

УДК 532.522.013.4+534.29

© 1991 г.

А. П. ВОРОБЬЕВ

ВОЗДЕЙСТВИЕ АКУСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ СТРУИ

Рассмотрена задача о воздействии акустических колебаний на устойчивость струйного течения идеальной сжимаемой жидкости для случая плоской струи, поперек которой наложены стоячие акустические волны. Использован метод разделения движения на быстрое и медленное при учете нелинейных акустических эффектов. Установлено влияние акустических колебаний на инкременты нарастания неустойчивых гидродинамических возмущений.

1. Рассматривается плоский слой идеальной жидкости, который скользит относительно другой идеальной жидкости. Поверхности раздела между этими двумя жидкостями являются поверхностями тангенциального разрыва скорости. Как известно [1], такие поверхности неустойчивы (неустойчивость типа Кельвина — Гельмгольца). Если скорость слоя V_c , а скорость окружающей его жидкости V_0 , то инкремент нарастания малых возмущений из-за гидродинамической неустойчивости

$$\omega_{m0} \sim k |V_c - V_0|$$

где k — волновое число возмущений вдоль направления течения.

Пусть в области течения создано акустическое поле с частотой ω_a . При $\omega_a \gg \omega_{m0}$ движение жидкости можно разделить на «медленное», характерное время которого близко к характерному времени развития возмущений $\tau \sim 1/\omega_{m0}$, и «быстрое», характерное время которого близко к периоду акустических колебаний $T \sim 1/\omega_a$. В этом случае параметры среды могут быть представлены в виде суммы двух составляющих: $V + V_a$, $p + p_a$, $\rho + \rho_a$, где V , p , ρ — медленно изменяющиеся по времени параметры с учетом усредненного по «быстрому» времени акустического воздействия, а V_a , p_a , ρ_a — быстро изменяющиеся по времени параметры, среднее от которых за период акустических колебаний обращается в нуль [2].

Используем введенное выше представление параметров среды и подставим их в исходную систему уравнений, описывающую движение идеальной жидкости

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0, \quad \rho \rho^{-1} = \operatorname{const}$$

Отделяя усредненную по «быстрому» времени и быстроменяющуюся по времени части уравнений, можно получить две самосогласованные системы уравнений, одна из которых описывает «медленное» движение среды с учетом акустического воздействия, а вторая — собственно акустическое поле.

Ограничимся случаем течения, когда физические параметры каждой из сред постоянны по объему, а поперек струи наложены стоячие акусти-

ческие волны. В этом случае на колеблющейся с частотой акустических колебаний поверхности раздела возникает стационарный градиент давления

$$\left\langle \frac{\partial(p+p_a)}{\partial x} \right\rangle_{s_0+\xi_a} = - \left\langle (\rho+\rho_a) \left(\frac{\partial V_a}{\partial t} + V_a \frac{\partial V_a}{\partial x} \right) \right\rangle_{s_0+\xi_a} \approx \frac{\partial E}{\partial x} \Big|_{s_0} \quad (1.1)$$

где угловые скобки означают усреднение по «быстрому» времени, $E = \langle p_a^2 / 2\rho a^2 \rangle$ — усредненная плотность потенциальной энергии акустических колебаний, s_0 — равновесная координата поверхности раздела, ξ_a — смещение поверхности раздела под действием акустических колебаний ($\partial \xi_a / \partial t = V_a$), a — скорость звука.

Если физические свойства струи и окружающей среды различны между собой, то возникающий в поле стоячих акустических волн стационарный градиент давления различен с каждой стороны от поверхности раздела. Из (1.1) следует, что для определения возникающего стационарного градиента давления достаточно знать акустическое поле в линейном приближении, которое удовлетворяет системе

$$\frac{\partial V_a}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x}, \quad \frac{\partial p_a}{\partial t} + \rho a^2 \frac{\partial V_a}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

Пусть V' , p' , ρ' — малые возмущения, характерное время развития которых существенно больше периода акустических колебаний. Линеаризуя исходную систему уравнений относительно малых возмущений и учитывая, что поля стационарных гидродинамических и акустических скоростей безвихревые, можно показать, что возмущение скорости допускает представление в виде

$$V' = -\nabla \varphi$$

При этом из уравнения движения следует

$$p' = \left\langle (\rho+\rho_a) \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + ((V+V_a), \nabla)$$

Используя соотношение

$$p' = \left\langle \gamma \frac{p+p_a}{\rho+\rho_a} \right\rangle \rho'$$

и представления для V' и p' , из уравнения неразрывности можно получить уравнение

$$\Delta \varphi + \left\langle \frac{\nabla(\rho+\rho_a)}{\rho+\rho_a} \right\rangle \nabla \varphi - \left\langle \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho+\rho_a}{\gamma(p+p_a)} \frac{d\varphi}{dt} \right) \right\rangle = 0 \quad (1.3)$$

которому должен удовлетворять потенциал возмущения скорости φ в каждой из сред.

Если принять, что первый член в уравнении (1.3) порядка единицы, то порядок оставшихся членов $(V/a)^2$ и $(p_a/p)^2$. При дозвуковых скоростях основного течения ($(V/a)^2 \ll 1$) и при малых уровнях акустического поля ($(p_a/p)^2 \ll 1$) будем пренебрегать сжимаемостью среды и воздействием акустики на средние параметры течения в объеме, приняв для φ приближенное уравнение

$$\Delta\varphi=0 \quad (1.4)$$

Граничные условия для возмущений состоят в обращении в нуль нормальных компонент возмущений скорости на твердых боковых стенках канала, в непрерывном изменении усредненного по «быстрому» времени давления при переходе через каждую из поверхностей струи с учетом возникающего в поле стоячих акустических волн стационарного градиента давления и в равенстве нормальной компоненты возмущения скорости на каждой из поверхностей струи «медленной» скорости перемещения самой поверхности. Через потенциал φ граничные условия на твердых боковых стенках и на каждой из поверхностей струи записываются в виде

$$\partial\varphi/\partial x=0 \quad (1.5)$$

$$\left\{ \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi \right\} + \left\{ \frac{\partial E}{\partial x} \right\} \xi_s = 0 \quad (1.6)$$

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial z} \right) \xi_s \quad (1.7)$$

Здесь ξ_s — «медленное» отклонение поверхности струи от своего равновесного значения под действием возмущений (фигурные скобки означают разрыв заключенной в них величины при переходе через поверхности струи).

Оценка членов в граничных условиях (1.6) на каждой из поверхностей струи, выражающих воздействие акустического поля на течение, показывает, что их отношение составляет величину порядка $(V_a/V)^2$. Это отношение при дозвуковых скоростях течения может быть отнюдь не малым. Следовательно, можно заключить, что воздействие акустического поля на гидродинамическую неустойчивость струйного дозвукового течения проявляется главным образом через граничные условия непрерывности возмущения давления на поверхностях струи, а не через воздействие акустического поля на возмущения в объеме.

Пусть плоская струя толщиной h ориентирована вдоль оси z так, что ее среднее сечение совпадает с плоскостью z ($x=0$), а боковые стенки имеют координаты $x=-x_0$ и $x=H-x_0$, где H — расстояние между стенками (фиг. 1). Равновесные стационарные параметры струи обозначим ρ_s , a_s , V_s , а параметры среды — ρ_0 , a_0 , V_0 .

Представим отклонения поверхностей струи от равновесного состояния в виде

$$\xi_s^{(1,2)}(z, t) = \xi_{s0}^{(1,2)} \exp[i(\omega t - kz - my)]$$

где k , m — волновые числа возмущений в направлении осей z и y соответственно, $\xi_{s0}^{(1,2)}$ — амплитуды отклонений нижней и верхней поверхностей струи.

Будем искать решение уравнения (1.7) для потенциала φ в виде

$$\varphi(x, y, z, t) = \Phi(x) \exp[i(\omega t - kz - my)]$$

Тогда в каждой из зон $\Phi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} - n^2\Phi = 0, \quad n^2 = k^2 + m^2$$

общее решение которого имеет вид

$$\Phi_j(x) = C_j \operatorname{sh} nx + D_j \operatorname{ch} nx \quad (j=1, 2, 3)$$

Используя граничные условия (1.4)–(1.6), получим систему однородных линейных уравнений относительно коэффициентов C_j , D_j и амплитуд отклонений поверхностей струи $\xi_{s0}^{(1,2)}$. Приравняв детерминант этой системы нулю, получим характеристическое уравнение, связывающее собственное число ω , параметры возмущений k и m , физические параметры (ρ_0 , ρ_c , V_0 , V_c), геометрию струйного течения (h , x_0 , H) и параметры акустического воздействия $F_{1,2}$. С точностью до квадратичных акустических членов оно представляется в виде

$$\begin{aligned} & \rho_0^2 \lambda^4 + \rho_0 \rho_c \lambda^2 (\lambda - \mu)^2 \operatorname{cth} nh (\operatorname{th} nx_1 + \operatorname{th} nx_2) + \\ & + \rho_c^2 (\lambda - \mu)^4 \operatorname{th} nx_1 \operatorname{th} nx_2 = \rho_0 \lambda^2 n (F_1 \operatorname{th} nx_1 + F_2 \operatorname{th} nx_2) + \\ & + \rho_c (\lambda - \mu)^2 n (F_1 + F_2) \operatorname{cth} nh \operatorname{th} nx_1 \operatorname{th} nx_2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\lambda = \omega - kV_0, \quad \mu = k(V_c - V_0), \quad x_1 = x_0 - h/2$$

$$x_2 = H - x_0 - \frac{1}{2}h, \quad F_{1,2} = \pm \left(\frac{\partial E_c}{\partial x} - \frac{\partial E_0}{\partial x} \right) \Big|_{x=\mp h/2}$$

В предположении, что толщина струи мала ($nh \ll 1$) и акустическое воздействие также мало (условие малости последнего уточним ниже), получим следующие приближенные выражения для собственных чисел:

$$\lambda_1 \simeq \pm i\mu \left[\frac{\rho_c}{\rho_0} nh \frac{\operatorname{th} nx_1 \operatorname{th} nx_2}{\operatorname{th} nx_1 + \operatorname{th} nx_2} \left(1 - \frac{F_1 + F_2}{\rho_c \mu^2 h} \right) \right]^{0,5} \quad (1.9)$$

$$\lambda_2 \simeq \mu \pm i\mu \left[\frac{\rho_0}{\rho_c} \frac{nh}{\operatorname{th} nx_1 + \operatorname{th} nx_2} \left(1 - \frac{n}{\rho_c \mu^2} \frac{F_1 \operatorname{th}^2 nx_1 + F_2 \operatorname{th}^2 nx_2}{\operatorname{th} nx_1 + \operatorname{th} nx_2} \right) \right]^{0,5} \quad (1.10)$$

При достаточном удалении струи от боковых стенок ($nx_1, nx_2 \gg 1$) и при отсутствии акустического воздействия ($F_{1,2} = 0$) оба корня переходят в известные выражения, соответствующие случаям изгиба и перетяжки тонкой плоской струи [3].

Дальнейшее рассмотрение будем вести для возмущений струи типа изгиба, поскольку, согласно (1.9) и (1.10), наибольшее влияние акустики проявляется именно для этого типа возмущений. Для возмущений струи типа изгиба отношение инкрементов нарастания при наличии и при отсутствии акустического поля представляется в виде

$$\frac{\omega_m}{\omega_{m0}} \simeq \left(1 - \frac{F}{\rho_c \mu^2 h} \right)^{0,5}, \quad F = F_1 + F_2 \quad (1.11)$$

Из полученного выражения следует, что в зависимости от знака F может происходить как уменьшение, так и увеличение инкремента неустойчивых возмущений.

В частном случае отсутствия сдвига скоростей ($\mu = 0$) из уравнения (1.8) для тонкой струи ($nh \ll 1$) можно получить выражение

$$\lambda \simeq \pm \left(n \frac{\operatorname{th} nx_1 \operatorname{th} nx_2}{\operatorname{th} nx_1 + \operatorname{th} nx_2} \frac{F}{\rho_0} \right)^{0,5}$$

из которого следует, что в случае $F < 0$ может наступить акустическая дестабилизация такого равновесного состояния.

2. Для определения параметров акустического воздействия $F_{1,2}$ следует решить задачу линейной акустики в плоском канале (фиг. 1). Поле стоячих акустических волн с направлением акустической скорости поперек струи, согласно (1.2), представляется в виде

$$V_a = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad p_a = \rho \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Здесь потенциал акустической скорости $\psi(x, t) = \Psi(x) \cos \omega_a t$ (ω_a — круговая частота собственных акустических колебаний), причем $\Psi(x)$ удовлетворяет в каждой зоне уравнению

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + q^2 \Psi = 0, \quad q^2 = \frac{\omega_a^2}{a^2}$$

при граничных условиях, требующих обращения в нуль акустической скорости на боковых стенках

$$d\Psi/dx = 0 \quad (x = -x_0, x = H - x_0) \quad (2.1)$$

и непрерывности акустического давления и скорости при переходе через каждую из поверхностей струи

$$\{\rho \Psi\} = \left\{ \frac{d\Psi}{dx} \right\} = 0 \quad \left(x = \pm \frac{h}{2} \right) \quad (2.2)$$

Представляя решение для $\Psi(x)$ в каждой зоне в виде

$$\Psi_j(x) = A_j \cos q_j x + B_j \sin q_j x \quad (j=1, 2, 3)$$

имея в виду, что $q_1 = q_3 = q_0$, $q_2 = q_c$, и используя граничные условия (2.1) и (2.2), получим систему линейных однородных уравнений относительно коэффициентов A_j , B_j , из которой в предположении малости толщины струи в сравнении с длиной волны акустических колебаний ($q_j h/2 \ll 1$) можно получить приближенные выражения для частот собственных акустических колебаний и для параметра акустического воздействия

$$(q_0 H)^2 \approx (N\pi)^2 \left\{ 1 + \frac{2h}{H} \left[\left(1 - \frac{\rho_c}{\rho_0} \right) \sin^2 \frac{N\pi x_0}{H} + \left(1 - \frac{\rho_0 a_0^2}{\rho_c a_c^2} \right) \cos^2 \frac{N\pi x_0}{H} \right] \right\} \quad (2.3)$$

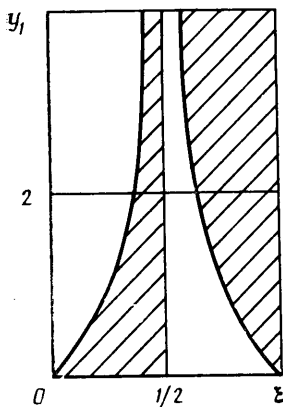
$$F = \frac{\rho_c \omega_a^2 h}{2} \eta^2 \left(1 - \frac{a_0^2}{a_c^2} \right) \left[\sin^2 q_0 x_0 - \left(\frac{\rho_0 a_0}{\rho_c a_c} \right)^2 \cos^2 q_0 x_0 \right] \quad (2.4)$$

где $N=1, 2, \dots$ — номер моды акустических колебаний, а $\eta = p_a / \rho_0 a_0^2$ — относительная амплитуда акустического давления на боковой стенке.

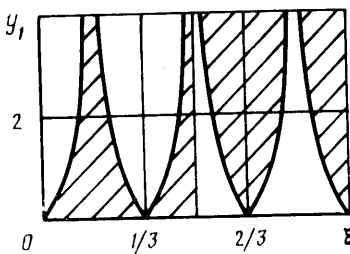
Возвращаясь к условию малости акустического воздействия, используем при нахождении приближенных выражений для собственных чисел (1.9) и (1.10), можно показать, что это условие связано с малостью отброшенных членов четвертого порядка по амплитуде акустического давления в уравнении (1.8) по сравнению с квадратичными членами и с учетом (2.4) имеет вид

$$\frac{nh}{2} \left(\frac{\omega_a}{k\Delta V} \eta \right)^2 \ll 1$$

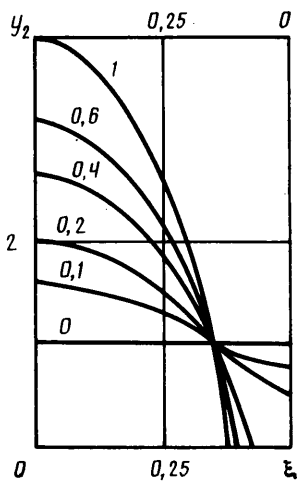
3. Из (1.11) и (2.4) следует, что рассматриваемый механизм акустического воздействия на неустойчивость струйного течения может проявляться только при различии физических свойств струи и окружающей среды. Эффект акустического воздействия возрастает с увеличением ин-



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

тенсивности акустических колебаний. Акустическое воздействие может как усиливать, так и ослаблять инкремент нарастания гидродинамических возмущений, причем при заданных физических параметрах струйного течения и при неизменном акустическом поле знак воздействия может изменяться в зависимости от расположения струи относительно стенок канала.

Из выражения (2.4) следует, что условие

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\omega_a x_0}{a_0} = \left(\frac{\rho_0 a_0}{\rho_c a_c} \right)^2$$

определяет границу, при переходе через которую знак акустического воздействия изменяется.

Области акустической стабилизации и дестабилизации на первой моде акустических колебаний ($N=1$) представлены на фиг. 2 ($y_1 = \rho_0 a_0 / \rho_c a_c$, $\xi = x_0 / H$). Эти области симметричны относительно середины канала. Левая половина рисунка соответствует случаю $a_0 > a_c$, при этом центральная область канала является областью акустической дестабилизации (заштрихована), т. е. акустические колебания на первой моде могут «раскачивать» плоскую струю, находящуюся в этой области, а периферийная область канала является областью акустической стабилизации, т. е. струя, находящаяся в периферийной области канала, может «демпфироваться» акустическими колебаниями. При $a_0 < a_c$ (правая половина рисунка) эффекты акустического воздействия оказываются обратными.

Если рассматривать более высокие моды акустических колебаний, то можно показать, что области акустического воздействия чередуются по сечению канала, причем при $a_0 > a_c$ области дестабилизации локализуются вблизи пучностей акустической скорости, а области стабилизации — вблизи узлов; при $a_0 < a_c$ — наоборот. На фиг. 3 эти области представлены для случая $N=3$ (левая половина рисунка соответствует случаю $a_0 > a_c$, правая — $a_0 < a_c$); заштрихованные области соответствуют областям дестабилизации струйного течения.

На фиг. 4 представлены зависимости (1.11) относительных инкрементов нарастания возмущений $y_2 = \omega_m / \omega_{m0}$ от относительного расположения плоской струи в канале $\xi = x_0 / H$ на первой моде акустических колебаний для случая $\rho_c / \rho_0 = 0,25$, $a_c / a_0 = 2$ при различных значениях параметра $\epsilon = (\eta a_0 / k H \Delta V)^2$. Те же самые значения инкрементов соответствуют обрат-

ным соотношениям физических параметров $\rho_c/\rho_0=4$, $a_c/a_0=0,5$, но при значениях ξ , указанных на верхней границе рисунка.

Если струя находится в области акустической стабилизации ($F>0$), то, согласно (1.11), может быть получена даже полная стабилизация достаточно длинноволновых гидродинамических возмущений типа изгиба.

Как отмечалось ранее при исследовании устойчивости тангенциального разрыва скорости в акустическом поле [4], физический механизм воздействия поперечных к струе акустических колебаний на гидродинамическую устойчивость плоской струи, физические параметры которой отличны от параметров окружающей среды, аналогичен воздействию эффективного ускорения силы тяжести, знак которого определяется как соотношением физических параметров, так и расположением струи относительно узлов и пучностей акустического поля.

Хотя решение задачи о воздействии акустических колебаний на струйное течение проведено для плоского случая, следует ожидать, что качественные особенности этого воздействия сохранятся и для цилиндрической геометрии струйного течения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
2. Ивановский А. И. Теоретическое и экспериментальное изучение потоков, вызванных звуком. М.: Гидрометеониздат, 1959, 115 с.
3. Лэмб Г. Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
4. Воробьев А. П. Об устойчивости тангенциального разрыва скорости в акустическом поле // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 6. С. 132—135.

Москва

Поступила в редакцию
10.X.1989