

УДК 532.526.5-3

© 1991 г.

С. Н. ТИМОШИН

ОСОБЕННОСТЬ В РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ, ОБУСЛОВЛЕННАЯ СТОЛКНОВЕНИЕМ ПРИСТЕННЫХ СТРУЙ

В рамках уравнений стационарного ламинарного пограничного слоя рассматривается задача о распространении вдоль твердой плоскости трехмерной струи вязкой несжимаемой жидкости, вытекающей из узкой криволинейной щели в затопленное пространство. Выделен класс начальных условий на выходе из щели, порождающий в струе поле скоростей без вторичных течений. В этом классе краевая задача для пространственного пограничного слоя расщепляется на две задачи меньшей размерности: динамическую и кинематическую. В результате анализа кинематической задачи определяется общая структура областей существования и единственности решения. Исследование динамической задачи показывает, что при подходе к границам области существования в решении уравнений пограничного слоя формируется особенность, которая характеризуется бесконечным увеличением толщины струи.

Как правило, расчет пограничного слоя при заданном распределении давления на телах сложной формы не удается выполнить на всей обтекаемой поверхности. Причиной тому служит появление разного рода особенностей, ограничивающих область существования решения. В плоскопараллельных задачах наиболее часто встречается особенность Гольдштейна [1], неизменным атрибутом которой является неблагоприятный градиент давления в окрестности особой точки. Численные [2-4] и аналитические исследования [5-8] показывают, что уравнения пространственного пограничного слоя также допускают появление особенности Гольдштейна, однако наряду с ней возможны особенности другого типа. Так, в [9, 10] было установлено, что интенсивное стекание жидкости с двух сторон к плоскости симметрии пограничного слоя может вызвать сингулярное поведение решения в плоскости симметрии. Эта особенность имеет принципиально трехмерный характер и реализуется в том случае, если давление сохраняется постоянным на линии симметрии и растет при отходе от линии симметрии в боковом направлении.

Завершенная теория особых решений уравнений пространственного пограничного слоя пока не создана. В частности, не известны в полном объеме обстоятельства, при которых такие особенности возникают. В связи с этим представляется интересным то положение (его иллюстрации как раз и посвящена данная работа), что решение уравнений трехмерного пограничного слоя может оказаться сингулярным даже при градиенте давления, тождественно равном нулю.

1. Постановка задачи. Качественный анализ. Вдоль твердой пластины, окруженной неподвижной вязкой жидкостью, из криволинейной щели вытекает узкая струя (фиг. 1). Течение предполагается ламинарным, установившимся. Обозначим через γ проекцию щели на плоскость пластины и примем в качестве масштабов длины и скорости характерные величины радиуса кривизны кривой γ — R и скорости жидкости на выходе из щели U_0 ; через ν обозначим кинематический коэффициент вязкости жидкости. Будем считать, что ширина щели h удовлетворяет условию $h/R = O(Re^{-1/2})$, где $Re = U_0 R \nu^{-1} \gg 1$ — число Рейнольдса. В этом случае распространение струи на расстояния, сравнимые с радиусом кривизны R , описываются уравнениями пространственного пограничного слоя без градиента давления

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

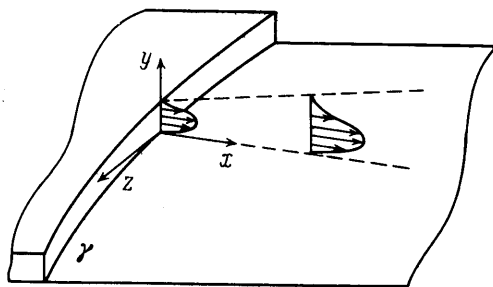
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Здесь подразумевается, что xR , zR — ортогональные декартовы координаты в плоскости пластины, $y \operatorname{Re}^{-1/2} R$ — расстояние до пластины по нормали к ней, uU_0 , wU_0 , $v \operatorname{Re}^{-1/2} U_0$ — соответствующие компоненты вектора скорости. Начало системы координат располагается на пластине на выходе из щели (фиг. 1), направление оси x выберем в дальнейшем из соображений удобства.

Решение системы уравнений (1.1) должно удовлетворять условию прилипания на твердой поверхности, а также условию отсутствия интенсивного движения вдали от струи

$$y=0: \quad u=v=w=0; \quad y \rightarrow +\infty: \quad u \rightarrow 0, \quad w \rightarrow 0 \quad (1.2)$$

Кроме того, необходимо задать профили двух составляющих вектора скорости — u и w на выходе из щели. Если проекция щели на плоскость



Фиг. 1

пластины является гладкой кривой γ , определяемой уравнениями $x = x_\gamma(s)$, $z = z_\gamma(s)$ (где s — длина дуги, отсчитываемая вдоль γ от начала координат), то условия на выходе из щели запишем в виде

$$(x, z) \in \gamma: \quad u = u_\gamma(s, y), \quad w = f_\gamma(s) u_\gamma(s, y) \quad (1.3)$$

где $f_\gamma(s)$ — достаточно произвольная функция.

Последнее условие в (1.3) означает, что параллельная пластине составляющая вектора скорости вытекающей жидкости имеет неизменное направление поперек щели, хотя вдоль щели это направление может меняться.

Общую структуру течения в струе, описываемой соотношениями (1.1)–(1.3), можно установить из качественных соображений. Заметим прежде всего, что, согласно условию (1.3), в потоке на выходе из щели отсутствуют вторичные течения. Но тогда в силу известного свойства пространственного пограничного слоя (см., например, [11]) вторичные течения будут отсутствовать во всем потоке. В самом деле, пусть ось x направлена вдоль вектора скорости вытекающей жидкости на линии $x=0$, $z=0$, тогда $f_\gamma(0)=0$. Из второго уравнения системы (1.1) в плоскости $z=0$ сразу получаем при тривиальных граничных и начальных условиях тривиальное решение $w(x, y, 0)=0$. Это и означает отсутствие вторичных течений.

Можно сказать также, что жидкие частицы, прошедшие через вертикальную линию $x=0$, $z=0$, все время остаются в плоскости $z=0$. Посколь-

ку выбор начала координат был сделан произвольно, можно утверждать, что и во всем пограничном слое линии тока располагаются в плоскостях, перпендикулярных плоскости пластины. Проекции линий тока на плоскость $y=0$ образуют семейство лучей, исходящих из кривой γ и образующих с осью x угол, тангенс которого, согласно (1.3), равен $f_{\tau}(s)$. Если на выходе из щели жидкость имеет тенденцию к стеканию, то указанное семейство лучей будет иметь огибающую. Можно ожидать, что при подходе к огибающей в решении задачи (1.1)–(1.3) будет формироваться особенность.

2. Структура особого решения. В соответствии с рассуждениями предыдущего параграфа ищем решение задачи (1.1)–(1.3) в виде

$$w(x, y, z) = f(x, z)u(x, y, z) \quad (2.1)$$

Исходная задача разбивается при этом на две: кинематическую, для определения функции $f(x, z)$, и динамическую

$$\frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial z} = 0; \quad (x, z) \in \gamma: \quad f = f_{\tau}(s) \quad (2.2)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + fu \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial (uf)}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$y=0: \quad u=v=0; \quad y \rightarrow +\infty: \quad u \rightarrow 0$$

$$(x, z) \in \gamma: \quad u = u_{\tau}(s, y)$$

Решение кинематической задачи (2.2) удобно представить в параметрической форме, используя в качестве параметра длину дуги s

$$f = f_{\tau}(s), \quad z = z_0(s) + x f_{\tau}(s) \quad (2.4)$$

$$z_0(s) = z_{\tau}(s) - x_{\tau}(s) f_{\tau}(s)$$

Второе из равенств (2.4) определяет в пространстве (x, y, z) семейство плоскостей $s = \text{const}$, ортогональных плоскости пластины, а первое равенство в (2.4) в совокупности с соотношением (2.1) показывает, что плоскости $s = \text{const}$ являются поверхностями тока данного течения.

При анализе динамической задачи (2.3) полезно вначале выполнить, используя (2.4), замену переменных (x, y, z) на переменные (x, y, s) . В результате получается динамическая задача меньшей размерности, в которой переменная s играет роль параметра (производную по s условимся обозначать штрихом). Затем заменой переменных

$$\xi = \frac{(z_0' + x f_{\tau}')^3 - (z_0' + x_{\tau} f_{\tau}')^3}{3 f_{\tau}' (z_0' + x_{\tau} f_{\tau}')^2} \quad (2.5)$$

$$\eta = y \frac{z_0' + x f_{\tau}'}{z_0' + x_{\tau} f_{\tau}'}$$

$$v = V \frac{\eta}{y} - u \eta f_{\tau}' \frac{z_0' + x f_{\tau}'}{(z_0' + x_{\tau} f_{\tau}')^2}$$

краевая задача (2.3) приводится к виду, в точности совпадающему с задачей для плоскопараллельной струи, вытекающей в направлении увели-

чения координаты ξ из щели, расположенной в сечении $\xi=0$

$$u \frac{\partial u}{\partial \xi} + V \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0 \quad (2.6)$$

$$\eta=0: u=V=0; \quad \eta \rightarrow +\infty: u \rightarrow 0; \quad \xi=0: u=u_\gamma(s, \eta)$$

Задача (2.6) имеет автомодельное решение, описывающее вытекание струи из точечной щели, а также дальнюю асимптотику неавтомодельной струи (см., например, [11]). При достаточно произвольном начальном профиле скорости $u_\gamma(s, \eta)$ решение можно получить численно. Не останавливаясь на детальном исследовании конкретных примеров, примем, что решение задачи (2.6) существует и регулярно при $\xi > 0$. Подобное предположение, несомненно, требует строгого формального обоснования. Однако для целей данной работы достаточно допустить, что профиль скорости u_γ относится к такому классу начальных данных, в котором указанные свойства будут выполняться.

Несмотря на то что решение динамической задачи (2.6), по предположению, регулярным образом зависит от приведенных переменных ξ, η , а также от параметра s , решение исходной пространственной задачи (1.1)–(1.3) может иметь особенности в тех точках физического пространства, где якобиан $D(x, y, z)/D(\xi, \eta, s)$ обращается в нуль или бесконечность. Несложные выкладки показывают, что особые множества представляют собой цилиндрические поверхности, определяемые в пространстве (x, y, z) соотношениями

$$x = -z_0'(s)/f_\gamma'(s), \quad z = z_0(s) - z_0'(s)f_\gamma(s)/f_\gamma'(s) \quad (2.7)$$

где s — параметр, а функция $z_0(s)$ определена в (2.4).

В плоскости $y=0$ соотношения (2.7) задают кривую, огибающую семейства лучей (2.4), на которые проектируются линии тока в пограничном слое. В соответствии с (2.1) эти лучи можно рассматривать и как предельные линии тока (или векторные линии напряжения трения) на твердой поверхности.

Определенное представление относительно формы особой линии можно получить в случае истечения жидкости по нормали к щели. При этом $f_\gamma(s) = -x_\gamma'(s)/z_\gamma'(s)$ и после некоторых преобразований уравнение особой линии принимает вид

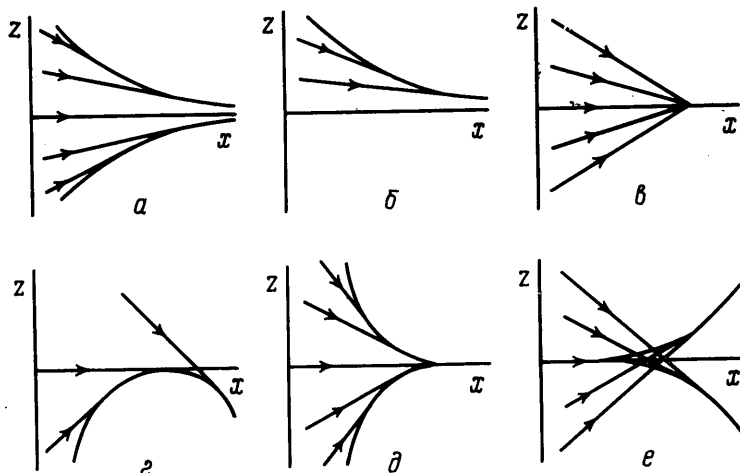
$$x - x_\gamma = \frac{z_\gamma'}{x_\gamma'' z_\gamma' - x_\gamma' z_\gamma''}, \quad z - z_\gamma = \frac{x_\gamma'}{x_\gamma' z_\gamma'' - x_\gamma'' z_\gamma'} \quad (2.8)$$

Соотношения (2.8) определяют эволюту кривой γ , т. е. расстояние между кривой γ и особой линией, измеренное вдоль произвольного луча $s = \text{const}$, равно радиусу кривизны кривой γ в точке испускания данного луча.

Рассматривая более общие условия истечения жидкости из щели, ограничимся случаем аналитической кривой γ и аналитическими начальными данными. Выберем на кривой γ произвольную точку, например $s=0$, и, как и прежде, направим ось x вдоль проекции вектора скорости вытекающей жидкости на плоскость пластины. Тогда имеем $x_\gamma(0) = z_\gamma(0) = -f_\gamma(0) = 0$. Уравнение кривой γ , а также функцию $f_\gamma(s)$ представим при $s \rightarrow 0$ в виде

$$x_\gamma(s) = as^l + \dots, \quad z_\gamma(s) = bs^m + \dots, \quad f_\gamma(s) = cs^n + \dots \quad (2.9)$$

где l, m, n — положительные целые числа. По определению длины дуги справедливо равенство $x_\gamma'^2 + z_\gamma'^2 = 1$, поэтому хотя бы одно из двух чисел l и m равно единице. Если исключить из рассмотрения тот физически



Фиг. 2

маловероятный случай, когда жидкость вытекает по касательной к щели, то необходимо в (2.9) положить $m=1$, при этом $z_0(s)=bs+\dots$. Пусть сначала в выражении для f_1 выполняется условие $n \geq 2$. Тогда в силу (2.7) уравнение особой линии в окрестности луча $s=0$ (или оси x) имеет вид

$$x = -bs^{1-n}/(cn) + \dots, \quad z = b(1-1/n)s + \dots$$

Из полученных соотношений сразу следует, что на луче $s=0$ особые точки отсутствуют. Их нет также вблизи положительной полуоси x в том случае, если n — нечетное число и $b/c > 0$. Если же n — нечетное, но $b/c < 0$, то ось x является асимптотой для двух ветвей особой линии (фиг. 2, а; напомним, что особая линия на пластине является огибающей семейства лучей — предельных линий тока, которые также показаны на фиг. 2). При n — четном полуось x оказывается асимптотой для одной ветви особой кривой (фиг. 2, б), которая, в зависимости от знаков постоянных b и c , располагается выше или ниже оси x . Допустим теперь, что $n=1$. Тогда из соотношений (2.7) находим абсциссу особой точки на оси x : $x = -b/c$. Интересен тот случай, когда особая точка находится в поле течения, т. е. $b/c < 0$. Для того чтобы описать форму особой линии в окрестности точки $z=0, x=-b/c$, необходимо учесть следующие члены разложения (2.9). Рассмотрим для этого разность $z_0(s) - bf_1(s)/c$. Если при всех s эта разность тождественно равна нулю, то особая точка оказывается изолированной (фиг. 2, в). В противном случае при $s \rightarrow 0$ можно записать

$$z_0(s) - bf_1(s)/c = b_1 s^{m_1} + \dots, \quad m_1 \geq 2$$

После преобразований получим уравнение особой кривой в виде

$$x = -b/c - b_1 m_1 s^{m_1-1}/c + \dots, \quad z = b_1(1-m_1)s^{m_1} + \dots \quad (2.10)$$

Отсюда следует, что при четном m_1 особая линия располагается выше или ниже оси x (в зависимости от знака постоянной b) и касается оси в точке $x = -b/c$ (фиг. 2, в). Здесь нужно отметить случай $m_1=2$, поскольку он соответствует регулярной (в смысле гладкости особой кривой) точке. Если m_1 — нечетное число, то на оси x располагается точка возврата особой линии, причем решение уравнений пограничного слоя в окрестности точки возврата может быть как одно- (фиг. 2, д), так и двузначным (фиг. 2, е). Перечисленные варианты исчерпывают возможные типы то-

чек на особой кривой, которая возникает при аналитических начальных данных.

Остается рассмотреть динамические характеристики струн в окрестности особой линии. Это можно сделать на основе введенного выше предположения о регулярности решения задачи (2.6) в переменных ξ, η . Ограничимся анализом решения возле регулярной точки особой кривой (фиг. 2, z). Положим в соотношениях (2.10) $m_1=2$ и обозначим $x_* = x + b/c$. В окрестности точки касания оси абсцисс с особой линией на фиг. 2, z имеем

$$s \rightarrow 0, \quad x_* \rightarrow 0, \quad z \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow \xi_* = -b/(3c) \quad (2.11)$$

$$u \rightarrow u_*(\eta) = u(\xi_*, \eta)$$

Используя наряду с (2.11) формулы перехода от переменных (ξ, η, s) к переменным (x, y, z) (см. (2.4), (2.5), а также соотношения (2.1), (2.9)), получим представление двух составляющих вектора скорости, параллельных плоскости пластины, в окрестности точки $x_* = z = 0$

$$u = u_* \left(y \left(-\frac{c}{b} \right) \sqrt{x_*^2 + \frac{4b_1}{c^2} z} \right) + \dots \quad (2.12)$$

$$w = -\frac{c_2}{2b_1} \left(x_* + \sqrt{x_*^2 + \frac{4b_1}{c^2} z} \right) u_* \left(y \left(-\frac{c}{b} \right) \sqrt{x_*^2 + \frac{4b_1}{c^2} z} \right) + \dots$$

Эти соотношения имеют смысл с той стороны от особой линии, где подкоренное выражение принимает неотрицательные значения. Из формул (2.12) следует, что при подходе к особой линии ширина струи неограниченно возрастает по закону

$$y = O((x_*^2 + 4b_1 z/c^2)^{-1/2})$$

Степень расширения струи зависит от направления: если при подходе по касательной $y = O(|x_*|^{-1})$, то в нормальном направлении $y = O(|z|^{-1/2})$. По мере приближения к особой линии по нормали (что соответствует $x_* = 0$ в (2.12)) максимум касательной к особой линии составляющей вектора скорости u остается конечным по величине, в то время как максимум нормальной составляющей обращается в нуль пропорционально корню квадратному из расстояния.

3. Обсуждение результатов. Вязкие струи без вторичных течений составляют, конечно же, очень специальный класс пространственных пограничных слоев. Формально это обусловлено тем, что характерные для трехмерных задач зоны зависимости и влияния в виде криволинейных клиньев [12] в данном случае вырождаются в плоскости. Но именно за счет такого глубокого вырождения удается, не потеряв некоторых существенных черт пространственного течения, достаточно полно исследовать аналитическую природу решения, включая такие вопросы, как зависимость формы особой кривой от начальных данных и асимптотическое поведение решения вблизи особой линии.

Построенное в работе сингулярное решение уравнений пространственного пограничного слоя обладает некоторыми интересными свойствами. Так, в отличие от большинства известных примеров асимптотическое представление решения возле особой линии не содержит собственных функций. Вероятно, это объясняется отмеченным выше вырождением задачи. Следует указать также, что, невзирая на существенно «вязкий» характер рассматриваемой задачи, математические причины появления особенности в данном случае всецело обусловлены гиперболическими

свойствами квазилинейного конвективного оператора в уравнениях импульсов. В этом можно убедиться, заметив, что особенность с той же структурой сохраняется и у «невязкого» варианта краевой задачи.

С физической точки зрения формирование обсуждаемой особенности можно представить как результат столкновения вязких струй возле некоторой линии (см. также [9, 10]). Однако к подобной интерпретации следует относиться с известной долей осторожности до тех пор, пока не будет установлено, что при учете отброшенных членов в полных уравнениях Навье — Стокса особенность может быть устранена. В противном случае особенность оказывается лишенной физического смысла.

Обращение к полным уравнениям движения вязкой жидкости, по-видимому, неизбежно также в ситуации, изображенной на фиг. 2, *e*, когда уравнения пограничного слоя допускают двузначные решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Goldstein S. On laminar boundary-layer flow near a position of separation // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1948. V. 1. Pt 1. P. 43–69.
2. Wang K. C. Three-dimensional boundary layer near the plane of symmetry of a spheroid at incidence // J. Fluid Mech. 1970. V. 43. Pt 1. P. 187–209.
3. Cebeci T., Khattab A. K., Stewartson K. On nose separation // J. Fluid. Mech. 1980. V. 97. Pt 3. P. 435–454.
4. Cebeci T., Khattab A. K., Stewartson K. Threldimensional laminar boundary layers and the ok of accessibility // J. Fluid Mech. 1981. V. 107. P. 57–87.
5. Brown S. N. Singularities associated with separating boundary layers // Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A. 1965. V. 257. № 1084. P. 409–444.
6. Buckmaster J. Perturbation technique for the study of three-dimensional separation // Phys. Fluids. 1972. V. 15. № 12. P. 2106–2113.
7. Замегаев В. Б. Особое решение уравнений пограничного слоя на тонком конусе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 2. С. 65–72.
8. Замегаев В. Б. Формирование особенностей в пространственном пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 2. С. 58–64.
9. Stewartson K., Simpson C. J. On a singularity initiating a boundary-layer collision // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1982. V. 35. № 1. P. 1–16.
10. Cebeci T., Stewartson K., Brown S. N. Nonsimilar boundary layers on the leeside of cones at incidence // Int. J. Comput. Fluids. 1983. V. 11. № 3. P. 175–186.
11. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М.: Физматгиз, 1962. 479 с.
12. Wang K. C. On the determination of the zones of influence and dependence for three-dimensional boundary-layer equations // J. Fluid. Mech. 1971. V. 48. Pt 2. P. 397–404.

Москва

Поступила в редакцию
29.X.1990