

УДК 532.529.6

© 1991 г.

П. К. ВОЛКОВ

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПУЗЫРЯ В «ЗАТОПЛЕННОМ»
КАНАЛЕ**

В системах электронного оборудования используются схемы охлаждения, в которых к охлаждаемым элементам прикрепляется металлическая пластинка с вертикальными сквозными отверстиями и все вместе погружается в охлаждающую жидкость [1]. При больших тепловых потоках внутри отверстий жидкость начинает кипеть, образуются паровые пузырьки, которые всплывают, одновременно проталкивают жидкость, создавая циркуляционное течение. Используют также внешний источник пузырьков. Радиус каналов не велик и сравним с капиллярной постоянной жидкости. Итак, имеем «затопленный» (погруженный) канал, через который всплывают пузырьки газа или пара. Течение жидкости может быть принципиально иным, чем при всплытии пузырьков в тупиковом канале, когда верхний конец трубки выступает над жидкостью или закрыт. В этом случае пузырь всплывает за счет того, что жидкость над ним перетекает в область за пузырьком, и скорость его всплытия определяется эффективностью этого перетока. В случае затопленного канала возможно также движение жидкости под действием архимедовой силы на пузырек, который выступает в роли поршня. В точной постановке задача о всплытии пузырька в затопленном канале сложна для решения, поскольку необходимо учитывать движение жидкости как в трубке, так и вне ее. В первом приближении можно рассмотреть задачу всплытия пузырька в трубке с жидкостью, которая движется вдали от него с заданным профилем скорости по сечению, например параболой Пуазейля, характеризуемой одним параметром. Такое предположение оправданно, поскольку возмущения, вносимые пузырьком, в тонких каналах далеко не распространяются [2]. В случае длинной трубки силы Архимеда пузырька может оказаться недостаточно, чтобы сдвинуть весь столб жидкости над ним и тогда процесс всплытия будет таким же, как и в тупиковом канале [2]. В коротких трубках преобладающим будет процесс проталкивания жидкости, поскольку переток ее из области над пузырьком в пространство за ним даже в малых количествах сопровождается большим местным сопротивлением на стенках трубки [2]. Поэтому будем рассматривать режимы, когда переток жидкости сверху вниз через зазор между стенками пузырька и трубы отсутствует, т. е. профиль скорости здесь выпуклый с максимумом на стенке пузырька.

1. Постановка задачи. Математическое описание удобно проводить в системе координат, в которой пузырек покоится, а стенки трубы и жидкость движутся сверху вниз. Причем скорость движения трубы равна по величине скорости всплытия пузырька u . В сферической системе координат с началом o в «центре пузырька» стационарное движение жидкости описывается уравнениями Навье — Стокса, которые в осесимметричном случае в терминах «функция тока ψ », «вихрь ω » имеют вид

$$D^2\psi = -2r \sin \theta \omega \tag{1.1}$$

$$D^2\omega = \frac{v}{r^2 \sin \theta} \left[\psi_\theta \omega_r - \psi_r \omega_\theta - \frac{\omega}{r} \psi_\theta + \omega \operatorname{ctg} \theta \psi_r \right] - \frac{2}{r} \omega_r + \frac{\omega}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{r^2} \omega_\theta \tag{1.2}$$

$$\left(D^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right)$$

Краевыми условиями на поверхности пузыря Γ будут условия непротекания, равенство нулю касательных напряжений и равенство разности нормальных напряжений капиллярным силам

$$\Gamma(r=R(\theta), \theta \in [0, \pi]): \psi(r, \theta) = 0 \quad (1.3)$$

$$\omega + \frac{R^2 + 2R'^2 - RR''}{R^2 + R'^2} \frac{\psi_r}{R^2 \sin \theta} = 0 \quad (1.4)$$

$$-p(r, \theta) + 2\rho\nu \left[\frac{\psi_{\theta r} - \psi_{\theta}/R + R'\psi_{rr}}{R^2 \sin \theta} + \frac{R'}{R} \omega \right] = -p_r + \sigma K \quad (1.5)$$

$$K = \frac{R^2 + 2R'^2 - RR''}{(R^2 + R'^2)^{3/2}} + \frac{|R' \cos \theta - R \sin \theta|}{R \sin \theta (R^2 + R'^2)^{1/2}}$$

$$p = q - \rho g r \cos \theta + p_{\infty} \quad (p_{\infty} = p(r=R_k, \theta = \pi/2))$$

Здесь K — кривизна Γ , ν — коэффициент кинематической вязкости, ρ — плотность жидкости, σ — коэффициент поверхностного натяжения, p — давление в жидкости, q — обобщенное давление, g — ускорение силы тяжести, p_r — давление газа в пузыре, считается постоянным.

На стенках трубы поставим условия прилипания и непротекания, а на оси трубы — условия симметрии

$$r = G(\theta), \theta \in [\theta^*, \pi - \theta^*], \theta^* = \arctg(R_k/l)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -u \quad (1.6)$$

$$\psi = -\frac{u}{2} R_k^2 \left(1 - \frac{u_n}{u} \right) \quad (1.7)$$

$$\psi(r, \theta) = \omega(r, \theta) = 0, \theta = 0, \pi \quad (1.8)$$

Здесь R_k — радиус трубки, $2l$ — длина рассматриваемого участка движущейся трубы.

Кроме того, на входе и выходе трубы зададим

$$r = F_1(\theta), \theta \in [0, \theta^*], r = F_2(\theta), \theta \in [\pi - \theta^*, \pi]$$

$$\psi(r, \theta) = -\frac{u}{2} r^2 \sin^2 \theta + \frac{u_n}{2} r^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{r^2 \sin^2 \theta}{2R_k^2} \right) \quad (1.9)$$

$$\omega(r, \theta) = u_n r \sin \theta / R_k^2 \quad (1.10)$$

Здесь u_n — значение скорости на оси трубы в течении Пуазейля.

Условия (1.4) и (1.5) означают, что трением газа о жидкость на поверхности пузыря пренебрегается, а его присутствие определяется величиной p_r . В условиях (1.7), (1.8), (1.9) имеются слагаемые, обусловленные течением Пуазейля в трубе. Так, при $u_n = 0$ получаем условия для задачи всплытия пузыря в трубе с покоящейся на бесконечности жидкостью [2, 3]. При $u_n > 0$ появляется дополнительный расход в сечениях трубы, что учтено в (1.7). На входе и выходе трубы задана парабола Пуазейля $v(y) = u_n (1 - y^2/R_k^2)$ (y — координата, перпендикулярная стенке трубы), которая в терминах $\psi - \omega$ с учетом введенной системы координат дает условия (1.9), (1.10). Задание профиля скорости на выходе трубы означает, что возмущения от пузыря не достигают сечения выхода.

2. Анализ размерностей и метод решения. В задаче (1.1) — (1.10) содержатся следующие размерные параметры:

$$\rho, \nu, \sigma, g, p_r - p_{\infty}, R_k, u_n, u$$

Однако не все они являются независимыми. Форма поверхности пузыря (а значит, и объем), скорость его всплытия u должны быть определены при решении одновременно с функциями течения. Кроме того, в заданной жидкости при $g=0$ будем иметь сферический пузырь, радиус a которого подчиняется уравнению, следующему из (1.5): $p_r - p_\infty = 2\sigma/a$, т. е. характерный размер пузыря (например, радиус эквивалентной по объему сферы a) диктуется величинами σ и $p_r - p_\infty$ [4, 5]. Таким образом, согласно теории размерностей, задача (1.1) — (1.10) может иметь не более четырех безразмерных независимых комплексов. Если в качестве характерных размера и скорости выбрать a и u и провести обычным образом обезразмеривание [4, 5], то в уравнения движения и краевые условия будут входить шесть безразмерных параметров

$$\text{Re} = \frac{u2a}{\nu}, \quad \text{We} = \frac{\rho u^2 2a}{\sigma}, \quad \text{Fr} = \frac{u^2}{ga}$$

$$\text{Pd} = \frac{p_r - p_\infty}{\rho u^2}, \quad W = \frac{u_n}{u}, \quad \lambda = \frac{a}{R_k}$$

Здесь Re , We , Fr — числа Рейнольдса, Вебера и Фруда. Параметр λ характеризует геометрию области течения, W определяет расход жидкости в трубе, обусловленный течением Пуазейля. Если считать независимыми Re и We , то Fr и Pd задавать заранее нельзя (это было бы эквивалентно заданию жидкости, размера пузыря, скорости его всплытия). Они должны быть определены вместе с функциями течения, например, как в [4].

Задача (1.1) — (1.10) с математической точки зрения отличается от решаемой в [2, 3] условиями (1.7), (1.8), (1.10), задающими расход жидкости и профиль Пуазейля на входе и выходе трубы. Поэтому метод решения и алгоритм будут аналогичными [2]. Наиболее интересны для исследования те случаи, когда размер пузырька a сравним с радиусом трубы R_k , т. е. λ близка к единице. Как и в [2], расчеты будем вести при $\lambda=0,8$ и $0,98$ с различными Re и We по алгоритму, изложенному в [2, 4]. При $\text{We}=0$ имеем сферический пузырь для любых Re : $R=2$. С физической точки зрения выбор способа обезразмеривания и алгоритма расчета означает, что рассматривается всплытие пузыря данного размера a со скоростью u в жидкости с заданными параметрами ρ , ν , σ . Внешние условия (параметры Fr и Pd или, что то же, g и $p_r - p_\infty$) подбираются так, чтобы реализовалось стационарное течение. Эта задача является обратной к исходной физической постановке, в которой рассматривается всплытие пузырька газа в заданной среде под действием силы тяжести. И если на некотором участке пути объем пузыря, его форма и скорость всплытия существенно не изменяются, то говорят, что пузырь совершает стационарное всплытие. Следует также отметить, что в строгом смысле стационарного всплытия в эксперименте достичь невозможно из-за гидростатического давления, которое изменяется с высотой, что приводит в конечном итоге к росту объема пузыря.

Получим приближенную оценку для W , моделирующую всплытие пузыря в погруженном канале. В случае отсутствия перетока жидкости через зазор можно записать равенство расходов $u r_m^2 = u_c R_k^2$, где r_m — радиус миделева сечения пузыря, u_c — среднерасходная скорость на входе. Тогда $u_c = u (r_m/R_k)^2 \approx u \lambda^2$, поскольку величина r_m мало отличается от радиуса эквивалентной по объему сферы a , если λ близка к единице [2]. В течении Пуазейля $u_n = 2u_c = 2u \lambda^2$ и для $\lambda=0,8$ будем иметь $W=1,28$, а при $\lambda=0,98$ получим $W=1,92$.

3. Результаты расчетов. Для $\lambda=0,8$ и $W=1,25$ проведена серия расчетов с разными значениями Re и We : $1 \leq \text{Re} \leq 100$, $0 \leq \text{We} < 6$. При $\text{We}=0$

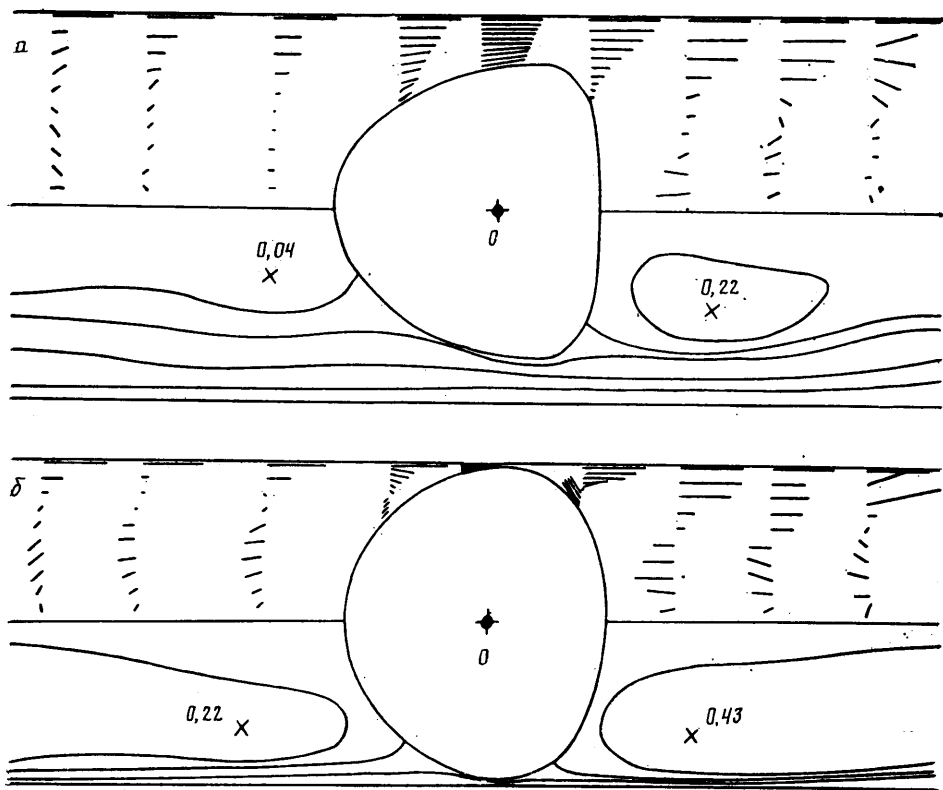
имеем сферический пузырь. С ростом We при фиксированном Re форма его изменяется к сплюснутому эллипсоиду, а затем становится клинообразной. Картина течения около пузыря меняется соответственно с его формой, а вдали (на расстоянии примерно двух калибров трубы) практически одинакова для любых Re и We . Характерная форма пузырей показана на фиг. 1. На фиг. 1, *a* — для $Re=4$, $We=1,05$, $Fr=5,5$, на фиг. 1, *б* — для $Re=40$, $We=0,13$, $Fr=0,06$. На верхней половине изображено поле вектора скорости по сечению трубы, на нижней — изолинии функции тока.

На фиг. 1, *a* можно выделить в течении две зоны: область ядра течения — жидкость около оси трубы практически не движется, за исключением вихревого следа непосредственно за пузырем, который не так и велик; кольцевая область около стенок трубы, в которой скорость жидкости изменяется от единицы на стенке до нуля на ядре течения. Практически отсутствует переток жидкости из области до пузыря в пространство за ним. Картина течения остается такой же для больших чисел Рейнольдса. Так, при $Re=41$, $We=5,12$, $Fr=1,73$ только кормовая часть более выпукла и слегка уменьшился зазор между пузырем и стенкой трубы. Величина локального максимума функции тока за пузырем равна 0,21.

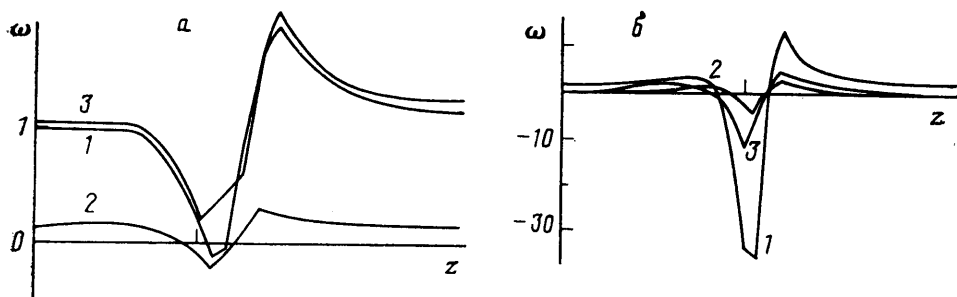
На фиг. 2, *a* цифрами 1 и 2 показаны распределения завихренности на стенке трубы, соответствующие указанным случаям. В створе пузыря происходит сначала уменьшение ω , что говорит об ускорении здесь жидкости, а затем, при переходе через узкий зазор, резкий рост его в расширяющемся течении. Вдали от пузыря ω выходит на постоянный уровень, отвечающий течению Пуазейля. Поскольку в прямоугольной декартовой системе координат $\tau \sim \partial v / \partial y \sim \omega$, где v — компонента скорости вдоль оси трубы, y — координата, перпендикулярная стенке, то из фиг. 2, *a* следует, что жидкость практически не перетекает за пузырь уже при $Re=4$ — трение τ всюду положительно, за исключением небольшого интервала в области узкого зазора между пузырем и стенкой, где оно имеет малые отрицательные значения. (Профили скорости здесь имеют разный характер выпуклости.) Увеличение We приводит к тому, что трение на стенке τ становится всюду положительным (кривая 3 на фиг. 2, *a* — $Re=4$, $We=1,12$, $Fr=75,6$). Значительное увеличение числа Fr при небольшом изменении We и практически не изменившихся картине течения и форме пузыря говорит о том, что сильно уменьшилось вязкое сопротивление пузыря набегающему потоку. Вблизи его поверхности формируется течение, обтекающее пузырь снизу, и сила вязкого сопротивления начинает действовать по направлению силы Архимеда. Всплытие в дальнейшем становится нестационарным.

Получить стационарные решения с $W=1,28$ не удалось. Для $Re=4$ и 40 уже при $We=0$ — сферический пузырь — получалась нестационарная задача: сила Архимеда и сила вязкого сопротивления пузыря имели одно и то же направление своего действия.

Для $\lambda=0,98$ при $W=1,75$ проведена серия расчетов с $Re=4$ и 40 для различных We . На фиг. 1, *б* представлена характерная картина течения для $Re=40$, $We=0,13$, $Fr=0,06$. При меньших значениях We (а также при $Re=4$) характер течения такой же. Некоторые различия связаны с тем, что изменяется форма пузыря. Структура течения — как и в случае $\lambda=0,8$: имеется ядро течения и кольцевая область около стенок трубы, в которой происходят существенные изменения скорости жидкости, но в этом случае она несколько тоньше. Кажущиеся малыми изменения в форме пузыря сильно отражаются на распределении касательного трения τ на стенке трубы. Имеющийся небольшой переток жидкости через узкий кольцевой зазор между стенками пузыря и трубы создает резкий скачок в трении τ . На фиг. 2, *б* представлены графики ω для трех случаев: $Re=4$, $We=0,012$, $Fr=0,006$; $Re=40$, $We=0,13$, $Fr=0,06$; $Re=40$, $We=0,01$, $Fr=0,011$. С ростом We при фиксированном Re уменьшаются переток жидко-



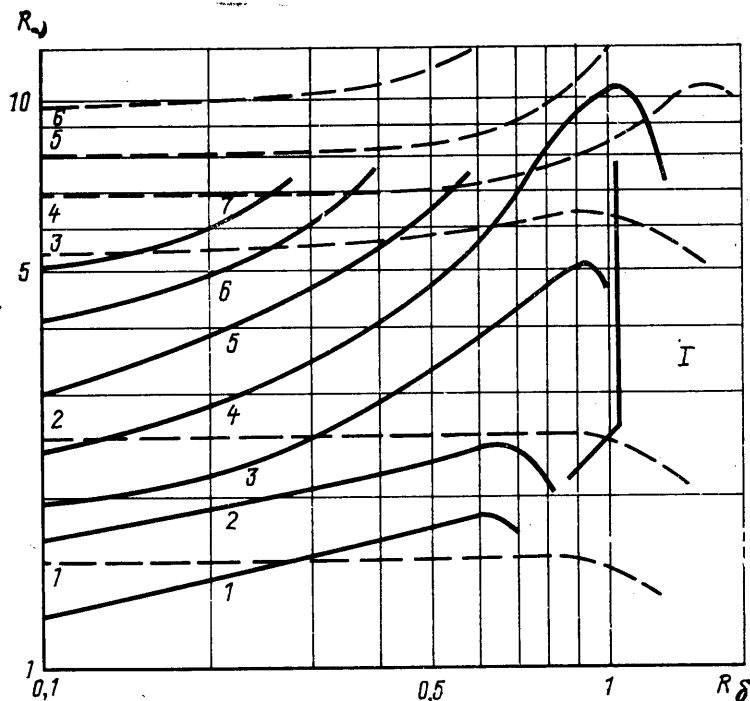
Фиг. 1



Фиг. 2

сти и отрицательный пик вихря ω . Для $W=1,85$ в целом получились аналогичные результаты. Но уже при $W=1,9$ для $We=0$ (сферический пузырь) было получено, что сила сопротивления действует по направлению силы Архимеда — пузырь обтекается снизу, будет нестационарный режим всплытия.

4. Обсуждение результатов. Проведенные расчеты показали, что оценки для величины W в целом подтвердились: в узком зазоре профиль скорости был близок к равномерному. Это означает отсутствие перетоков жидкости через кольцевой зазор между стенками пузыря и трубы. Что же касается вопроса о моделировании течения жидкости с пузырем в затопленном канале, то пока строгого ответа нет. Однако в этом случае не может быть такого течения, когда жидкость обтекает пузырь снизу, поскольку источником движения является сам пузырь. Он может «толкать» жид-



Фиг. 3

кость в канале, «тащить» ее за собой, всплывать в движущейся жидкости так, что в лучшем случае он не будет двигаться относительно окружающей его жидкости (и тогда его вязкое сопротивление будет равно нулю). Именно эти режимы были изучены численными расчетами.

С целью обобщения полученных результатов и сопоставления их с данными по всплытию пузырей в трубке с покоящейся жидкостью составим карту режимов течений аналогично [6]. На фиг. 3 представлены изолинии числа Фруда Fr в координатах $R_0 = a/(\sigma/\rho g)^{1/2}$, $R_\delta = a/(\nu^2/g)^{1/2}$. Поскольку $(R_0/R_\delta)^2 = M$ — число Моргана, то каждая жидкость в этих координатах изображается прямой под углом 45° к оси R_0 и можно легко оценить скорость всплытия пузыря размера a . Штрихом указаны линии $Fr = \text{const}$ для $\lambda = 0,8$ в тупиковом канале [2] (цифры на них соответствуют значениям const : 0,0006, 0,0023, 0,023, 0,058, 0,076, 0,117). Сплошные — данные расчета (0,14, 0,27, 0,7, 1,2, 1,8, 3,2, 4,5). В области I трение τ на стенке трубы положительно.

Деформация пузыря происходит в результате его вытягивания вдоль оси трубы с увеличением зазора между стенками пузыря и трубы. Числа Fr возрастают в соответствующих точках диаграммы в 30–100 раз. Поскольку $W = 1,25$ и $W = u_n/u$, где u_n — скорость течения жидкости на оси трубы на входе (и выходе), то $u_n = 1,25u$. В течении Пуазейля $u_c = u_n/2$. Тогда $u_c = 0,625u$, т. е. скорость всплытия пузыря здесь больше среднерасходной. Из определения чисел Фруда имеем $u_0/u = (Fr_0/Fr)^{1/2}$, где Fr_0 — число Фруда в случае тупикового канала. Так как $Fr/Fr_0 \sim 30-100$, то $u/u_0 \sim 6-10$. Рассмотрим $u_0 + u_c = u_0 + 0,625u = 4,75 u_0$ для $u/u_0 = 6$, т. е. $u_0 + u_c = 4,75 u_0 < u = 6u_0$ — скорость всплытия u больше суммы среднерасходной прокачивания u_c и скорости всплытия в покоящейся жидкости. Таким образом, $u_c + u_0 < u < u_n$. Эти неравенства остаются справедливыми и для $\lambda = 0,98$, $W = 1,8$, где $Fr/Fr_0 > 100$. Учитывая, что u_0 очень мало в этом случае [2], скорость всплытия u практически диктуется величиной u_c .

В исходной физической постановке движение жидкости происходит под действием силы Архимеда пузырька и, таким образом, скорость всплытия u и профиль скорости (а значит, и расход) в сечениях входа и выхода трубы будут величинами, определяемыми перепадом давлений Δp на ее концах (задача с заданным перепадом давлений). В данной работе исследуются течения при заданном расходе и профиле скорости жидкости на входе и выходе трубки. Поскольку

$$\Delta p = - \frac{2}{\text{Re}} \int_{\omega} dS$$

где S — поверхность трубы, то по полученным распределениям ω можно легко оценить величину Δp и провести сопоставление результатов расчетов с экспериментами в погруженном канале.

Численные решения получены с $l=10$ и соответствуют всплытию пузырей в трубках диаметром до 2–3 капиллярных постоянных жидкости, когда трение о стенки много меньше силы Архимеда. Длина трубки в данной постановке должна быть такой, чтобы поставленные условия на входе-выходе не оказывали существенного влияния на картину течения около пузыря. Наличие градиентного потока может изменить зону распространения возмущений от пузыря по сравнению с [2]. Тот факт, что картины течений практически одинаковы для разных Re и We на расстоянии диаметра трубки от поверхности пузыря, косвенно подтверждает возможность указанного выбора величины l .

Образование вихря в кормовой части пузыря (да и в лобовой) обусловлено торможением Пуазейлевского потока в центральной его части ($u_n > u$). Этот вихрь может быть достаточно большим и интенсивным, как видно на фиг. 2, а для $W=1,75$, если пузырь практически перекроет сечение канала. Наиболее выгодным с точки зрения затрат на осуществление течения в погруженном канале будет случай, когда профиль вихря (а значит, и трения) на стенке трубы будет, как на фиг. 1, б для кривой 3: суммарные затраты, пропорциональные площади под кривой, равны затратам на осуществление чисто Пуазейлевского течения, как будто пузыря и нет вовсе. При меньших u_n пузырь всплывет в жидкости и будет переток ее через зазор с большим местным сопротивлением [2], при больших u_n пузырь будет обтекаться снизу, опять возникнет переток, но в другую сторону, приводящий к нестационарному всплытию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Oktay S. Departure from natural convection (DNC) in low-temperature boiling heat transfer encountered in cooling micro-electronic LSI devices // Heat transfer. 1982. Proc. 7th Int. Heat Transfer Conf. Minchen. Sept. 1982. Washington au. a. o.: Hemisphere. Publ. Co., 1982. P. 113–118. V. 4.
2. Волков П. К. Всплытие газового пузыря в трубе, заполненной вязкой жидкостью // ПМТФ. 1989. № 6. С. 98–105.
3. Волков П. К., Кузнецов Б. Г. Численное решение задачи о стационарном обтекании вязкой жидкостью газовой полости в трубе // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1982. Т. 13. № 5. С. 20–31.
4. Christov C. I., Volkov P. K. Numerical investigation of the steady viscous flow past a stationary deformable bubble // J. Fluid Mech. 1985. V. 158. P. 341–364.
5. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
6. Волков П. К., Чиннов Е. А. Стационарное всплытие одиночного пузыря в неограниченном объеме жидкости // ПМТФ. 1989. № 1. С. 94–99.

Новосибирск

Поступила в редакцию
19.XII.1989