

УДК 532.526.013.4:534.29

© 1991 г.

А. В. ФЕДОРОВ, А. П. ХОХЛОВ

## **ВОЗБУЖДЕНИЕ НЕУСТОЙЧИВЫХ МОД В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ АКУСТИЧЕСКИМИ ВОЛНАМИ**

Результаты экспериментальных и теоретических исследований восприимчивости дозвуковых пограничных слоев к акустическим возмущениям изложены в [1–3]. Основные выводы этих работ состоят в следующем. Звуковые волны возбуждают волны неустойчивости на пространственных неоднородностях основного течения. В дозвуковом потоке длина волны звука много больше характерного масштаба неустойчивой моды, поэтому интенсивное возбуждение происходит на неоднородностях, масштаб которых соизмерим с длиной волны неустойчивости. Если на пластине нет неровностей или других источников локальной неоднородности, то возбуждение сосредоточено в окрестности передней кромки на масштабе нескольких длин волн неустойчивости [4]. Однако собственные колебания, возникающие возле передней кромки, попадают в зону сильного затухания и приходят в точку потери устойчивости с малой амплитудой. Поэтому с данным механизмом может конкурировать распределенная генерация, обусловленная непараллельностью течения в пограничном слое [1]. Ее эффективность намного слабее, но накачка неустойчивых волн происходит непосредственно в окрестности нижней ветви нейтральной кривой.

Ситуация качественно меняется при переходе к сверхзвуковым течениям. Декременты собственных колебаний резко уменьшаются в области, лежащей вверх по потоку от нейтральной кривой, экранирование передней кромки ослабевает [5]. По мере приближения к передней кромке собственные колебания пограничного слоя синхронизируются со звуковыми волнами, распространяющимися параллельно поверхности пластины [6]. Следовательно, такие волны могут интенсивно возбуждать неустойчивые моды. Естественно предположить, что окрестность передней кромки играет доминирующую роль в возбуждении неустойчивости сверхзвукового пограничного слоя. Данное предположение подтверждается экспериментами [7], в его пользу свидетельствует эффект сильного влияния притупления передней кромки на местоположение перехода [8].

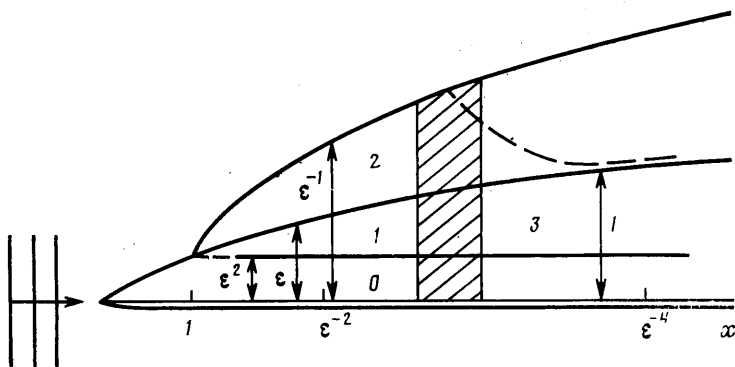
В настоящей работе анализируется возбуждение первой и второй мод пограничного слоя звуковыми волнами в окрестности острой передней кромки пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа.

1. На стационарный поток, обтекающий полубесконечную пластину, накладывается волна, падающая под нулевым углом к стенке (см. фиг. 1)

$$P = (\gamma M^2)^{-1} + h \operatorname{Re} \{ \exp[i\alpha_a(X - c_a^* \tau)] \}$$

Здесь  $P$  — давление, отнесенное к  $\rho_\infty U_\infty^2$ ,  $M > 1$  — число Маха набегающего потока,  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $\alpha_a$  — волновое число,  $c_a^* = U_\infty (1 \pm \pm 1/M)$  — фазовая скорость,  $X$  — продольная координата,  $\tau$  — время. Предполагается, что частотный параметр  $F = v_\infty \omega^* / U_\infty^2 \ll 1$  ( $\omega^* = \alpha_a c_a^*$  — частота), амплитуда  $h$  достаточно мала, чтобы была пригодна линейная теория.

На расстоянии от передней кромки порядка длины волны,  $L_1 \sim \alpha_a^{-1}$ , справедлива иерархическая процедура Прандтля: в главном приближении пограничный слой не искажает внешнюю акустическую волну, пограничное решение рассчитывается при заданных параметрах последней, затем находятся поправки к невязкому возмущению (они порядка  $\sqrt{F}$ ) и т. д.



Фиг. 1

В области с характерным масштабом  $L_2 \gg \alpha_a^{-1}$  течение представляется в виде комбинации медленно меняющегося по  $X$  стационарного пограничного слоя и быстро осциллирующего возмущения. Из-за непараллельности основного течения происходит дифракция волны, которая искажает акустическое поле в пристенной области толщиной  $D$ . Этот масштаб легко оценить с помощью уравнения для звуковых волн в однородном потоке

$$p_{\gamma\gamma} = (M^2 - 1)p_{xx} + 2M^2 p_{x\tau} + M^2 p_{\tau\tau}$$

Здесь  $p$  — пульсации давления. Искажение волнового числа монохроматического возмущения  $\sim L_2^{-1}$ , т. е.  $p_{\gamma\gamma} = O(\alpha_a/L_2)p$ ,  $D = \sqrt{L_2/\alpha_a}$ . Изменения амплитуды волны определяются поведением решения в пограничном слое, толщина вытеснения которого  $\delta^* = \Delta \sqrt{v_\infty L_2/U_\infty}$ . Из уравнения для продольного и поперечного импульсов  $p_\gamma \sim v_x$ ,  $p_x \sim u_x$ , из уравнения неразрывности  $v_\gamma \sim u_x$ , следовательно,  $p_\gamma = O(\delta^* \alpha_a^2)p$ . Иерархическая схема разрушается, когда амплитуда меняется на свой основной порядок, т. е.  $p_\gamma D = O(p)$  или  $L_2 = (\Delta \alpha_a \sqrt{F})^{-1}$ . Таким образом, в области  $X = O(\Delta^{-1} \alpha_a^{-1} F^{-1/2})$ ,  $Y = O(\Delta^{-1/2} \alpha_a^{-1} F^{-1/4})$  непараллельность пограничного слоя сильно влияет на эволюцию возмущения.

При  $X \sim L_2$  вязкий подслей (слой Стокса) имеет толщину  $\delta_s = \sqrt{v_\infty/\omega^*}$  и лежит на дне пограничного слоя,  $\delta_s/\delta^* \sim F^{1/4} \Delta^{-1/2}$ ; пограничный слой лежит на дне области дифракции  $\delta^*/D \sim F^{1/2} \Delta$ . Кроме того,  $\alpha_a^{-1}/\delta^* \sim F^{-1/4} \Delta^{-1/2}$ ,  $\alpha_a^{-1}/D \sim F^{1/4} \Delta^{1/2}$ , т. е. возмущение является коротковолновым в метрике области дифракции и длинноволновым в метрике пограничного слоя. Перечисленные свойства существенно облегчают построение решения.

Когда толщина вытеснения порядка длины волны, справедливо локально-параллельное приближение, которое описывает акустическое поле и собственные колебания в пограничном слое. К последним относятся первая и вторая неустойчивые моды. В этом случае характерный продольный масштаб  $L_3 = \Delta^{-2} \alpha_a^{-1} F^{-1}$ . Ниже будет показано, что в пограничном слое при  $X/L_2 \rightarrow \infty$  асимптотика возмущения разделяется на две части, одна из которых сращивается с асимптотикой первой и второй мод при  $X/L_3 \rightarrow 0$ . Безразмерная толщина вытеснения  $\Delta$  включена в оценки, чтобы учесть сильную зависимость толщины пограничного слоя от числа Маха и температурного фактора.

Обезразмерим координаты и время по длине и периоду падающей акустической волны:  $x = \alpha_a X$ ,  $y = \alpha_a Y$ ,  $t = \alpha_a U_\infty \tau$ . Введем малый параметр  $\epsilon = F^{1/4} \Delta^{1/2}$ . Учитывая сказанное выше, имеем следующие характерные масштабы:

$$x = (x_1, \epsilon^{-2} x_2, \epsilon^{-4} x_3), \quad y = (\epsilon^2 y_0, \epsilon y_1, \epsilon^{-1} y_2, y_3)$$

На фиг. 1 схематично изображены характерные области: 0 — слой Стокса; 1, 3 — пограничный слой; 2 — область дифракции акустической волны.

2. В области 1 с переменными  $x_2=O(1)$ ,  $y_1=O(1)$  решение представим в виде

$$\begin{aligned} U_s &= U(x_2, y_1) + O(\varepsilon^3) + h \operatorname{Re} \{u_1(x_2, y_1) \exp[i(x_1 - c_a t)]\} + O(\varepsilon) \\ V_s &= \varepsilon^3 V(x_2, y_1) + O(\varepsilon^6) + h \operatorname{Re} \{\varepsilon v_1(x_2, y_1) \exp[i(x_1 - c_a t)]\} + O(\varepsilon^2) \\ P &= (\gamma M^2)^{-1} + O(\varepsilon^3) + h \operatorname{Re} \{p_1(x_2, y_1) \exp[i(x_1 - c_a t)]\} + O(\varepsilon) \\ T_s &= T(x_2, y_1) + O(\varepsilon^3) + h \operatorname{Re} \{\theta_1(x_2, y_1) \exp[i(x_1 - c_a t)]\} + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь и далее  $c_a = 1 \pm 1/M$  — безразмерная фазовая скорость акустической волны,  $U_s$ ,  $V_s$ ,  $T_s$  —  $x$ -,  $y$ -компоненты скорости и температура, относенные к  $U_\infty$ ,  $T_\infty$  соответственно.

В старшем приближении по  $\varepsilon$  получаем систему

$$\left(\frac{v_1}{U - c_a}\right)' = i \left[ \frac{T}{(U - c_a)^2} - M^2 \right] p_1, \quad p_1' = 0 \quad (2.2)$$

$$v_1(x_2, 0) = 0 \quad (2.3)$$

Штрих обозначает дифференцирование по  $y_1$ , условие непротекания (2.3) — следствие сращения решения в вязком подслое 0 с решением в невязкой области 1. Из (2.2) следует, что давление  $p_1$  постоянно поперек пограничного слоя, вертикальная компонента скорости

$$v_1 = i p_1(x_2) (U - c_a) \int_0^{y_1} \left[ \frac{T}{(U - c_a)^2} - M^2 \right] dy_1$$

Для  $c_a = 1 - 1/M$  амплитуда  $v_1(y_1)$  имеет особенность в критической точке  $y_{1c}$ :  $U(y_{1c}) = c_a$ . Особую точку  $y_{1c}$  нужно обходить снизу в комплексной  $y_1$ -плоскости [9]. Учитывая, что невозмущенное течение автомодельно, т. е. зависит от переменной  $\eta = y_1/\sqrt{x_2}$ , получаем условие на внешней границе пограничного слоя

$$v_1 = i(1 - c_a) p(x_2) \sqrt{x_2} k, \quad y_1 \rightarrow \infty \quad (2.4)$$

$$k = \int_0^\infty \left\{ \frac{T}{(U - c_a)^2} - M^2 \right\} d\eta \quad (2.5)$$

В области 2 с переменными  $x_2=O(1)$ ,  $y_2=O(1)$  решение представим в виде

$$\begin{aligned} U_s &= 1 + O(\varepsilon^3) + h \operatorname{Re} \{u_2(x_2, y_2) \exp[i(x_1 - c_a t)]\} + O(\varepsilon) \\ V_s &= \varepsilon^3 V(x_2, y_2) + O(\varepsilon^6) + h \operatorname{Re} \{\varepsilon v_2(x_2, y_2) \exp[i(x_1 - c_a t)]\} + O(\varepsilon) \\ P_s &= (\gamma M^2)^{-1} + O(\varepsilon^3) + h \operatorname{Re} \{p_2(x_2, y_2) \exp[i(x_1 - c_a t)]\} + O(\varepsilon) \\ T_s &= 1 + O(\varepsilon^3) + h \operatorname{Re} \{\theta_2(x_2, y_2) \exp[i(x_1 - c_a t)]\} + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

В старшем приближении по  $\varepsilon$  получаем задачу для  $p_2$

$$\frac{\partial^2 p_2}{\partial y_2^2} = 2i [M^2(1 - c_a) - 1] \frac{\partial p_2}{\partial x_2} \quad (2.6)$$

$$p_2(x_2, \infty) = 1, \quad \frac{\partial p_2}{\partial y_2}(x_2, 0) = -i v_2(x_2, 0) (1 - c_a) \quad (2.7)$$

$$p_2(0, y_2) = 1 \quad (2.8)$$

Начальное условие (2.8) — следствие того, что при  $x=O(1)$  выполняется иерархическая схема Прандтля, согласно которой акустическая волна в невязкой области имеет амплитуду  $p=1+O(\varepsilon^2)$ . Из условий непрерывности  $v_2(y_2 \rightarrow 0) = v_1(y_1 \rightarrow \infty)$ ,  $p_2(y_2 \rightarrow 0) = p_1$  и соотношений (2.4), (2.7) находим граничное условие

$$\frac{\partial p_2}{\partial y_2} = (1-c_a)^2 k \sqrt{x_2} p_2, \quad y_2=0 \quad (2.9)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что решение имеет вид

$$p_2 = - \int_0^{x_1} \frac{\partial p_2}{\partial y_2}(\xi, 0) \frac{\exp\{-2iy_2^2[M^2(1-c_a)-1]/4(x_2-\xi)\}}{\sqrt{2\pi i(x_2-\xi)}[M^2(1-c_a)-1]} d\xi + 1$$

Здесь и далее  $\arg(\sqrt{\pm i}) = \pm \pi/4$ . Учитывая (2.9) и принимая во внимание, что  $p_2(x_2, 0) = p_1$ , получаем интегральное уравнение для давления в пограничном слое

$$p_1(x_2) = \lambda \int_0^{x_2} \sqrt{\frac{\xi}{x_2-\xi}} p_1(\xi) d\xi + 1 \quad (2.10)$$

$$\lambda = -(1-c_a)^2 k \{2\pi i [M^2(1-c_a)-1]\}^{-1/2} \quad (2.11)$$

Решение уравнения (2.10) единственно и представляется в виде ряда

$$p_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\lambda x_2)^n \pi^{n/2}, \quad a_0 = 1, \quad a_n = \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(j+1/2)}{\Gamma(j+1)} \quad (2.12)$$

Нетрудно получить асимптотику решения при  $x_2 \rightarrow \infty$  [10]

$$p_1 = (8\pi)^{1/4} A (\pi \lambda^2 x_2^2)^{1/8} \exp(\lambda^2 x_2^2 \pi / 2) [1 + O(x_2^{-2})] - (\pi \lambda x_2)^{-1} [1 + O(x_2^{-1})].$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1/2} a_n \sqrt{\Gamma(n+3/2)} = 0,935 \dots$$

$$\operatorname{Re} \lambda > 0. \quad (2.13)$$

Второе слагаемое соответствует акустическому полю в пристенной области. Первое слагаемое, как будет показано ниже, является «затравкой» для первой моды пограничного слоя при  $c_a = 1 - 1/M$  и второй — при  $c_a = 1 + 1/M$ .

3. Чтобы построить решение в области  $\mathcal{Z}$  с переменными  $x_3 = O(1)$ ,  $y_3 = O(1)$ , воспользуемся формализмом, развитым в [1, 11]. Поскольку за характерный масштаб длины принята величина  $\alpha_a^{-1}$ , число Рейнольдса определяется соотношением  $R = \alpha_a^{-1} U_\infty / \nu_\infty = c_a \Delta^2 \varepsilon^{-4}$ . Характеристики основного течения и вектор возмущения  $\mathbf{z}$  представим в виде

$$U = U(x_3, y_3), \quad V = \varepsilon^4 V_0(x_3, y_3), \quad P = P(x_3), \quad T = T(x_3, y_3) \\ \mathbf{z} = [\mathbf{z}_0(x_3, y_3) + \varepsilon^4 \mathbf{z}_1(x_3, y_3) + \dots] \exp[i(S - \omega t)] \quad (3.1)$$

$$\mathbf{z} = \left( u, \frac{\partial u}{\partial y_3}, v, p, \theta, \frac{\partial \theta}{\partial y_3} \right)^T, \quad S = \varepsilon^{-4} \int_0^{x_3} \alpha dx_3$$

Амплитуда возмущения  $z_0$  и собственное значение  $\alpha$  определяются из краевой задачи

$$\frac{\partial z_0}{\partial y_3} = A_0 z_0 \quad (3.2)$$

$$z_{01} = z_{03} = z_{05} = 0, \quad y_3 = 0; \quad |z_0| \rightarrow 0, \quad y_3 \rightarrow \infty$$

Ненулевые элементы матрицы  $A_0$  размерности  $6 \times 6$  даны в [11], они соответствуют системе Лиза — Лия для двумерных возмущений. Задача на собственные значения обычно решается численно, собственное решение имеет вид

$$z_0 = a(x_3) \xi(x_3, y_3) \quad (3.3)$$

Амплитудная функция  $a(x_3)$  определяется из условий разрешимости следующего приближения:

$$\langle B \xi, \xi \rangle \frac{da}{dx_3} + a \left[ \left\langle B \frac{\partial \xi}{\partial x_3}, \xi \right\rangle + \langle G \xi, \xi \rangle \right] = 0 \quad (3.4)$$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty \sum_{n=1}^6 f_n g_n^* dy_3$$

Здесь  $\xi, \bar{\xi}$  — собственные функции прямой и сопряженной задач;  $B = -i \partial A_0 / \partial \alpha$ ; матрица  $G$  содержит элементы, пропорциональные  $\partial U / \partial x_3, \partial T / \partial x_3, V_0, \partial V_0 / \partial y_3$ ; их явный вид приведен в приложении [11]. Собственную функцию нормируем условием  $\xi_4(x_3, 0) = 1$ , тогда амплитуда возмущения давления на стенке равна  $a(x_3)$ . Функция  $a$  определена с точностью до постоянного множителя. Чтобы получить однозначное решение, необходимо дополнить уравнение (3.4) начальными условиями, т. е. найти связь амплитуды внешней волны с амплитудой собственных колебаний пограничного слоя. Для этого исследуем поведение собственного решения при  $x_3 \rightarrow 0$ .

Сначала рассмотрим асимптотику собственного значения  $\alpha$  и собственной функции  $\xi$ . В старшем приближении по  $\epsilon$  система (3.2) сводится к краевой задаче для невязких возмущений, которая в автомодельных переменных  $\eta$  имеет вид

$$p'' - \left( \frac{2U'}{U-c} - \frac{T'}{T} \right) p' + x_3 \alpha^2 \left[ \frac{M^2}{T} (U-c)^2 - 1 \right] p = 0$$

$$p'(x_3, 0) = 0; \quad p(x_3, \eta) \rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow \infty \quad (3.5)$$

Здесь  $p$  — амплитуда возмущения давления, нормированная условием  $p(x_3, 0) = 1$ , штрих — дифференцирование по  $\eta$ . Асимптотику собственного значения представим в виде

$$\alpha = 1 + b x_3 + \dots, \quad x_3 \rightarrow 0 \quad (3.6)$$

Решение задачи (3.5) имеет двухслойную структуру  $\eta = (\eta_1, x_3^{-1} \eta_2)$

$$\eta_1 = O(1), \quad p = 1 + p_{11} x_3 + \dots$$

$$p_{11} = \int_0^{\eta_1} \frac{(U-c_a)}{T} dz \int_0^z \left[ \frac{T}{(U-c_a)^2} - M^2 \right] ds \quad (3.7)$$

$$\eta_2 = O(1), \quad p = p_{20} + x_3 p_{21} + \dots$$

$$\frac{d^2 p_{20}}{d\eta_2^2} + 2[M^2(1-c_a) - 1] b p_{20} = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{d p_{20}}{d\eta_2}(0) = \frac{d p_{11}}{d\eta_1}(\infty), \quad p_{20} \rightarrow 0, \quad \eta_2 \rightarrow \infty$$

Решая задачу (3.8), находим собственные значения при  $\text{Re } k < 0$

$$\alpha_{1,2} = 1 - \frac{(1-c_a)^4 k^2}{2[M^2(1-c_a) - 1]} x_3 + \dots, \quad c_a = 1 \mp \frac{1}{M} \quad (3.9)$$

На фиг. 2 приведены зависимости  $\text{Re}[\alpha_1(x_3)]$  и  $\text{Im}[\alpha_1(x_3)]$  (кривые 1, 2 соответственно), полученные в результате численного интегрирования уравнения (3.5) для пограничного слоя с параметрами:  $M=4$ , температурный фактор обтекаемой поверхности  $T_f=1$ ,  $\gamma=1,4$ ,  $\text{Pr}=0,72$ , коэффициент вязкости вычислялся по формуле Сазерленда при температуре торможения 310 К. Сравнение с асимптотикой (3.9) показано штриховыми линиями. Аналогичные данные для второй моды приведены на фиг. 3, сравнение с асимптотикой изображено в увеличенном масштабе в левом верхнем углу графика. Наблюдается хорошее соответствие точного и асимптотического решений. Таким образом, первая и вторая моды синхронизируются при  $x_3 \rightarrow 0$  со звуковыми волнами, распространяющимися параллельно поверхности пластины. Согласно данным [12], это свойство выполняется в широком диапазоне чисел Маха, температурного фактора, частотного параметра. Расчеты, выполненные по полной системе линеаризованных уравнений Навье — Стокса, показали, что учет вязкости не приводит к нарушению эффекта синхронизации.

Найдем асимптотику амплитудной функции  $a(x_3)$ , используя вид разложения (3.6) и анализируя систему (3.2). Представим собственные функции прямой и сопряженной задач в виде линейной комбинации трех векторов так, чтобы при  $y_3 \rightarrow \infty$

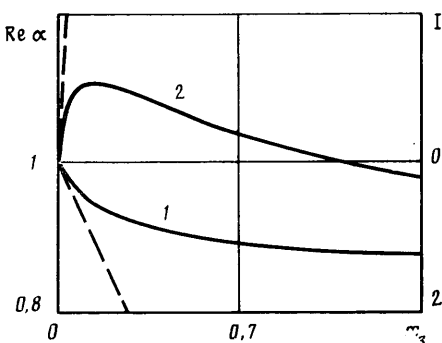
$$\xi \rightarrow \sum_{j=1}^3 g_j \exp(\lambda_j y_3), \quad \bar{\xi} \rightarrow \sum_{j=1}^3 f_j \exp(\lambda_j y_3), \quad \text{Re } \lambda_j < 0$$

$$\lambda_1^2 = i\alpha R(1-c_a) + O(1) = O(\Delta^2 \varepsilon^{-4})$$

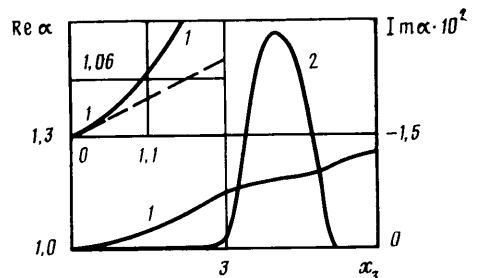
$$\lambda_2^2 = i\alpha \text{Pr} R(1-c_a) + O(1) = O(\Delta^2 \varepsilon^{-4})$$

$$\lambda_3^2 = \alpha^2 - M^2(\alpha - \omega)^2 + O(R^{-1}) = 2b[1 - M^2(1-c_a)]x_3 + O(x_3^2) + O(\Delta^{-2} \varepsilon^4)$$

Здесь  $\lambda_j$  — корни характеристического уравнения. Первые два вектора быстро затухают вне пограничного слоя, третий формирует решение в не-



Фиг. 2



Фиг. 3

вязкой области, где декремент  $\text{Re}(\lambda_3) \rightarrow 0$  при  $x_3 \rightarrow 0$ . Поэтому главный вклад в скалярные произведения, входящие в (3.4), дают асимптотические «хвосты» слагаемых, пропорциональных  $\mathbf{g}_3, \mathbf{f}_3$ . Учитывая это свойство и используя автомодельность основного течения, нетрудно получить

$$\langle B\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle = -\frac{(B_\infty \mathbf{g}_3, \mathbf{f}_3^*)}{2\mu \sqrt{x_3}} [1 + O(x_3)]$$

$$\left\langle B \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x_3}, \boldsymbol{\xi} \right\rangle = -\frac{(B_\infty \mathbf{g}_3, \mathbf{f}_3^*)}{8\mu x_3^{3/2}} [1 + O(x_3)]$$
(3.10)

$$\langle G\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle = O(x_3^{-1/2}), \quad \mu = 2b[1 - M^2(1 - c_a)]$$

Здесь  $B_\infty$  — асимптотика матрицы  $B$  при  $y_3 \rightarrow \infty$ . Подставляя (3.10) в (3.4) и интегрируя, находим в главном приближении

$$a(x_3) = Cx_3^{3/4}, \quad C = \text{const} \quad (3.11)$$

Из соотношений (3.1), (3.3), (3.7), (3.9), (3.11) находим асимптотику для возмущений давления в пограничном слое при  $x_3 \rightarrow 0$

$$p = p_3(x_3) \exp[i(x_1 - c_a t)], \quad p_3 = Cx_3^{3/4} \exp[\Lambda^2 \varepsilon^{-4} x_3^2]$$
(3.12)

$$\Lambda^2 = -i \frac{(1 - c_a)^4 k^2}{4[M^2(1 - c_a) - 1]}$$

Первое слагаемое (2.13) совпадает с асимптотикой (3.12) с точностью до постоянного множителя, т. е. области  $I$  и  $3$  перекрываются (заштрихованная зона на фиг. 1). Выполняя сращивание, получим

$$C = h\varepsilon^{-1/2} (8\pi)^{1/4} A (\pi \lambda^2)^{1/8} \quad (3.13)$$

Таким образом, определена связь между собственным решением (3.3), описывающим первую и вторую моды пограничного слоя, и параметрами внешней акустической волны. Возбуждение собственных колебаний происходит в значительно более широкой области по сравнению с дозвуковым пограничным слоем [4], что обусловлено эффектом синхронизации первой и второй мод со звуковыми волнами. Величина  $C_0 = h^{-1} \varepsilon^{1/2} |C|$  зависит только от характеристик основного течения через интегральный параметр  $k$ . На фиг. 4 приведены функции  $C_0(M)$  для первой моды при различных значениях  $T_j$ , указанных в поле графика.

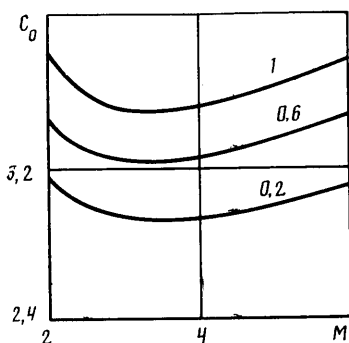
Существует такая нормировка собственной функции  $\boldsymbol{\xi}$ , при которой начальное условие для  $a(x_3)$  зависит только от амплитуды падающей звуковой волны:  $\xi_i(x_3, 0) = [2i(S - S_a)]^{1/2}$ , где  $S_a = x_3 \varepsilon^{-4}$  — эйконал акустической волны. При такой нормировке начальное значение амплитудной функции

$$a(0) = hK_0, \quad K_0 = (8\pi)^{1/4} A = 2,093 \quad (3.14)$$

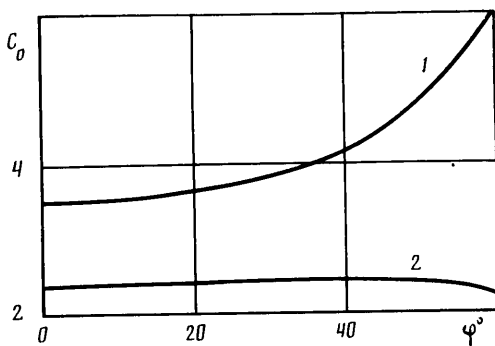
Результаты легко обобщаются на случай, когда акустическая волна падает на пластину под углом скольжения  $\varphi$ , т. е.

$$P = (\gamma M^2)^{-1} + h \text{Re}\{\exp[i(\alpha_a x + \beta z - \omega t)]\}$$

Здесь  $z$  — трансверсальная координата,  $\varphi = \text{arctg}(\beta/\alpha_a)$ , фазовая скорость  $c_a = 1 \pm 1/(M \cos \varphi)$ . Расчеты показали, что первая и вторая моды синхронизируются со звуковыми волнами при  $x_3 \rightarrow 0$ , если  $\varphi < \arccos(1/M)$ , т. е.  $c_{1,2} \rightarrow 1 \mp 1/(M \cos \varphi)$ . В этом случае начальная амплитуда мод опре-



Фиг. 4



Фиг. 5

деляется соотношением (3.13), если (2.5) заменить выражением

$$k = \int_0^{\infty} \left[ \frac{T}{(U-c_a)^2 \cos^2 \varphi} - M^2 \right] d\eta$$

На фиг. 5 приведены зависимости  $C_0(M)$  для первой и второй мод (кривые 1, 2 соответственно) при  $M=4$ ,  $T_f=1$ . Для перенормированной собственной функции формула (3.14) также остается в силе.

Заметим, что для первой моды параметр  $\lambda$ , определяемый соотношением (2.11), увеличивается с ростом числа Маха и/или угла скольжения  $\varphi$ . Из уравнения (2.10) следует, что продольный масштаб области дифракции 2 сокращается  $\sim |\lambda|^{-1}$ . В этом случае рассмотренная асимптотическая теория справедлива при более жестком ограничении  $\varepsilon \ll |\lambda|^{-1/2}$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жигулев В. Н., Тумин А. М. Возникновение турбулентности. Новосибирск: Наука, 1987. 182 с.
2. Козлов В. В., Рыжов О. С. Восприимчивость пограничного слоя: асимптотическая теория и эксперимент. М.: ВЦ АН СССР, 1988. 56 с.
3. Kerschen E. Boundary layer receptivity // AIAA Pap. 1989. № 1109. 10 p.
4. Goldstein M. E. The evolution of Tollmien - Schlichting waves near a leading edge // J. Fluid Mech. 1983. V. 127. P. 59-83.
5. Федоров А. В. К вопросу о развитии волн неустойчивости в пограничном слое сжимаемого газа // Численные методы механики сплошной среды. 1982. Т. 13. № 2. С. 144-149.
6. Garonov S. A. On the development of disturbances in nonparallel supersonic flows // Laminar-Turbulent Transition. (IUTAM Symp. Novosibirsk. 1984). Berlin: Springer-Verlag, 1985. P. 581-588.
7. Маслов А. А., Семенов Н. В. Возбуждение собственных колебаний пограничного слоя внешним акустическим полем // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 3. С. 74-78.
8. Гапонов С. А., Маслов А. А. Развитие возмущений в сжимаемых потоках. Новосибирск: Наука, 1980. 144 с.
9. Лиль Пзяцзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 194 с.
10. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979. 320 с.
11. Nayfeh A. H. Stability of three-dimensional boundary layers // AIAA Journal. 1980. V. 18. № 4. P. 406-416.
12. Mack L. M. Boundary layer stability theory. Pasadena, 1969. Jet Prop. Lab., Doc. 900-277. Rev. A. 270 p.

Москва

Поступила в редакцию  
3.X.1990