МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1991

УДК 532.546

Х. Ф. АЗИЗОВ

ГРАНИЧНЫЕ РЕЖИМЫ С ОБОСТРЕНИЕМ И ЛОКАЛИЗАЦИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ

Эффект конечной скорости возмущения в нелинейных средах вслед за задачами теплопроводности [1] был обнаружен в работах по фильтрации газа [2], когда темп закачки газа на границе пласта изменялся в режиме без обострения по степенно́му закону $\rho\sim At^k$, $A>0$, $k>0$, $0\leqslant t<\infty$. В этом случае нелинейность процесса обязана свойству деформируемости массы газа от давления.

Существует другой важный класс нелинейных задач фильтрации, когда нелинейность обусловлена неньютоновскими свойствами фильтрующейся жидкости [3]. Одна из главных особенностей данного класса задач – это существование режимов с обострением на границе пласта и связанных с ними эффектов локализации возмущения. Исследованию этих особенностей и посвящена настоящая статья.

1. Основные уравнения слабосжимаемой неньютоновской жидкости имеют вид [4]

$$\beta\frac{\partial P}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{v}=0$$
$$-\operatorname{grad}P=\Pi\Phi\left(\frac{v}{\lambda}\right)\frac{\mathbf{v}}{v},\quad \Phi(0)=0 \tag{1.1}$$

Здесь P, $\mathbf{v}$, β – давление, скорость фильтрации и упругоемкость насыщенного пласта; $\Phi(v)$ – нелинейная функция, характеризующая неньютоновские свойства жидкости; Π, λ – характерные значения градиента давления и скорости фильтрации соответственно.

Многие особенности движения неньютоновской жидкости в пористой среде можно проследить для простого степенного закона фильтрации, когда

$$\Phi\left(\frac{v}{\lambda}\right)=\left(\frac{v}{\lambda}\right)^n,\quad n>0 \tag{1.2}$$

Степенной закон фильтрации справедлив для жидкостей с псевдопластическими ($0<n<1$) и дилатантными ($n>1$) свойствами, которыми обладают многие растворы и полимерные системы, применяемые в нефтедобыче [3, 5, 6].

Уравнения (1.1) в одномерном случае с учетом (1.2) примут вид

$$\beta\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad -\frac{\partial P}{\partial x}=\Pi\left(\frac{v}{\lambda}\right)^n,\quad n>0 \tag{1.3}$$

Решение уравнений (1.3) ищется в виде бегущей волны

$$P=P(\xi),\quad v=v(\xi),\quad \xi=x-Vt \tag{1.4}$$

С учетом (1.4) уравнения (1.3) сводится к виду

$$-\beta V\frac{dP}{d\xi}+\frac{dv}{d\xi}=0,\quad -\frac{dP}{d\xi}=\Pi\left(\frac{v}{\lambda}\right)^n \tag{1.5}$$

откуда

$$\frac{dU}{d\xi}=-AU^n,\quad U=\frac{v}{\lambda},\quad A=\Pi\beta V\lambda^{-1} \tag{1.6}$$

Из (1.6) и (1.5) получим

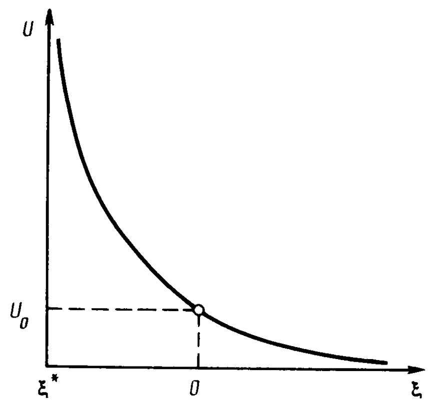
$$\xi-\xi_0=-A^{-1}\int\limits_{U_0}^{U}\frac{d\eta}{\eta^n},\quad P=P_\infty+\Pi A^{-1}U(\xi) \tag{1.7}$$

Так как $P=U=0$ при $\xi\to\infty$, то очевидно, что $P_\infty=0$.

Пусть $\xi_0=0$; тогда, если $n>1$, интеграл в (1.7) сходится при $U\to\infty$ и существует конечная точка ξ^*, в которой скорость и давление обращаются в бесконечность

$$\xi^*=-A^{-1}\int\limits_{U_0}^{U}\frac{du}{u^n}<0,\quad U_0>0,\quad n>1 \tag{1.8}$$

Качественная зависимость между U и ξ показана на фиг. 1. Функция U является монотонно убывающей функцией ξ в области $\xi^*<\xi<\infty$. Но



Фиг. 1

$\xi\to\infty$ либо при $x\to\infty$, либо при $t\to-\infty$. Тогда функция U является монотонно убывающей функцией x при конечном фиксированном t и монотонно возрастающей функцией t при каждом фиксированном x. Таким образом, точка ξ^*, в которой функция U обращается в бесконечность соответствует нижней границе области изменения координаты x и верхней границе области изменения t. Так как область изменения геометрической координаты x ограничена снизу естественной границей пласта $x=0$, то из (1.8) получаем

$$\xi^*=-VT_f=-A^{-1}\int\limits_{U_0}^{\infty}\frac{du}{u^n},\quad n>1 \tag{1.9}$$

Последнее равенство означает, что существует конечное время обострения $T_f>0$, при котором скорость фильтрации и давление обращаются в бесконечность на границе пласта. Другими словами: для дилатантных жидкостей, подчиняющихся степенному закону фильтрации, существует LS-режим обострения скорости и давления.

В самом деле, решая (1.7) относительно безразмерной скорости U, получим

$$U(x,\ t)=[AV(n-1)(xV^{-1}-t+D)]^{-\alpha}$$
$$D=[U_0^{n-1}AV(n-1)]^{-1},\quad \alpha=1/(n-1) \tag{1.10}$$

Теперь, если граничный режим задавать в виде

$$U(0,\ t)=B(T_f-t)^{-\alpha},\quad B=\text{const},\quad -\infty<t<T_f \tag{1.11}$$

то неизвестные постоянные V и U_0 можно выразить в следующем виде:

$$V=\alpha A^{-1}B^{1-n},\quad U_0=[AVT_f(n-1)]^{-\alpha} \tag{1.12}$$

С учетом (1.12) решение (1.10) принимает вид

$$U(x,\ t)=B(xV^{-1}+T_f-t)^{-\alpha},\quad -\infty<t<T_f,\quad 0\leqslant x<\infty \tag{1.13}$$

Решение (1.13) обладает всеми свойствами LS-режима [7] обострения, т. е. обращается в бесконечность на границе области при $t\to T_f$ и ограничено сверху предельной кривой

$$U(x,T_f)=B\left(\frac{x}{V}\right)^{-\alpha}$$

В случае, когда $0<n<1$, интеграл в (1.7) сходится при $U_0\to 0$. Имеем

$$\xi=-A^{-1}\int\limits_0^U\frac{du}{u^n},\quad 0<n<1 \tag{1.14}$$

Из (1.14) и (1.6) очевидно, что на фронте волны ($\xi=0$) $U(0)=0$, $U_\xi(0)=0$. А за фронтом волны ($\xi<0$) $U_\xi<0$, $U_{\xi\xi}>0$. Следовательно, решение $U(\xi)$, определяемое равенством (1.14), является монотонно убывающей функцией от ξ, обращенной выпуклостью вниз и стремящейся к нулю вместе с первой производной при $\xi\to 0_-$. Можно доказать, что перед фронтом волны при $\xi>0$ $U(\xi)$ тождественно равна нулю. Действительно, пусть $U(\xi_0)=U_0\neq 0$ при $\xi_0>0$. Тогда, решая задачу Коши для (1.6) с начальной точкой $(\xi_0,\ U_0)$, получим

$$U(\xi,\xi_0,U_0)=[U_0^{1-n}-A(1-n)(\xi-\xi_0)]^{-\alpha} \tag{1.15}$$

Но последнее выражение не обращается в нуль при $\xi=0$, что противоречит первоначально принятому условию. Окончательно решение (1.14) принимает вид

$$U(x,\ t)=[A(1-n)(Vt-x)]^{-\alpha}(\sigma(x)-\delta(x-Vt)) \tag{1.16}$$

Здесь $\sigma(x)$ — единичная функция Хевисайда, а постоянная V определяется из граничного режима без обострения

$$U(0,\ t)=Bt^{-\alpha},\ B=\text{const},\ \alpha=1/(n-1),\ t\geqslant 0$$

Таким образом, для фильтрационных течений, подчиняющихся степенному закону фильтрации, имеет место LS-режим обострения, когда $n>1$, и конечный фронт возмущений, когда $0<n<1$. Другими словами, фильтрация дилатантных жидкостей сопровождается возникновением пространственно-временно́й структуры типа LS-режимов с обострением, а фильтрация псевдопластических жидкостей — эволюцией конечных фронтов возмущения.

Можно сформулировать и более общее утверждение: для системы (1.1) в одномерном случае существует либо LS-режим обострения, либо конечный фронт возмущений, в зависимости от того, какое условие из приведенных двух выполняется

$$\int_1^\infty \frac{du}{\Phi(u)} < \infty, \quad \int_0^U \frac{du}{\Phi(u)} < \infty$$

Доказательство сводится к выяснению условий существования ограниченного или неограниченного решения уравнения

$$\frac{dU}{d\xi} = -A\Phi(U), \quad A = \Pi\beta V\lambda^{-1}, \quad \Phi(0)=0$$

которое проводится аналогично тому, как это было сделано для уравнения (1.6).

Псевдопластические жидкости кроме рассмотренной финитности возмущений обладают также свойством локализации давления и скорости в режиме с обострением (S-режим). В самом деле, переходя из уравнений (1.3) к одному уравнению для безразмерной скорости, получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\Pi\beta}{\lambda} \frac{\partial U^n}{\partial t}, \quad 0<n<1 \tag{1.17}$$

Последнее уравнение имеет решение

$$\begin{gathered} U(x, t) = B_S(T_f-t)^\alpha (1-xL^{-1})^{-2\alpha}(\sigma(x)-\sigma(x-L)) \\ L = \left[B_S^{1-n} \frac{2\lambda(1+n)}{\Pi\beta n(1-n)} \right]^{1/2}, \quad B_S = \mathrm{const}, \quad -\infty<t<T_f \end{gathered} \tag{1.18}$$

которое обладает следующими свойствами:

а) при $x=0$ меняется по закону

$$U(0, t) = B_S(T_f-t)^\alpha$$

б) при $t=0$

$$U(x, 0) = B_S T_f^\alpha (1-xL^{-1})^{-2\alpha}(\sigma(x)-\sigma(x-L))$$

в) при $0\leqslant x\leqslant L$ скорость $U(x, t)$ стремится к бесконечности при $t\to T_f$;

г) $U(x, t)=0$ при всех $-\infty<t<T_f$ для любых $x>L$; точка $x=L$ является неподвижной границей для возмущений скорости, в которой непрерывны U, U_x и U_{xx}; высшие производные по x в зависимости от n могут не существовать в точке $x=L$.

Используя последнее свойство $U(x, t)$, функцию $P(x, t)$ из уравнений (1.3) можно найти в следующем виде:

$$\begin{gathered} P(x, t) = D_S(T_f-t)^{\alpha n}(1-xL^{-1})^{-\varepsilon}(\sigma(x)-\sigma(x-L)) \\ \varepsilon = \frac{n+1}{n-1}, \quad D_S = \left[B_S^{1+n} \frac{2\Pi\lambda(1-n)}{\beta n(1+n)} \right]^{1/2}, \quad -\infty<t<T_f, \quad 0\leqslant x<\infty \end{gathered} \tag{1.19}$$

Можно убедиться в том, что построенные функции (1.18) и (1.19) удовлетворяют системе уравнений (1.3). В отличие от безразмерной скорости $U(x, t)$, обладающей непрерывными частными производными U_x и U_{xx}, давление $P(x, t)$ имеет непрерывную производную по x только первого порядка. При $n<1/3$ вторая производная P_{xx} обращается в бесконечность при $x=L$.

2. Рассмотрим теперь двух- и трехчленные законы фильтрации и соответствующие им режимы обострения. Двух- и трехчленные законы фильтрации были исследованы еще Ф. Форхгеймером [8]. Известно, что многие неньютоновские системы, обладающие вязкоупругими и другими

реофизическими свойствами, подчиняются этим законам [9, 10]. Их можно записать в общем виде

$$-\operatorname{grad} P = (av+bv^2+cv^3)\frac{\mathbf{v}}{v} \tag{2.1}$$

где a, b, c — неотрицательные размерные постоянные. Предполагается, что трехчлен в правой части (2.1) не имеет других действительных корней, кроме нулевого.

Ниже рассматриваются одномерные движения типа бегущих волн, зависящие от переменной $\xi=x-Vt$. Уравнение (2.1) вместе с уравнением неразрывности дает

$$\beta\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}=0, \quad -\frac{\partial P}{\partial x}=av+bv^2+cv^3 \tag{2.2}$$

или

$$\frac{dv}{d\xi}=-\beta V(av+bv^2+cv^3), \quad P=(\beta V)^{-1}v$$

Система (2.2) в случае $a=c=0$, $b\neq 0$ имеет решение [11]

$$v(x,t)=K(xV^{-1}+T_f-t)^{-1}, \quad P(x,t)=(\beta V)^{-1}v(x,t)$$
$$V=(Kb\beta)^{-1/2}, \quad K=\text{const}, \quad -\infty<t<T_f, \quad 0\leqslant x<\infty \tag{2.3}$$

$$v(0,t)=K(T_f-t)^{-1}, \quad P(0,t)=K\beta^{-1}V^{-1}(T_f-t)^{-1} \tag{2.4}$$

Решение (2.3) системы (2.2) представляет собой волну сжатия для скорости и давления. Полуширина волны (координата точки $x=x^*$, в которой $v(x^*,t)=0{,}5v(0,t)$, $P(x^*,t)=0{,}5P(0,t)$) меняется по закону

$$x^*(t)=V(T_f-t)$$

Она сокращается до нуля при $t\to T_f$ с постоянной скоростью V. В этом случае имеет место LS-режим обострения с локализацией возмущений на границе области. На границе $x=0$ могут быть заданы либо скорость, либо давление. Задание одного из них определяет другое.

В случае, когда $c=0$, $a\neq 0$, $b\neq 0$ (двучленный закон), имеет место следующее решение:

$$v(x,t)=ab^{-1}(\exp(k\eta)-1)^{-1}, \quad P(x,t)=\beta^{-1}V^{-1}v(x,t)$$
$$\eta=xV^{-1}+T_f-t, \quad V=\left(\frac{k}{a\beta}\right)^{1/2}, \quad -\infty<t<T_f, \quad 0\leqslant x<\infty \tag{2.5}$$

где $k=\text{const}$ — параметр граничного режима и

$$v(0,t)=ab^{-1}(\exp(k(T_f-t)-1)^{-1} \tag{2.6}$$

Решение (2.5) представляет собой волну сжатия с более интенсивным режимом обострения (2.6). Полуширина волны в этом случае меняется по закону

$$x^*(t)=Vk^{-1}\ln(2-\exp(-k(T_f-t)))$$

Пусть $b=0$, $a\neq 0$, $c\neq 0$. Этому случаю соответствуют неньютоновские жидкости, обладающие вязкоупругими свойствами [9]. Скорость и давление имеют вид

$$v(x,t)=(ac^{-1})^{1/2}(\exp(k\eta)-1)^{-1/2}, \quad P(x,t)=(\beta V)^{-1}v(x,t)$$
$$\eta=xV^{-1}+T_f-t, \quad V=k/2a\beta, \quad -\infty<t<T_f, \quad 0\leqslant x<\infty \tag{2.7}$$

$$v(0,t)=(ac^{-1})^{1/2}(\exp(k(T_f-t))-1)^{-1/2} \tag{2.8}$$

Полуширина волны меняется по закону

$$x^*(t)=Vk^{-1}\ln(4-3\exp(k(T_f-t)))$$

В случае трехчленного закона, когда $a\neq0$, $b\neq0$ и $c\neq0$, уравнение (2.2) имеет решение

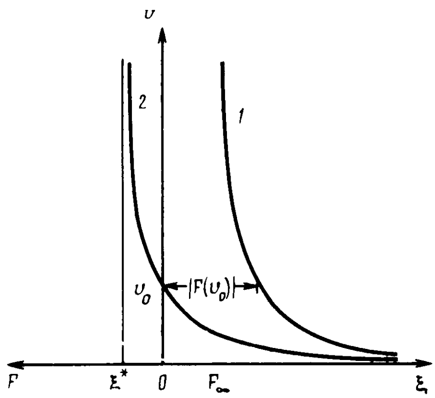
$$\xi=-(\beta Vc)^{-1}\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v(v^2+bc^{-1}v+ac^{-1})}\qquad(2.9)$$

Интеграл в правой части (2.9) выражается через элементарные функции. Имеем

$$\xi=-(F(v)-F(v_0)),\quad v_0>0,\quad 0\leqslant v<\infty\qquad(2.10)$$

$$F(v)=(\beta Vc)^{-1}\left(\frac{c}{a}\ln\frac{v}{\sqrt{(v+\nu)^2+m^2}}-\frac{b}{2am}\operatorname{arctg}\frac{v+\nu}{m}\right)\qquad(2.11)$$

$$\nu=\frac{b}{2c},\quad m=\frac{1}{2c}\sqrt{4ac-b^2},\quad 4ac-b^2>0$$



Фиг. 2

Хотя выразить здесь скорость v в явном виде через ξ не удается, но можно показать, что существует конечное время обострения. В самом деле, функция $F(v)$ в области $0\leqslant v<\infty$ является отрицательной, монотонно возрастающей непрерывной функцией и обладает следующими предельными значениями:

$$F(v\to0)\to-\infty,\ F(v\to\infty)\Rightarrow\pi b/(4am\beta Vc)=F_\infty$$

Качественное поведение функции $F(v)$ показана на фиг. 2 (кривая *1*). Здесь же показана зависимость между переменной ξ и скоростью v (кривая *2*). Как видно, эта зависимость имеет такой же вид, что и на фиг. 1, т. е. существует конечная точка $\xi^*=F(v_0)-F_\infty$, где скорость обращается в бесконечность. С другой стороны, по доказанному в первой части общему утверждению (см. (1.9)) $\xi^*=-VT_f$. Таким образом, имеем

$$T_f=V(F_\infty-F(v_0))>0$$

Анализ режимов обострения, приводимых здесь, может быть использован для принятия технологических решений при выборе режима воздействия на пласт рабочими агентами, обладающими неньютоновскими свойствами; с помощью теорем сравнения полученные решения можно использовать как верхние оценки для целого набора практических режимов воздействия на пласт, в том числе и режимов без обострения. Глубины локализации для таких режимов будут ограничены сверху соответствующим параметром теоретического S-режима.

В заключение автор выражает глубокую благодарность А. Х. Мирзаджанзаде за ценные советы и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зельдович Я. Б., Компанеец А. С.* К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сборник, посвященный 70-летию академика А. Ф. Иоффе. М., 1950. С. 61–71.
2. *Баренблатт Г. И.* О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // ПММ. 1952. Т. 16. № 1. С. 67–78.
3. *Мирзаджанзаде А. Х., Ковалев А. Г., Зайцев Ю. В.* Особенности эксплуатации месторождений аномальных нефтей. М.: Недра, 1972. 200 с.
4. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
5. *Огибалов П. М., Мирзаджанзаде А. Х.* Нестационарные движения вязко-пластичных сред. М.: Изд-во МГУ, 1970. 415 с.
6. *Бернадинер М. Г., Ентов В. М.* Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М.: Наука, 1975. 199 с.
7. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 477 с.
8. *Форхгеймер Ф.* Гидравлика. М.; Л.: ОНТИ. Глав. ред. энергет. лит-ры, 1949. 615 с.
9. *Мирчинк М. Ф., Мирзаджанзаде А. Х., Желтов Ю. В. и др.* Физико-геологические проблемы повышения нефтегазоотдачи пластов. М.: Недра, 1975. 230 с.
10. *Басниев К. С., Власов А. М., Кочина И. Н., Максимов В. М.* Подземная гидравлика. М.: Недра, 1986. 303 с.
11. *Азизов Х. Ф.* О граничных режимах с обострением в задачах нелинейной теории фильтрации // Докл. АН АзССР. 1990. Т. 46. № 3.

Баку

Поступила в редакцию
30.VII.1990