

УДК 532.529:537.8:642.13

© 1991 г.

Н. Н. КИЗИЛОВА

О ВЛИЯНИИ РАДИАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ЭРИТРОЦИТОВ НА ИХ ОСЕДАНИЕ В ТРУБКЕ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Внешнее магнитное поле, действуя на оседающие эритроциты, которые являются слабонамагничивающимися частицами, вызовет их перемещение в радиальном и аксиальном по отношению к трубке направлениях. При гравитационном оседании, когда отсутствует сдвиговое течение суспензии, можно выделить два механизма сближения частиц: за счет разности в скоростях оседания агрегатов разного объема и за счет флуктуаций скорости [1]. При наличии внешнего магнитного поля сюда следует добавить также сближение агрегатов за счет поперечной составляющей пондеромоторной силы. Таким образом, при оседании в магнитном поле можно ожидать ускорение оседания вследствие агрегации клеток в плоскости поперечного сечения.

Оседание эритроцитов как слабонамагничивающихся агрегирующих частиц в осесимметричном магнитном поле соленоида рассматривалось в [2]. Предполагалось, что эритроциты равномерно распределены в плоскости поперечного сечения трубки в течение всего процесса седиментации. Было показано, что для тонкой длинной трубки, размещенной вдоль оси соленоида, действием поперечной составляющей пондеромоторной силы на оседающие агрегаты можно пренебречь только в случае достаточно длинного соленоида. В [3] было показано, что с помощью осесимметричного магнитного поля можно стабилизировать неустойчивое гравитационное оседание эритроцитов. Таким образом можно повысить диагностическую точность широко используемого в медицинской практике теста РОЭ.

Ниже исследуется влияние поперечной составляющей пондеромоторной силы на агрегацию и оседание эритроцитов. Предполагается, что единственным механизмом действия постоянного магнитного поля на кровь является намагничивание эритроцитов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим оседание частиц в тонкой длинной трубке радиуса R и длины L ($R/L \ll 1$) во внешнем осесимметричном магнитном поле $\mathbf{H}(r, x) = H_r(r, x)\mathbf{e}_r + H_x(r, x)\mathbf{e}_x$. Здесь \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_x — единичные векторы в цилиндрической системе координат, связанной с трубкой. Уравнения квазистационарного движения суспензии крови как двухфазной среды в пренебрежении силами инерции по сравнению с вязкими имеют вид [2]

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r N v^1 + \frac{\partial}{\partial x} N u^1 = G \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r C v^1 + \frac{\partial}{\partial x} C u^1 = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [C u^1 + (1-C) u^2] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r [C v^1 + (1-C) v^2] = 0 \quad (1.3)$$

$$C \frac{\partial p}{\partial x} = \chi_s C \Psi_x - D(u^1 - u^2) + \rho_s g C \quad (1.4)$$

$$(1-C) \frac{\partial p}{\partial x} = \chi_f (1-C) \Psi_x + D(u^1 - u^2) + \rho_f g (1-C) \quad (1.5)$$

$$C \frac{\partial p}{\partial r} = \chi_s C \psi_r - D(v^1 - v^2) \quad (1.6)$$

$$(1-C) \frac{\partial p}{\partial r} = \chi_f (1-C) \psi_r + D(v^1 - v^2) \quad (1.7)$$

$$\psi_x = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (H^2), \quad \psi_r = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (H^2)$$

Здесь (v^1, u^1) и (v^2, u^2) — скорости движения, ρ_s и ρ_f — истинные плотности, χ_s и χ_f — удельные магнитные восприимчивости фаз эритроцитов и плазмы соответственно; C — объемная, а N — числовая концентрации эритроцитов в суспензии, ψ_r и ψ_x — компоненты вектора пондеромоторной силы в цилиндрической системе координат, $g e_x$ — вектор силы тяжести, D — феноменологический коэффициент, обобщающий стоксово сопротивление движущейся частицы, G — феноменологическая функция, характеризующая скорость образования агрегатов. С помощью теории размерностей для D и G получены выражения [1]

$$D = D_0 C (1-C)^{-2,5}, \quad D_0 = \eta w^{-7/5}, \quad G = -k C^2 w^{-2} \quad (1.8)$$

где $w = C/N$ — средний объем агрегата, k — постоянная, характеризующая скорость образования агрегатов и определяемая из экспериментов, η — вязкость плазмы. Все обозначения совпадают с соответствующими из [2, 3].

Исключая в (1.4)–(1.7) производные от давления и пренебрегая действием магнитного поля на движение плазмы (поскольку $\chi_f/\chi_s \ll 1$), получим

$$v^1 = \Omega_r, \quad u^1 = \Omega_x, \quad \Omega_r = \delta \chi \psi_r C (1-C)^2 D^{-1} \quad (1.9)$$

$$\Omega_x = [\delta \chi \psi_x + \delta \rho g] C (1-C)^2 D^{-1}, \quad \delta \chi = \chi_s - \chi_f, \quad \delta \rho = \rho_s - \rho_f$$

Будем считать, что агрегация за счет радиального сближения эритроцитов существенна, если за время T оседания частиц на величину порядка L их радиальное смещение δ будет порядка R . Поскольку $\delta \sim |v^1| T$, $T \sim L/|u^1|$, то это условие с учетом (1.9) имеет вид

$$\frac{\delta}{R} \sim \frac{L |\Omega_r|}{R |\Omega_x|} = \frac{L \delta \chi |\psi_r|}{R |g \delta \rho + \psi_x \delta \chi|}$$

Будем рассматривать δ/R как безразмерный параметр, характеризующий агрегацию за счет сближения в плоскости поперечного сечения трубки. Поскольку всякое движение эритроцитов плоскости сечения, ограниченной стенками трубки, приведет к усилению агрегации, для G можно положить вместо (1.8)

$$G = -k C^2 w^{-2} (1 + O(\delta/R))$$

Для тонкой трубки ($R/L \ll 1$) такое магнитное сгребание частиц существенно. Для достаточно широкой трубки ($R/L \gg 1$) значение $\delta/R \ll 1$ и агрегацией в поле поперечной силы можно пренебречь.

Для определенности будем использовать осесимметричное магнитное поле соленоида длины $2l$ с круговым поперечным сечением. Поперечная составляющая напряженности магнитного поля определяется выражением [4]

$$H_r = 0, 2 l n \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{t}{r}} [C_1 (k_1^2) - C_2 (k_2^2)] dt$$

$$C_i(k_i^2) = [F(k_i^2) - E(k_i^2)] \frac{2}{k_i} - k_i F(k_i^2) \quad (i=1; 2) \quad (1.10)$$

$$k_1^2 = \frac{4tr_1}{(t+r_1)^2 + (x-l)^2}, \quad k_2^2 = \frac{4tr_2}{(t+r_1)^2 + x^2}$$

Здесь F и E — полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода, r_1 и r_2 — внутренний и внешний радиусы обмотки, n — число витков на единицу длины, I — ток в обмотке. Ось соленоида совпадает с осью x , геометрический центр имеет координаты $x=0$, $r=0$.

Расчеты по (1.10) показывают, что в каждом поперечном сечении при условии $R/r_1 \leq 1$ в первом приближении $\psi_r = H_r \partial H_r / \partial r \sim r$. Положим

$$\psi_r = -hr \quad (h > 0) \quad (1.11)$$

Аналогичные расчеты для продольной составляющей поперечной силы были выполнены в [2]. Получено, что вблизи оси для $r \leq R \ll r_1$ можно положить $\psi_x = q + px$. Постоянные q и p определяются взаимным расположением соленоида и седиментационной трубки.

2. Оседание эритроцитов. Квазиодномерное приближение. Задачу о седиментации эритроцитов в тонкой длинной трубке рассмотрим в квазиодномерном приближении. Для этого уравнения (1.1)–(1.5) осредним по сечению трубки.

Можно показать, что решение (1.1)–(1.7) в случае $\psi_x = -g\delta\rho/\delta\chi$, $\psi_r = -r$ (это соответствует движению только в радиальном направлении) имеет вид

$$C(t, r, x) = C(t, x) \quad (r \leq r_s); \quad C(t, r, x) = 0 \quad (r_s < r \leq R) \quad (2.1)$$

При этом осуществляется равномерное распределение агрегатов в зоне $r \in [0; r_s]$, поэтому можно положить

$$N(t, r, x) = N(t, x) \quad (r \leq r_s); \quad N(t, r, x) = 0 \quad (r_s < r \leq R)$$

Образуются зоны эритроцитов и чистой плазмы, граница $r=r_s$ между которыми перемещается со скоростью

$$U_r = v_r^1|_{r=r_s} = \delta\chi\psi_r C(1-C)^2 D^{-1}$$

Зададим $C(t, r, x)$ и $N(t, r, x)$ в виде (2.1) и для оседания частиц в поле $\psi_x \neq 0$, $\psi_r = -r$. Тогда можно определить средние значения параметров следующим образом:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{r_s^2} \int_0^{r_s} r f dr \quad (2.2)$$

При таком способе осреднения $\langle C^p \rangle = \langle C \rangle^p$ и $\langle D(C, N) \rangle = D(\langle C \rangle, \langle N \rangle)$. Система (1.1)–(1.5) после осреднения и тождественных преобразований примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle C \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \langle C \rangle \langle u^1 \rangle &= \left\{ \frac{2}{r_s} \frac{\partial r_s}{\partial x} \langle C \rangle (\langle u^1(t, x, r_s) \rangle - \langle u^1 \rangle) \right\} - \\ &- \frac{2}{r_s} C(t, x, r_s) v^1(t, x, r_s) - \frac{2}{r_s} \frac{\partial r_s}{\partial t} (\langle C \rangle - C(t, x, r_s)) \\ \frac{\partial}{\partial x} [\langle C \rangle \langle u^1 \rangle + (1 - \langle C \rangle) \langle u^2 \rangle] &= \left\{ \frac{2}{r_s} \frac{\partial r_s}{\partial x} [\langle C \rangle \langle u^1(t, x, r_s) \rangle - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\langle u^1 \rangle + (1 - \langle C \rangle) (u^2(t, x, r_s) - \langle u^2 \rangle) \Big\} - \\
& - \frac{2}{r_s} [C(t, x, r_s) v^1(t, x, r_s) + (1 - C(t, x, r_s)) v^2(t, x, r_s)] \\
& \langle C \rangle \frac{\partial}{\partial x} \langle p \rangle - \chi_s \langle \psi_x \rangle \langle C \rangle + D(\langle C \rangle, \langle N \rangle) (\langle u^1 \rangle - \langle u^2 \rangle) - \\
& - \rho_s g \langle C \rangle = \left\{ \frac{2}{r_s} \frac{\partial r_s}{\partial x} \langle C \rangle (p(t, x, r_s) - \langle p \rangle) \right\} \quad (2.3) \\
& (1 - \langle C \rangle) \frac{\partial}{\partial x} \langle p \rangle - \chi_f \langle \psi_x \rangle (1 - \langle C \rangle) - D(\langle C \rangle, \langle N \rangle) (\langle u^1 \rangle - \langle u^2 \rangle) - \\
& - \rho_f g (1 - \langle C \rangle) = \left\{ \frac{2}{r_s} \frac{\partial r_s}{\partial x} (1 - \langle C \rangle) (p(t, x, r_s) - \langle p \rangle) \right\} \\
& \frac{\partial}{\partial t} \langle N \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \langle N \rangle \langle u^1 \rangle + k \langle N \rangle^2 \Delta(r_s, x) = \\
& = \frac{2}{r_s} \frac{\partial r_s}{\partial t} (N(t, x, r_s) - \langle N \rangle) + \left\{ \frac{2}{r_s} \frac{\partial r_s}{\partial x} \langle N \rangle (u^1(t, x, r_s) - \langle u^1 \rangle) \right\} - \\
& - \frac{2}{r_s} N(t, x, r_s) v^1(t, x, r_s) \\
& \Delta(r_s, x) = \frac{2}{r_s^2} \int_0^{r_s} \left(1 + O \frac{\delta}{R} \right) r dr
\end{aligned}$$

В [1] рассматривалось приближенное решение, соответствующее $G = -kN^2 C_0 / C$, которое качественно, а при достаточно больших значениях C_0 и количественно соответствует точному. Если характеризовать изменения агрегации за счет сближения частиц в плоскости сечения на протяжении всего времени оседания параметром δ , то скорость агрегации в магнитном поле можно определить параметром C_0^* , имеющим смысл начальной концентрации частиц, оседающих в трубке радиуса $R - \delta$. Из условия сохранения массы эритроцитов находим

$$C_0^* = C_0 (1 - 2\delta/R + \delta^2/R^2)^{-1}$$

В случае малой поперечной силы, когда можно пренебречь величинами $O(\delta^2/R^2)$, имеем

$$C_0^* = C_0 \left(1 + \frac{2\delta}{R} \right), \quad \Delta(r_s, x) = \frac{2}{r_s^2} \int_0^{r_s} \left(1 + \frac{2\delta(r, x)}{R} \right) r dr$$

Система упрощается, если $\partial r_s / \partial x = 0$. Поскольку в общем случае $\partial r_s / \partial x \neq 0$, проведем оценку слагаемых, стоящих в правой части (2.3). Из (1.3) - (1.7) и (2.1) следует:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = [C(t, r_s, x) \chi_s + (1 - C(t, r_s, x)) \chi_f] \psi_r \quad (0 \leq r \leq r_s)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \chi_f \psi_r \quad (r_s < r \leq R)$$

$$|\langle p \rangle - p(t, r_s, x)| = \frac{1}{4} r^2 (C(t, r_s, x) \chi_s + (1 - C(t, r_s, x)) \chi_f) h$$

$$u^1 = C(1 - C)^2 (1 + \gamma(x, r)) g \delta \rho D^{-1}, \quad \gamma(x, r) =$$

$$= \chi_s \psi_x(x, r) / g \delta \rho \quad (\chi_f / \chi_s \ll 1)$$

Оценка этих соотношений при $R/L \ll 1$, $\chi_f/\chi_s \ll 1$, $C_0 < 1$, $|\psi_r|/|\psi_x| \ll 1$ дает

$$\frac{|\langle p \rangle - p(t, r_s, x)|}{\chi_s |\psi_x| \langle C \rangle} \sim \frac{R}{L} \frac{Rh}{|\psi_x|} \frac{C_0 + (1 - C_0) \chi_f / \chi_s}{2} \ll 1$$

Если для любого $r_a \in [0; r_s]$ выполняется $|\gamma(r_a) - \gamma(r_s)| \ll |\gamma(r_s)|$, то

$$\frac{|\langle u^1 \rangle - u^1(t, r_s, x)|}{u^1(t, r_s, x)} = \frac{|\langle \gamma \rangle - \gamma(x, r_s)|}{u^1(t, r_s, x)} \ll 1 \quad (2.4)$$

Таким образом, если $\psi_x(x, r)$ мало меняется вдоль $r \in [0; R]$ так, что выполнено (2.4) и $|\psi_r| \leq |\psi_x|$, то правые части (2.3), стоящие в фигурных скобках, малы по сравнению со слагаемыми, стоящими в левой части. В результате (2.3) примет вид ($N(t, r_s, x) = \langle N \rangle$, $C(t, r_s, x) = \langle C \rangle$ и значки осреднения опущены)

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} N u^1 = -k N^2 \Delta + 2 \delta \chi \frac{N h}{D} (1 - C)^2$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} C u^1 = 2 \delta \chi \frac{C h}{D} (1 - C)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [C u^1 + (1 - C) u^2] = 0 \quad (2.5)$$

$$C \frac{\partial p}{\partial x} - \chi_s \psi_x C + D(u^1 - u^2) - \rho_s g C = 0$$

$$(1 - C) \frac{\partial p}{\partial x} - \chi_f \psi_x (1 - C) - D(u^1 - u^2) - \rho_f g (1 - C) = 0$$

В [2] рассматривался случай $C = C(x)$ и для средних значений полагалось

$$\langle f \rangle = \frac{2}{R^2} \int_0^R r f dr$$

Было показано, что этот случай имеет место при условии $\Omega_r/\Omega_x \ll R/L$ на компоненты пондеромоторной силы. Полученная выше система (2.5) отличается от соответствующей из [2] слагаемыми, зависящими от h в правых частях уравнений и имеющими смысл источников. Они появляются вследствие уменьшения при осреднении по (2.2) площади, занимаемой первоначально эритроцитами. В случае $\psi_r = 0$, значения $h = 0$, $\Delta = 1$ и система (2.5) совпадает с полученной в [2]. В случае $\psi_r = 0$, $\psi_x = 0$ (2.5) совпадает с соответствующей формулой, полученной для гравитационного оседания в [1].

В безразмерных переменных (2.5) имеет вид

$$\frac{\partial C}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X} C U^1 = 2 \lambda \kappa h C (1 - C)^{4,5}$$

$$\frac{\partial W}{\partial T} + U^1 \frac{\partial W}{\partial X} = K C \Delta \quad (2.6)$$

$$U^1 = (1 - C)^{4,5} W^{2/5} (1 + \kappa \psi_x^0)$$

$$X = \frac{x}{L}, \quad T = \frac{t}{T^*}, \quad T^* = \frac{L}{u_0}, \quad u_0 = \frac{g\delta\rho w_0^{3/2}}{\eta}$$

$$W = \frac{w}{w_0}, \quad U^1 = \frac{u^1}{u_0}, \quad K = \frac{kL}{u_0 w_0}, \quad \varkappa = \frac{\delta\chi\psi_x^\circ}{\delta\rho g}, \quad \psi_x^\circ = \frac{\psi_x}{\psi_x^*}$$

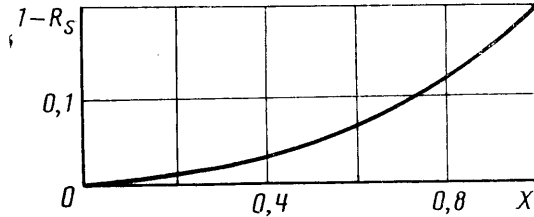
$$\psi_r^\circ = \frac{\psi_r}{\psi_r^*}, \quad \lambda = \frac{\psi_r^*}{\psi_x^*}$$

Здесь ψ_r^* и ψ_x^* — характерные значения ψ_r и ψ_x . Уравнения характеристик и условия на них для системы (2.6) имеют вид

$$\frac{dX}{dT} = (1-C)^{4,5} W^{7/2} (1 + \varkappa\psi_x^\circ), \quad \frac{dW}{dT} = KC\Delta \quad (2.7)$$

$$\frac{dX}{dT} = (1-C)^{3,5} W^{7/2} (1 - 5,5C) (1 + \varkappa\psi_x^\circ)$$

$$\frac{2}{W} \left(\frac{dW}{dT} - KC\Delta \right) - \frac{13,5}{1-C} \left\{ \frac{dC}{dT} + C(1-C)^{4,5} (-2\lambda\varkappa h + \varkappa W^{7/2} \frac{d\psi_x^\circ}{dX}) \right\} = 0 \quad (2.8)$$



Фиг. 1

Если функция $\psi_r(r)$ отлична от линейной и в плоскости сечения трубки осуществляется такое распределение агрегатов, что

$$J = |\langle C \rangle - C(t, r_s, x)| / C(t, r_s, x) \geq 1$$

то осреднение в смысле (2.2) невозможно, $\langle f(C) \rangle \neq f(\langle C \rangle)$. Если же $J \ll 1$, то, пренебрегая величинами порядка J , можно проводить осреднение по (2.2). В этом случае $\Delta = \Delta(R_s)$ и для решения необходимо задать зависимость $r_s/R = R_s(T, X)$, которая может быть определена из эксперимента или разумных предположений. Так, на фиг. 1 представлена расчетная зависимость перемещения разрыва $R = R_s$ от координаты X плоскости поперечного сечения трубки за $t=1$ ч оседания в случае $\psi_x = -g\delta\rho/\delta\chi$. При расчетах использовались числовые значения ψ_r , подсчитанные по (1.10) для соленоида с параметрами $l=L, I, n, r_1, r_2$, обеспечивающими $\varkappa \sim 1$.

Анализ (2.7) показывает, что в области, ограниченной осью ординат, характеристикой первого семейства (2.7), проходящей через точку $T=0, X=0$, и первой характеристикой второго семейства (2.8), проходящей через точку $T=0, X=1$, выполняются одновременно

$$\frac{dW}{dT} = KC\Delta, \quad \frac{dX}{dT} = (1-C)^{4,5} W^{7/2} (1 + \varkappa q - \varkappa pX)$$

$$\frac{dC}{dT} = C(1-C)^{4,5} (2\lambda\varkappa h + p\varkappa W^{7/2}) \quad (2.9)$$

$$\frac{dX}{dT} = -(5,5C-1)(1-C)^{3,5}W^{*3}(1+\kappa q-\kappa pX)$$

Из (2.9) видно, что наличие горизонтальной сдвигающей силы приведет к росту концентрации и среднего объема агрегатов по сравнению со случаем $\psi_r=0$. Влияние поперечной силы характеризуется параметром $\Delta > 1$. Скорость агрегации в магнитном поле может быть определена как $K^* = K\Delta$. Количественные данные об оседании и агрегации в магнитном поле можно получить путем численных расчетов по (2.9) с краевыми условиями

$$C(0, X) = C_0, \quad W(0, X) = 1, \quad U^1(T, L) = 0$$

3. Точное решение двумерной задачи и квазиодномерное приближение. Исследуем решение (1.1)–(1.7) в случае, когда

$$Cu^1 + (1-C)u^2 = \varphi_1(r)$$

$$[Cv^1 + (1-C)v^2]r = \varphi_2(x)$$

где $\varphi_1(r)$ и $\varphi_2(x)$ – некоторые функции своих аргументов. В этом случае (1.3) удовлетворяется автоматически. В силу условий непротекания суспензии через дно и стенки трубки и ограниченности скорости при $r=0$ получим $\varphi_1=0$ и $\varphi_2=0$ и тогда

$$Cu^1 + (1-C)u^2 = 0, \quad Cv^1 + (1-C)v^2 = 0 \quad (3.1)$$

В этом случае система (1.1), (1.2), (1.4)–(1.7), (3.1) является переопределенной. Из (1.4)–(1.7), (3.1), предполагая непрерывность $\partial p/\partial x$ и $\partial p/\partial r$, получим уравнение для концентрации C

$$\begin{aligned} \psi_r \delta \chi \frac{\partial C}{\partial x} &= \psi_x (1+\beta) \delta \chi \frac{\partial C}{\partial r} - (\chi_s C + \chi_r (1-C)) \left(\frac{\partial \psi_r}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial r} \right) \\ \beta &= g \delta \rho / \psi_x \delta \chi \end{aligned} \quad (3.2)$$

Если $H_r(x, r)$, $H_x(x, r)$ – непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов, то (3.2) примет вид

$$\frac{\partial C}{\partial r} = \frac{\psi_r}{(1+\beta)\psi_x} \frac{\partial C}{\partial x} \quad (3.3)$$

Из (1.1), (1.2) и (3.1) получим систему для C и w

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \left(v^1 + C \frac{\partial v^1}{\partial C} \right) \frac{\partial C}{\partial r} + C \frac{\partial v^1}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial r} + \\ + \left(u^1 + C \frac{\partial u^1}{\partial C} \right) \frac{\partial C}{\partial x} + C \frac{\partial u^1}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} &= f_1 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + v^1 \frac{\partial w}{\partial r} + u^1 \frac{\partial w}{\partial x} &= f_2 \end{aligned}$$

$$v^1 = A\psi_r, \quad u^1 = A(1+\beta)\psi_x, \quad A = (1-C)^{4,5}W^{*3}\delta\chi\eta^{-1} \quad (3.4)$$

$$f_1 = -Cv^1 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\psi_r} \frac{\partial \psi_r}{\partial r} \right) - \frac{Cu^1}{\psi_x(1+\beta)} \frac{\partial \psi_x}{\partial x}$$

$$f_2 = kC(1+O(\delta/R))$$

Из этой системы также можно определить C и w . Характеристические

поверхности системы (3.4) и условия на них имеют вид

$$\frac{dw}{dt} = f_2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v^1 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + u^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{2}{w} \left(\frac{dw}{dt} - f_2 \right) - \frac{13,5}{1-C} \left(\frac{dC}{dt} - f_1 \right) = 0 \quad (3.6)$$

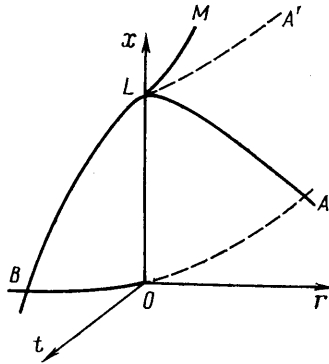
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1-5,5C}{1-C} \left(v^1 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + u^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0$$

Зададим (3.5) и (3.6) семействами бихарактеристик

$$dt = \frac{dr}{v^1} = \frac{dx}{u^1} \quad (3.7)$$

$$dt = \frac{1-C}{1-5,5C}, \quad \frac{dr}{v^1} = \frac{1-C}{1-5,5C} \frac{dx}{u^1} \quad (3.8)$$

Пусть OA и OB — линии пересечения характеристической поверхности семейства (3.7), проходящей через начало координат, с координат-



Фиг. 2

ными плоскостями xt , xr соответственно (фиг. 2). Пусть LM и LB — линии пересечения характеристической поверхности семейства (3.8), проходящей через $x=L$, что соответствует дну седиментационной трубки. В плоскости xr характеристики обоих семейств совпадают и задаются соотношением

$$\left(\frac{dx}{dr} \right)_{I,II} = \frac{\psi_x(1+\beta)}{\psi_r} \quad (3.9)$$

На фиг. 2 сплошной линией изображен случай $\psi_x(1+\beta)\psi_r < 0$, а штриховой — $\psi_x(1+\beta)\psi_r > 0$. Характеристики уравнения (3.3)

$$\left(\frac{dx}{dr} \right)_{III} = -\frac{\psi_r}{\psi_x(1+\beta)}, \quad \frac{dt}{dx} = 0, \quad \frac{dt}{dr} = 0$$

В плоскости xr характеристики (3.3) и (3.4) представляют собой ортогональные семейства кривых, поскольку

$$\left(\frac{dx}{dr} \right)_{I,II} \left(\frac{dx}{dr} \right)_{III} = -1$$

Через каждую точку области V^* , ограниченной участками поверхностей BOA , BLM и участками координатных плоскостей xt , xr , проходят характеристические поверхности семейств (3.7) и (3.8), поэтому в области V^* выполняются одновременно (3.5) и (3.6). Следовательно, в области V^*

$$\frac{dC}{dt} = -C(1-C)^{4,5} W^{3/2} f(x, r) \frac{\delta\chi}{\eta} \quad (3.10)$$

$$\frac{dw}{dt} = kC \left(1 + \frac{\alpha\psi_r}{(1+\beta)\psi_x} \right) \quad (3.11)$$

$$f(x, r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r\psi_r + \frac{\partial}{\partial x} \psi_x, \quad \alpha = \frac{L}{R}$$

Из (3.7), (3.10) для области V^* получим

$$\frac{dC}{dt} = \frac{1-5,5C}{1-C} \left[v^1 \frac{\partial C}{\partial r} + u^1 \frac{\partial C}{\partial x} \right]$$

$$\frac{\partial C}{\partial r} = \frac{C(1-C)}{5,5C-1} \frac{f(x, r)}{\psi_r} \frac{\eta}{\delta\chi} - \frac{\psi_x(1+\beta)}{\psi_r} \frac{\partial C}{\partial x} \quad (3.12)$$

Пусть LA — линия пересечения характеристической поверхности (3.3) с плоскостью xr , проходящая через $x=L$. Тогда в области OAL выполняются одновременно (3.3) и (3.12). Полагая, что $C(t, x, r)$ — непрерывно дифференцируемая функция, получим условие совместности системы (1.1), (1.2), (1.4)–(1.7), (3.1)

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[f(x, r) \frac{\psi_x(1+\beta)}{\psi_r^2 + \psi_x^2(1+\beta)^2} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[f(x, r) \frac{\psi_r}{\psi_r^2 + \psi_x^2(1+\beta)^2} \right]$$

Поскольку $f(x, r) = \text{div } \psi$, то это условие можно записать

$$\text{rot } \Phi = 0 \quad (3.13)$$

$$\Phi = f(x, r) \cos \varepsilon e_r + f(x, r) \sin \varepsilon e_x$$

$$\psi_m = \psi_r e_r + \psi_x(1+\beta) e_x$$

Здесь ε — угол между вектором ψ_m и ортом e_r .

Поскольку для осредненной квазиодномерной модели движение суспензии также описывается, на основе системы (1.1)–(1.7), при $v^1=0$, $v^2=0$, то условие (3.13) определяет тот набор конфигураций внешнего магнитного поля, при котором решение квазиодномерной задачи совпадает с точным решением двумерной осесимметричной задачи.

Так, (3.13) справедливо в случае $\psi_r=0$, $\psi_x=0$, а (3.7) и (3.8) совпадают с соответствующими уравнениями из [1].

В случае $\psi_r \approx 0$, $\psi_x \approx x \text{ const}$ (3.13) справедливо, а (3.7) и (3.8) совпадают с соответствующими уравнениями из [2].

В случае $\psi_r = -hr$, рассматривавшемся в настоящей работе, условие (3.13) выполняется для $\psi_x = q - hx$.

В безразмерных переменных характеристики системы (3.4) и условия на них в области V^* примут вид ($R^0 = r/R$)

$$\frac{dC}{dT} = -\kappa C(1-C)^{4,5} W^{3/2} \left(\alpha\lambda \frac{\psi_r^\circ}{R^0} + \alpha\lambda \frac{\partial \psi_r^\circ}{\partial R^0} + \frac{\partial \psi_x^\circ}{\partial X} \right)$$

$$\frac{dR^0}{dT} = \alpha\lambda\kappa(1-5,5C)(1-C)^{3,5} W^{3/2} \psi_r^\circ \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dT} &= (1+\kappa)(1-5,5C)(1-C)^{3,5}W^{7/2}\psi_x^\circ \\ \frac{dW}{dT} &= KC \left(1 + O \left(\frac{\alpha\lambda|\psi_r^\circ|}{|(1+\kappa)\psi_x^\circ|} \right) \right) \\ \frac{dR^\circ}{dT} &= \alpha\lambda\kappa(1-C)^{4,5}W^{7/2}\psi_r^\circ, \\ \frac{dX}{dT} &= (1+\kappa)(1-C)^{4,5}W^{7/2}\psi_x^\circ \end{aligned} \quad (3.15)$$

Сравнивая (3.14), (3.15) с соответствующими выражениями из [2], получим, что поперечная сила $\psi_r \neq 0$ приведет к ускорению агрегации и оседания. Степень ускорения характеризуется параметром $K^\circ = O(\alpha\lambda|\psi_r^\circ|/|(1+\kappa)\psi_x^\circ|)$, который определяется как изменение скорости агрегации в магнитном поле. Количественные данные об агрегации и оседании в магнитном поле могут быть получены путем численных расчетов по (3.14), (3.15). Если внешнее магнитное поле таково, что выполняется (3.13), то решение квазиодномерной задачи совпадает с точным решением двумерной задачи. При этом параметр K^* является осредненным по (2.2) аналогом параметра $(K^\circ+1)K$.

Автор выражает глубокую признательность С. А. Региреру за внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лосев Е. С. Моделирование оседания агрегирующих частиц // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 3. С. 71–78.
2. Сивакова Н. Н. Влияние магнитного поля на оседание агрегирующих слабомагнитных частиц // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 5. С. 77–85.
3. Кизилова Н. Н. Устойчивость оседания эритроцитов крови в постоянном магнитном поле // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 6. С. 66–70.
4. Карасик В. Р. Физика и техника сильных магнитных полей. М.: Наука, 1964. 347 с.

Харьков

Поступила в редакцию
26.VI.1990