

УДК 532.527.2.013.4 : 531.51

© 1991 г.

В. М. ЧЕРНЯВСКИЙ, Ю. М. ШТЕМЛЕР

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА МЕЖДУ
НЕЗАКРЕПЛЕННЫМИ ЦИЛИНДРАМИ С УЧЕТОМ
САМОГРАВИТАЦИИ**

Рассматривается свободное плоское движение гравитирующей системы двух незакрепленных вращающихся цилиндров и несжимаемой жидкости между ними. Не возмущенное состояние системы определяется вязким течением Куэтта между соосными цилиндрами. Исследование устойчивости центрального положения цилиндров проводится в рамках уравнений невязкой жидкости во вращающейся системе координат, в которой течение предполагается потенциальным. Найден критический диапазон параметров и спектральные характеристики системы. Качественный вид полученных нейтральных кривых определяется величиной единственного параметра задачи ρ^* , равного отношению плотности внутреннего цилиндра к плотности жидкости. Отмечается, что если $\rho^* \rightarrow 1$, то при сколь угодно малых значениях угловых скоростей вращения цилиндров ими, вообще говоря, нельзя пренебречь при расчете собственных колебаний системы. Показано, что если $\rho^* > 1$, то в отсутствие гравитации радиальный люфт осей цилиндров приводит к росту возмущений в устойчивой по критерию Рэлея области.

Здесь в отличие от классической задачи устойчивости течения Куэтта [1] рост возмущения связан с возможностью свободного движения центров вращающихся цилиндров в плоскости перпендикулярной оси вращения. Указанный механизм неустойчивости может проявляться при движении твердой частицы в центрифуге [2] и шипа в гидродинамическом подшипнике [3-5], а также в лабораторных установках для исследования течения Куэтта при наличии радиального люфта осей цилиндров. Исследование таких систем с учетом самогравитации представляет интерес в связи с возможными геофизическими приложениями [6].

1. Рассматривается течение Куэтта вязкой несжимаемой жидкости между вращающимися соосными цилиндрами с учетом самогравитации. Влияние гравитационного потенциала G° приводит к изменению давления, но не сказывается на поле скорости

$$q_r^\circ = 0, \quad q_\theta^\circ = \omega r^a + \frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{r^a}$$

$$\frac{d}{dr^a} (p^\circ - \rho_0 G^\circ) = \rho_0 q_\theta^{\circ 2} \frac{1}{r^a}, \quad R_1 \leq r^a \leq R_2 \quad (1.1)$$

$$\omega = \frac{\omega_2^\circ R_2^2 - \omega_1^\circ R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, \quad \frac{\gamma}{2\pi} = - \frac{(\omega_2^\circ - \omega_1^\circ) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

В (1.1) p° и $q_r^\circ, q_\theta^\circ$ — давление и компоненты скорости жидкости в полярных координатах r^a, θ^a ; ρ_0 — плотность жидкости; ω_k° и R_k — угловые скорости и радиусы внутреннего и внешнего цилиндров при $k=1,2$ соответственно. Значение G° для случая соосных областей определяется из общего выражения для гравитационного потенциала G [7]

$$G(x^a, y^a) = 2\kappa \iint_D \mu(x', y') \ln \frac{R_0}{R} dx' dy'$$

$$R^2 = (x^a - x')^2 + (y^a - y')^2 \quad (1.2)$$

Здесь κ — гравитационная постоянная; x^a, y^a — декартовы координаты в абсолютной системе координат; R_0 — постоянная с размерностью длины; D — область, занятая телом с плотностью $\mu(x', y')$; $D = D_0 \cup D_1 \cup D_2$; D_0, D_1, D_2 — области, занятые жидкостью с плотностью ρ_0 , внутренним цилиндром с радиусом R_1 , центром O_1 , плотностью ρ_1 и цилиндрическим кольцом с радиусами R_2, R_3 ($R_2 < R_3$) с центром O_2 , и плотностью ρ_2 (фиг. 1).

Предполагая постоянство плотностей ρ_0, ρ_1, ρ_2 , пользуясь (1.2) и аддитивностью потенциала, получим, требуя непрерывности G на границах раздела сред

$$\begin{aligned} \frac{G(x, y)}{2\kappa} = & \rho_2 \iint_D \ln \frac{R_3}{R} dx' dy' + (\rho_0 - \rho_2) \iint_{D_{01}} \ln \frac{R_2}{R} dx' dy' + \\ & + (\rho_1 - \rho_0) \iint_{D_1} \ln \frac{R_1}{R} dx' dy', \quad D_{01} = D_0 \cup D_1 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Гравитационный потенциал G кругового цилиндра постоянной плотности ρ , радиуса R_0 в системе координат с началом в центре масс цилиндра $x_0 = \{x_0, y_0\}$ определяется в соответствии с (1.2) [8]

$$G(x, y) = \kappa \pi (R_0^2 - R^2), \quad R \leq R_0; \quad G(x, y) = \kappa \pi R_0^2 \ln \frac{R_0^2}{R^2}, \quad R > R_0 \quad (1.4)$$

$$R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

Используя (1.4), можно вычислить гравитационный потенциал в (1.3) в любой точке тела.

Подчеркнем, что (1.1) описывает также течение невязкой несжимаемой жидкости между круговыми цилиндрами, а в случае твердотельного вращения ($\omega_1^{\circ} = \omega_2^{\circ}$) является решением уравнений Навье — Стокса при произвольных формах цилиндров.

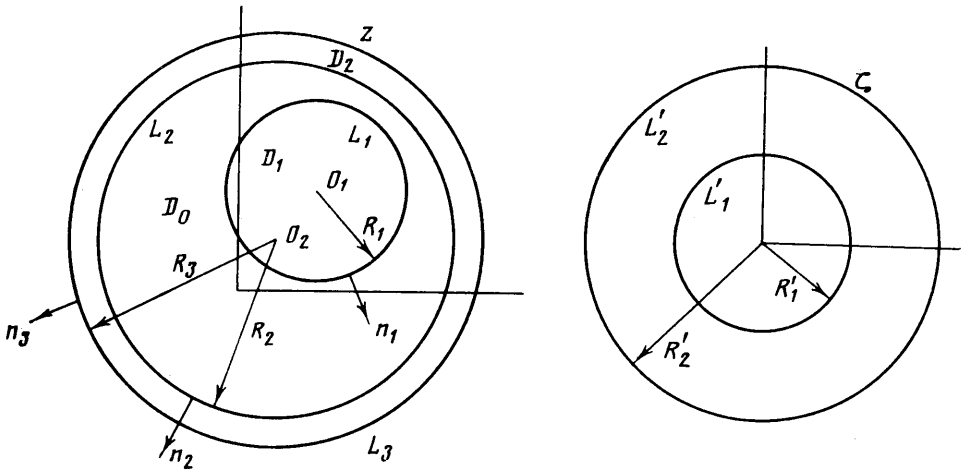
Моменты действующих на цилиндры сил трения K_1° и K_2° , не зависящие в силу симметрии задачи от гравитационного потенциала, равны [9] $K_1^{\circ} = -K_2^{\circ} = 2\eta\gamma$, где η — коэффициент динамической вязкости жидкости.

Хотя суммарный момент сил равен нулю, K_1° и K_2° отличны от нуля при $\omega_1^{\circ} \neq \omega_2^{\circ}$ и для поддержания вращения, из-за вязкой диссипации, требуется затрата энергии, пропорциональная разности угловых скоростей цилиндров. Впрочем, твердотельное вращение является частным случаем рассматриваемого течения, кроме того, при предельно малой вязкости моменты K_1°, K_2° равны нулю. Поскольку силы, действующие на цилиндры, из-за симметрии задачи также равны нулю, то их движение в случае течения Куэтта свободно при $\eta \rightarrow 0$ для не слишком больших значений времени.

В дальнейшем будем рассматривать движение цилиндров в невязкой жидкости. Невязкий механизм развития возмущений справедлив на начальной стадии и вязкость может его лишь демпфировать. Вязкий механизм развития при этом не учитывается.

2. Сформулируем постановку нелинейной задачи о движении в плоскости перпендикулярной оси вращения гравитирующей системы незакрепленных вращающихся цилиндров произвольной формы в плане с невязкой несжимаемой жидкостью между ними при нулевых внешних силах и моментах.

Поскольку внешние силы отсутствуют, центр масс системы неподвижен или движется с постоянной скоростью и, очевидно, лежит на общей прямой с центрами масс однородных цилиндров и жидкости. Течение жид-



Фиг. 1

кости описывается уравнениями Эйлера и неразрывности, а движение цилиндров — уравнениями количества движения и момента количества движения. Условия равенства нормальных компонент скорости жидкости и скорости точек на поверхности цилиндров замыкают постановку задачи. В системе координат, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω , с началом в центре масс системы цилиндры — жидкость, используя комплексную форму записи для векторных величин и операторов [10], имеем

$$\begin{aligned} \rho_0 \left(\frac{dq}{dt} + 2i\omega q - \omega^2 z \right) &= \nabla (\rho_0 G - p), \quad (\nabla, q) = 0 \\ m_k \left(\frac{d^2 z_k}{dt^2} + 2i\omega \frac{dz_k}{dt} - \omega^2 z_k \right) &= F_k^s + F_k^v \\ j_k \frac{d\omega_k}{dt} &= K_k^s + K_k^v \\ (q, n_k) &= \left(\frac{dz}{dt}, n_k \right), \quad z \in L_k \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$F_k^s = (-1)^{k+i} \oint_{L_k} p dz, \quad F_k^v = \rho_k \iint_{D_k} \nabla G dx dy$$

$$K_k^s = (-1)^{k+1} \operatorname{Re} \left\{ \oint_{L_k} p z^* dz \right\}, \quad K_k^v = -\rho_k \operatorname{Re} \left\{ \iint_{D_k} i z^* \nabla G dx dy \right\}$$

$$m_k = \rho_k \iint_{D_k} dx dy, \quad j_k = \rho_k \iint_{D_k} |z - z_k|^2 dx dy, \quad k=1, 2$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (q, \nabla), \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} = 2 \frac{\partial}{\partial z^*}$$

Здесь t — время; ω_k , F_k^s и F_k^v (K_k^s и K_k^v), m_k , j_k — угловые скорости цилиндров, поверхностные и объемные силы (моменты), действующие на единицу длины цилиндров, массы и моменты инерции поперечных сечений

внутреннего и внешнего цилиндров относительно центров масс; L_k , $k=1, 2, 3$, — кривые, ограничивающие области D_0, D_1, D_2 (фиг. 1), с положительным направлением обхода против часовой стрелки; n_k — единичная нормаль к L_k , повернутая на 90° по часовой стрелке относительно касательного вектора; $z=x+iy$ — декартовы переменные во вращающейся системе координат, $z^a=z \exp(i\omega t)$, $|z|$ — модуль комплексного числа z ; $(a, b) = \text{Re}\{ab^*\}$ — скалярное произведение a и b ; $q(z, z^*, t)$ — скорость жидкости; звездочка обозначает комплексное сопряжение; $z_k=x_k+iy_k$ — координаты центров масс цилиндров; $m_1=\rho_1 S_1$; $m_2=\rho_2(S_3-S_2)$; S_k — площадь сечений цилиндрических поверхностей, ограниченных контурами L_k , $k=1, 2, 3$.

Перенесенные в правую часть члены первого и третьего уравнений (2.1) являются соответственно инерциальными, кориолисовыми, центробежными, гравитационными силами и силой давления в уравнении Эйлера или обобщенной архимедовой силой в уравнениях движения цилиндров.

Поверхностные интегралы в выражениях для F_k^v, K_k^v в (2.1) преобразуются в интегралы по контуру с помощью известных теорем

$$F_1^v = -i\rho_1 \oint_{L_1} G dz, \quad F_2^v = -i\rho_2 \oint_{L_3-L_2} G dz \quad (2.2)$$

$$K_1^v = -\rho_1 \text{Re} \left\{ \oint_{L_1} z^* G dz \right\}, \quad K_2^v = -\rho_2 \text{Re} \left\{ \oint_{L_3-L_2} z^* G dz \right\}$$

Введем функцию тока ψ и перепишем первое уравнение (2.1)

$$\frac{dq}{dt} = -\nabla \Phi, \quad \Phi = \frac{p}{\rho_0} + 2\omega\psi - \frac{\omega^2 |z|^2}{2} - G, \quad q = -i\nabla \psi \quad (2.3)$$

В предположении существования потенциала скорости φ во вращающейся системе координат в начальный момент времени из (2.3) следует справедливость теоремы Лагранжа, согласно которой течение потенциально во все время движения. С учетом этого можно ввести комплексный потенциал $w(z, t) = \varphi + i\psi$, для которого

$$q^* = \partial w / \partial z \quad (2.4)$$

В частности, начальные данные, отвечающие течению Куэтта между цилиндрами, потенциальны, если ω определена согласно (1.1), при этом существует комплексный потенциал невозмущенного течения w°

$$w^\circ = \frac{\gamma}{2\pi i} \ln \frac{z}{R_0}, \quad q^{\circ*} = \frac{\gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} \quad (2.5)$$

Из (2.3), (2.4) следует интеграл Коши — Лагранжа

$$-\frac{p}{\rho_0} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial w}{\partial z} \right|^2 + 2\omega\psi - \frac{1}{2} \omega^2 |z|^2 - G \quad (2.6)$$

При выводе (2.6) использовалось условие $\Omega=0$, где $\Omega = -(\nabla, iq)$ — завихренность, и тождество

$$(q, \nabla)q = i\Omega q + \frac{1}{2} \nabla |q|^2$$

Следуя [11] и используя (2.6), получим выражения для поверхностных гидродинамических сил и моментов в (2.1), представленных в виде суммы $F_k^s = F_k^H + F_k^G$; $K_k^s = K_k^H + K_k^G$, где F_k^G, K_k^G — вклады в поверхностные

силы и моменты за счет гравитации

$$\begin{aligned}
 F_k^H &= (-1)^{k+1} \rho_0 \left\{ S_k \left(\frac{d^2 z_k}{dt^2} + 2i\omega \frac{dz_k}{dt} - \omega^2 z_k \right) + \right. \\
 &+ i \frac{d}{dt} \oint_{L_k} z dw - \frac{i}{2} \left[\oint_{L_k} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 dz \right]^* - iz_j \frac{d\Gamma}{dt} \left. \right\} \\
 K_k^H &= (-1)^{k+1} \frac{\rho_0}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{d}{dt} \oint_{L_k} |z|^2 dw - \oint_{L_k} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 z dz - |z_j|^2 \frac{d\Gamma}{dt} \right\} \\
 F_k^G &= (-1)^{k+1} \rho_0 \oint_{L_k} G dz, \quad K_k^G = (-1)^{k+1} \rho_0 \operatorname{Re} \left\{ \oint_{L_k} z^* G dz \right\}, \quad \Gamma = \oint_{L_k} (q, dz)
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Здесь Γ — циркуляция скорости по контуру L_k ; z_j — координаты точек разрыва касательной скорости.

При выводе (2.7) использовались тождества, доказываемые, как и (2.2), с помощью интегральных теорем

$$\begin{aligned}
 \oint_{L_k} \psi dz &= -S_k \frac{dz_k}{dt}, \quad \oint_{L_k} |z|^2 dz = 2i S_k z_k \\
 \operatorname{Re} \left\{ \oint_{L_k} z^* \psi dz \right\} &= \frac{1}{2} \frac{dj_k}{dt} = 0, \quad \operatorname{Re} \left\{ \oint_{L_k} z^* |z|^2 dz \right\} = 0, \quad k=1, 2
 \end{aligned}$$

Для получения потенциала скорости отображим область течения в z -плоскости на кольцо между двумя концентрическими окружностями L_k' в ζ -плоскости с центрами в точке $\zeta=0$ и радиусами R_k' , $k=1, 2$ (фиг. 1)

$$z = f(\zeta, \tau), \quad t = \tau, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad R_1' \leq |\zeta| \leq R_2' \tag{2.8}$$

Предполагая непрерывность скорости жидкости и используя теорему Лорана о разложении аналитической функции в кольце, представим $\partial w / \partial \zeta$ в виде

$$\frac{\partial w}{\partial \zeta} = \sum_{-\infty}^{\infty} Q_m(\tau) \zeta^m, \quad Q_{-1} = \frac{\Gamma}{2\pi i}, \quad \frac{d\Gamma}{d\tau} = 0 \tag{2.9}$$

Далее, без ограничения общности величина циркуляции принята равной ее невозмущенному значению $\Gamma = \gamma$.

Начальные данные задачи не приводятся, поскольку в дальнейшем будет изучаться задача устойчивости движения.

3. Решение задачи требует, в частности, расчета сил, обусловленных гравитацией, моментов и построения отображения (2.8). В дальнейшем ограничимся рассмотрением круговых цилиндров, для которых соответствующие вычисления особенно просты.

Действующие на круговые цилиндры поверхностные и объемные силы, обусловленные гравитацией, определяются из (1.3), (1.4), (2.2) и (2.7), а моменты всех сил в невязкой жидкости, очевидно, равны нулю

$$\begin{aligned}
 F_1^G &= -\pi 2\kappa \rho_0^2 S_1 z_{12}, \quad F_1^v = -\pi 2\kappa \rho_0 \rho_1 S_1 z_{12} \\
 F_2^G &= -\pi 2\kappa \rho_0 (\rho_0 - \rho_1) S_1 z_{12}, \quad F_2^v = 0 \\
 K_k^H &= K_k^G = K_k^v = 0, \quad k=1, 2
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь $z_{12}=z_1-z_2$ — расстояние между центрами цилиндров, $S_k=\pi R_k^2$. Согласно (3.1), силы, обусловленные влиянием гравитации, действующие на внешний и внутренний цилиндры, равны по величине, противоположны по направлению и пропорциональны расстоянию между центрами цилиндров. Подобное поведение гравитационных сил является следствием известного из теории потенциала факта: линейного по радиусу роста силы внутри однородного гравитирующего кругового цилиндра [12].

Задача, определяющая движение цилиндров, переписывается с помощью (2.1), (2.7), (2.9) и (3.1)

$$\begin{aligned} & [m_k + (-1)^k \rho_0 S_k] \left(\frac{d}{d\tau} + i\omega \right)^2 z_k = \\ & = (-1)^{k+1} \left\{ i\rho_0 \oint_{L_k} \frac{d}{d\tau} z dw - i \frac{\rho_0}{2} \left[\oint_{L_k} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 dz \right]^* - 2\pi k \rho_0 (\rho_0 - \rho_1) S_1 z_{12} \right\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z}, n_k^* \right) = \left(\frac{dz}{d\tau}, n_k \right), \quad z \in L_k, \quad k=1, 2 \quad \omega_k = \omega_k^0$$

Здесь угловые скорости вращения цилиндров, не меняющиеся со временем, приняты равными невозмущенным значениям ω_k^0 и не влияют на положение центров круговых цилиндров.

Для круговых цилиндров отображение (2.8) с $R_1' = \sqrt{\alpha}$, $R_2' = \sqrt{1/\alpha}$ осуществляется с помощью дробно-линейной функции (фиг. 1)

$$\begin{aligned} z - z_2 &= R_2 \frac{z_{12} + \xi \beta \sqrt{\alpha}}{\xi z_{12}^* \sqrt{\alpha} + \beta} \quad (3.3) \\ \alpha &= \frac{2R_1}{R_2(1-ab+d)}, \quad \beta = \frac{R_2}{2}(1+ab+d) \\ a &= \frac{|z_{12}| + R_1}{R_2}, \quad b = \frac{|z_{12}| - R_1}{R_2}, \quad d = \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \end{aligned}$$

В переменных ξ невозмущенное течение (2.7) ($z_1=z_2=0$) описывается соотношениями

$$w^0 = \frac{\gamma}{2\pi i} \ln \xi, \quad q^{0*} = \frac{\gamma}{2\pi i \sqrt{R_1 R_2} \xi} \quad (3.4)$$

4. Ниже исследуется устойчивость центрального положения цилиндров в течении Куэтта. Комплексный потенциал возмущенного течения представляется в виде суммы $w = w^0 + w'$, где w^0 , w' определяются из (3.4), (2.9)

$$w^0 = Q_{-1} \ln \xi, \quad w' = \sum_{m \neq -1} Q_m \frac{1}{m+1} \xi^{m+1}$$

Предполагая малость z_1 , z_2 , разлагая (3.3) в ряд и ограничиваясь линейными членами по z_1 , z_2 , получим

$$z = \sqrt{R_1 R_2} \xi + z_2 + (R_2^2 z_{12} - R_1 R_2 \xi^2 z_{12}^*) \frac{1}{R_2^2 - R_1^2} \quad (4.1)$$

Из (2.9) и вида правой части в граничных условиях (3.2) для w следует, что комплексный потенциал скорости жидкости в линейной задаче можно представить в виде

$$w' = Q_0 \xi - Q_{-2} \frac{1}{\xi}, \quad \xi = |\xi| \exp(i\chi) \quad (4.2)$$

Решение, соответствующее m -й гармонике по χ в (2.9) при $m \neq 0, -1, -2$, отвечает тривиальному движению с $Q_m = 0$ и в дальнейшем не рассматривается.

Подставляя (4.2) в граничное условие (3.2), получим, используя (4.1), уравнения для Q_0, Q_{-2}

$$Q_0^* R_k' + Q_{-2} \frac{1}{R_k'} = R_k \frac{dz_k}{d\tau}, \quad k=1, 2$$

Из этой системы находим

$$Q_0^* = \sqrt{R_1 R_2} \left(\frac{dz_2}{d\tau} - \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{dz_{12}}{d\tau} \right) \quad (4.3)$$

$$Q_{-2} = \sqrt{(R_1 R_2)^3} \frac{1}{R_2^2 - R_1^2} \frac{dz_{12}}{d\tau}$$

С помощью (4.1)–(4.3) вычислим неизвестные слагаемые в правой части уравнений движения в (3.2)

$$\oint_{L_k} dz dw = \gamma \left(z_2 + \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} z_{12} \right) + \frac{2\pi i R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{dz_{12}}{d\tau}$$

$$\left[\oint_{L_k} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 dz \right]^* = 2\gamma \left(\frac{dz_2}{d\tau} - \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{dz_{12}}{d\tau} \right) + \frac{i\gamma^2 z_{12}}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}$$

Подставляя эти выражения в (3.2), получим

$$[m_k + (-1)^k \rho_0 S_k] \left(\frac{d}{d\tau} + i\omega \right)^2 z_k = (-1)^k F$$

$$F = \frac{2\rho_0 S_1 S_2}{S_2 - S_1} \left\{ \frac{d^2 z_{12}}{d\tau^2} - \frac{i(S_1 + S_2)\gamma}{2S_1 S_2} \frac{dz_{12}}{d\tau} - \left[\frac{\gamma^2}{4S_1 S_2} - \kappa\pi(m_1 - \rho_0 S_1) \frac{S_2 - S_1}{S_1 S_2} \right] z_{12} \right\} \quad (4.4)$$

Складывая уравнения (4.4) при $k=1$ и 2 и предполагая, что скорость центра масс системы z_c в начальный момент времени равна нулю, получим

$$z_c = (m_1 z_1 + m_2 z_2 + \rho_0 (S_2 - S_1) z_0) / M = 0 \quad (4.5)$$

$$M = m_1 + m_2 + \rho_0 (S_2 - S_1), \quad z_0 = (z_2 S_2 - z_1 S_1) / (S_2 - S_1)$$

Здесь M – суммарная масса системы, z_0 – центр масс жидкости.

Координаты центров цилиндров z_1 и z_2 определяются из системы двух комплексных уравнений второго порядка (4.4), которую можно заменить эквивалентной системой, состоящей из (4.5) и уравнения для вектора $z_{12} = z_1 - z_2$. Вычитая из уравнения (4.4) для $k=1$ уравнение для $k=2$, предварительно поделив их на коэффициенты при вторых производных в левых частях, получим для z_{12}

$$A \frac{d^2 z_{12}}{d\tau^2} + 2iB \frac{dz_{12}}{d\tau} - Cz_{12} = 0 \quad (4.6)$$

$$A = 1 + \frac{2M\rho_0 S_1 S_2}{M_1 M_2 (S_2 - S_1)}, \quad B = \omega - \frac{\gamma M \rho_0 (S_2 + S_1)}{2M_1 M_2 (S_2 - S_1)}$$

$$C = \omega^2 + \frac{\gamma^2 M \rho_0}{2M_1 M_2 (S_2 - S_1)} - \frac{M}{M_2} 2\kappa\pi\rho_0$$

$$M_k = m_k + (-1)^k \rho_0 S_k$$

Из уравнений (4.5), (4.6) следует, что имеется пять определяющих безразмерных параметров задачи

$$S^r = \frac{S_1}{S_2}, \quad \rho^r = \frac{\rho_1}{\rho_0}, \quad m^r = \frac{m_2}{\rho_0 S_2}, \quad \omega_k^r = \frac{\omega_k^0}{\omega^0} \quad (\omega^0 = \sqrt{2\pi\kappa\rho_0}) \quad (4.7)$$

Вместо ρ^r , m^r удобно ввести положительные параметры, зависящие от геометрических и массовых характеристик системы, монотонно растущие при увеличении ρ^r и равные единице при $\rho^r=1$

$$v^2 = \frac{M}{M_2} = 1 + \frac{(\rho^r-1)S^r}{m^{r+1}}, \quad \delta^2 = \frac{A+1}{A-1} = 1 + \frac{(1-S^r)(\rho^r-1)}{v^2} \quad (4.8)$$

Решения (4.6), зависящие от времени как $\exp(i\lambda\tau)$, приводят к спектральной задаче для безразмерного собственного значения $\lambda^r = \lambda/\omega^G$

$$\lambda^r = -\frac{\omega_1^r S^r - \omega_2^r}{1-S^r} + \frac{\omega_1^r + \omega_2^r}{1+\delta^2} \pm \sqrt{D} \quad (4.9)$$

$$D = \frac{1-\delta^2}{1+\delta^2} \left[\frac{(\omega_1^r + \omega_2^r)^2}{2(1+\delta^2)} + \frac{(\omega_1^r - \omega_2^r)^2}{2(1-\delta^2)} - v^2 \right]$$

При выводе использовались (4.7), (4.8) и выражения для ω и γ в (1.1) через ω_1^r , ω_2^r .

После того как найдено z_{12} , с помощью (4.5) отыскиваются z_1 и z_2

$$z_1 = \frac{z_{12}}{v^2}, \quad z_2 = \frac{1-v^2}{v^2} z_{12} \quad (4.10)$$

Вводя новые переменные ω_+ , ω_- , имеем

$$D = \frac{1-\delta^2}{1+\delta^2} \left[\frac{\omega_+^2}{1+\delta^2} + \frac{\omega_-^2}{1-\delta^2} - v^2 \right] \quad (4.11)$$

$$\omega_{\pm} = (\omega_1^r \pm \omega_2^r) / \sqrt{2}$$

Система экспоненциально неустойчива, если дискриминант $D < 0$, при $D=0$ перемещения z_k растут линейно по времени так, что скорости $dz_k/d\tau$ постоянны, а при $D > 0$ решение системы описывается периодическими функциями времени.

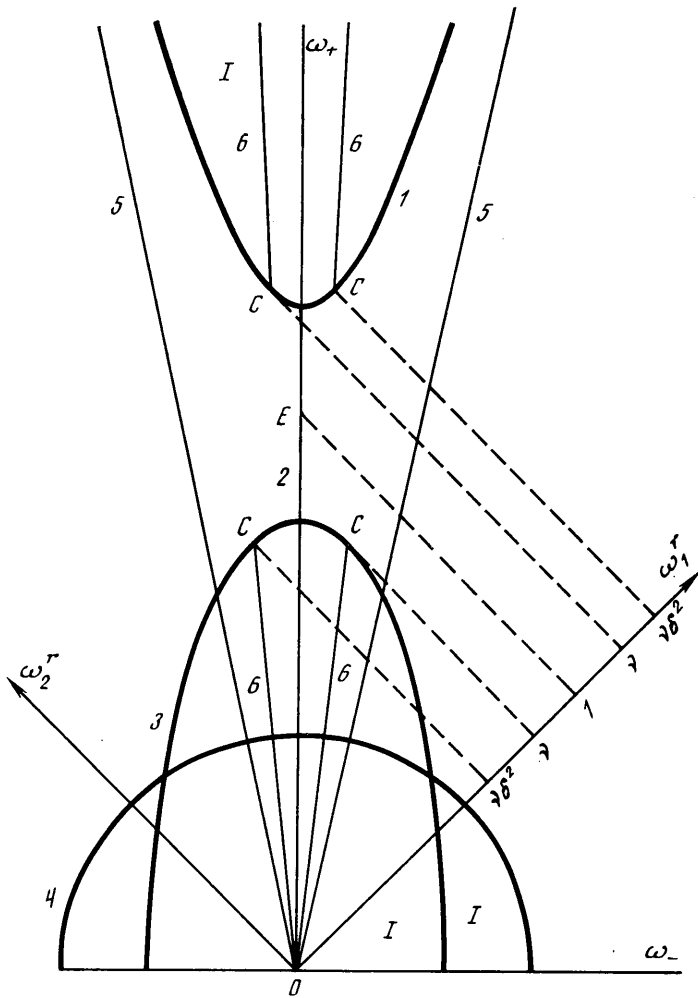
5. Изображенные на фиг. 2 нейтральные кривые ($D=0$) в плоскости ω_+ , ω_- зависят от двух параметров δ^2 , v^2 и являются в соответствии с (4.8), (4.11) гиперболами при $\rho^r > 1$, прямой $\omega_- = 0$ при $\rho^r = 1$, эллипсами при $\rho^r < 1$ и окружностью при $\rho^r = 0$ (кривые 1-4 соответственно). В силу симметрии нейтральных кривых относительно замены ω_1^r на ω_2^r они построены при $\omega_+ > 0$. Для положительных значений ω_+ при $\rho^r \rightarrow 1-0$ полуэллипсы вырождаются в отрезок OC , а при $\rho^r \rightarrow 1+0$ ветвь гиперболы — в луч из точки E до бесконечности (фиг. 2). Таким образом, тип кривой второго порядка и, следовательно, качественные характеристики устойчивости системы определяются значением единственного параметра ρ^r .

На фиг. 2 нарисованы асимптоты гипербол (кривые 5) и отрезки прямых, соответствующие максимально растущим возмущениям ($\partial D / \partial \omega_k^r = 0$) и пересекающие нейтральную кривую в критических точках C (кривые 6)

$$\omega_+ = \pm \sqrt{\frac{\delta^2+1}{\delta^2-1}} \omega_-, \quad \omega_+ = \pm \frac{\delta^2+1}{\delta^2-1} \omega_-$$

Критические (минимальные при $\rho^r > 1$ и максимальные при $\rho^r < 1$) значения $|\omega_k^r|$ равны v . Оси ω_k^r , критические точки C и области неустойчивости, ограниченные кривыми 1, 3, 4 и обозначенные 1, также показаны на фиг. 2.

Для неустойчивости системы при $\rho^r \geq 1$ необходимо, чтобы цилиндры вращались в одну сторону, а при $\rho^r < 1$ неустойчивость возможна при любых направлениях вращения цилиндров.



Фиг. 2

Оценим собственное значение λ^r при плотности внутреннего цилиндра, близкой к плотности жидкости ($\rho^r \rightarrow 1$). При $\omega_1^r = \omega_2^r = 0$ собственное значение линейной задачи определяется выражением

$$\lambda^0 = \pm \sqrt{(\delta^2 - 1) / (\delta^2 + 1)}$$

В общем случае, согласно (4.9), вклад угловых скоростей вращения в величину λ^r становится значительным, если $\omega_k^r \sim 1$. Однако для плотности внутреннего цилиндра, близкой к плотности жидкости, влияние скоростей вращения на величину λ^r существенно даже при малых значениях ω_1^r, ω_2^r , если рассогласование между ними отлично от нуля

$$\lambda^r \approx \frac{(\omega_1^r - \omega_2^r)(1 + S^r)}{2(1 - S^r)} \pm \sqrt{\lambda^{02} + \frac{(\omega_1^r - \omega_2^r)^2}{4}}$$

$$\lambda^0 \approx \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1 - S^r)(\rho^r - 1)}$$

Таким образом, часто используемая оценка, полученная в приближении $\omega_1^r = \omega_2^r = 0$, несправедлива при $|\omega_1^r - \omega_2^r| \sim |\rho^r - 1|^{1/2}$.

В отсутствие гравитации ($\kappa \rightarrow 0$) система неустойчива (если $\rho^r > 1$) в области изменения параметров, расположенной между асимптотами гипербола (кривые 5 на фиг. 2), являющихся в этом случае нейтральными кривыми. Отсюда следует, в частности, что в экспериментальных исследованиях течения Куэтта при $\rho^r > 1$ наличие радиального люфта осей цилиндров может приводить к росту возмущений рассматриваемого типа в устойчивой по критерию Рэля области изменения параметров $\omega_1^r R_1^2 < \omega_2^r R_2^2$ [4].

В заключение выражаем глубокую признательность Крылову А. Л. и Авсюку Ю. Н., обративших наше внимание на рассматриваемую задачу, а также Копысову Ю. С. за полезное обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ди Прима Р. С., Суинни Х. Л. Неустойчивости и переход в течении между концентрическими вращающимися цилиндрами // Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. М.: Мир, 1984. С. 169–217.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
3. Крылов А. Л., Шустер В. Г. Об устойчивости центрального положения шипа в гидродинамическом подшипнике // Докл. АН СССР. 1966. Т. 169. № 5. С. 1030–1033.
4. Уринцев А. Л. Об устойчивости равномерного вращения ненагруженного шипа в гидродинамическом подшипнике // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 1. С. 149–155.
5. Чельшиков В. С. Устойчивость центрального положения внутреннего цилиндра в течении Куэтта // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 6. С. 158–161.
6. Монин А. С. Теоретические основы геофизической гидродинамики. Л.: Гидрометеоиздат, 1988. 424 с.
7. Мюнтц Г. М. Интегральные уравнения. Т. 1. Л.; М.: Гостехиздат, 1934. 330 с.
8. Кирхгоф Г. Механика. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 402 с.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
10. Милл-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 655 с.
11. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 444 с.
12. Кондратьев Б. П. Динамика эллипсоидальных гравитирующих фигур. М.: Наука, 1989. 270 с.

Москва

Поступила в редакцию
4.V.1990