f_2(\xi)} = \mu^{-r+1/k}$$

откуда и вытекает сделанное утверждение.

На фиг. 3 представлена функция  $\Delta(k)$  — максимальная относительная ошибка приближенного решения задачи (1.5), (1.7).



Фиг. 3

Величина граничного потока и в этом случае определяется формулой (2.4); точность определения  $q$  зависит от точности определения  $\alpha$ . Ниже приведены точные значения величины  $\alpha = \alpha^{(e)}$  для различных  $k$  и для сравнения — значения  $\alpha^{(a)}$ , вычисленные по формуле (4.2)

| $k$            | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7                     | 8                     | 9                     |
|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $\alpha^{(e)}$ | 0,4696 | 0,2733 | 0,1842 | 0,1349 | 0,1043 | $8,371 \cdot 10^{-2}$ | $6,913 \cdot 10^{-2}$ | $5,835 \cdot 10^{-2}$ |
| $\alpha^{(a)}$ | 0,56   | 0,31   | 0,20   | 0,15   | 0,11   | $8,9 \cdot 10^{-2}$   | $7,3 \cdot 10^{-2}$   | $6,1 \cdot 10^{-2}$   |

5. Рассмотрим задачу (1.5), (1.9). Для существования решения необходимо выполнение условия  $A \leq A_*$  [3]; случай  $A = A_*$  отвечает максимально возможной величине потока, которая, очевидно, соответствует условию  $\theta(0, t) = 0$ . Таким образом, при  $A = A_*$  решение (1.5), (1.9) совпадает с решением задачи об «опорожнении бассейна», рассмотренной в разд. 4. Тогда имеем  $A_* = k\alpha^{(e)}$ . Используя результаты разд. 2–4, можно построить приближенное решение задачи (1.5), (1.9)

$$f^{(a)}(\xi) = (A\xi + a)^{1/k} [1 - \delta(\xi)] \quad (5.1)$$

где  $\delta(\xi)$  соответствует (2.4) при условии  $\alpha k = A$ . Незвестной в (5.1) является константа  $a$ . Удобнее, однако, искать величину, имеющую непосредственный физический смысл, т. е.  $f(0) = a^{1/k}$ . Воспользуемся для этого

интегральным соотношением, которое можно получить из (1.1) [3]

$$c^2 \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} (\theta - \theta_1) dz = - \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial \theta^k}{\partial z}$$

Подставляя сюда (1.8), получим

$$\int_0^{\infty} [1 - f(\xi)] d\xi = \frac{1}{2} \frac{df^k(0)}{d\xi} = \frac{A}{2} \quad (5.2)$$

Обозначим интеграл в левой части (5.2)  $I(a)$ . Тогда

$$I(a) = A/2, \quad I(0) = A_*/2$$

Для значений  $A$ , не слишком сильно отличающихся от  $A_*$ , используя (5.1), получаем оценку

$$I(0) - I(a) = \frac{\Delta A}{2} \simeq \frac{a^{1+1/k}}{A_*} \left[ \left( \frac{A_*}{\Delta A} \right)^{1/k} - \frac{k}{k+1} \right], \quad \Delta A = A_* - A$$

Окончательно имеем

$$f(0) = a^{1/k} \simeq \left\{ \frac{\Delta A A_*}{2} \left[ \left( \frac{A_*}{\Delta A} \right)^{1/k} - \frac{k}{k+1} \right]^{-1} \right\}^{1/(k+1)} \quad (5.3)$$

При  $\Delta A \ll 1$ , когда в (5.3) в знаменателе можно пренебречь вторым слагаемым, имеем  $f(0) \simeq m(k) \Delta A^{1/k}$ , где  $m(k) \simeq 0,8 - 1$ . В случае  $k=2$  формула (5.3) обеспечивает относительную погрешность  $\varepsilon$  не более 0,05 при  $A = (0,3 - 1) A_*$ ; соответственно  $\varepsilon \leq 0,02$  при  $k=3$ ,  $A = (0,5 - 1) A_*$  и  $\varepsilon \leq 0,007$  при  $k=5$ ,  $A = (0,65 - 1) A_*$ .

Используя в (5.1) найденные таким образом значения  $a^{1/k}$ , получим хорошее приближение к точному решению в области основного перепада  $f$ , но асимптотическое значение  $f^{(a)}(\infty) = f^{(a)}(\xi_0)$  будет несколько меньше единицы. Обеспечить точную асимптотику решения можно, если строить его аналогично разд. 2, задавая граничные условия  $f(0) = a^{1/k}$ ,  $f(\infty) = 1$ . Ошибки в этом случае имеют практически ту же величину, что и на фиг. 2.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Об одном нелинейном уравнении в частных производных, встречающемся в теории фильтрации // Докл. АН СССР. 1948. Т. 13. № 6. С. 623-626.
2. Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 1. С. 67-78.
3. Баренблатт Г. И. О приближенном решении задач одномерной нестационарной фильтрации в пористой среде // ПММ. 1954. Т. 18. Вып. 3. С. 351-370.
4. Баренблатт Г. И., Енгов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.
5. Camillo P. J., Gurney R. J., Schmugge T. J. A soil and atmospheric boundary layer model for evapotranspiration and soil moisture studies // Water Resour. Res. 1983. V. 19. № 2. P. 371-380.
6. Баранов В. Б., Краснобаев К. В. Гидродинамическая теория космической плазмы. М.: Наука, 1977. 335 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию  
1.XII.1988