

УДК 532.517:536.253

© 1991 г.

Г. М. МАХВИЛАДЗЕ, С. Е. ЯКУШ

## **АВТОМОДЕЛЬНЫЙ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ТЕРМИК В СРЕДЕ С ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ**

Предложена модель турбулентного осесимметричного термика, всплывающего в среде, плотность которой меняется с высотой. Построено аналитическое решение, описывающее автомодельную стадию подъема. Проанализировано влияние плотностной стратификации атмосферы на структуру термика в ходе его движения, получены соотношения, описывающие характерные точки термика и степень размытия его передней кромки.

В первых работах по теории турбулентных термиков рассматривались осредненные по объему характеристики плавучего облака (см., например, [1, 2]). В [3–11] использовались уравнения Навье – Стокса в приближении Буссинеска, позволяющие рассчитать внутреннюю структуру течения во всплывающем термике; получены решения при малых [3–7] и больших [8–11] значениях числа Рэлея. При выводе указанных уравнений (см., например, [12]) плотность среды считалась постоянной всюду, за исключением членов, описывающих силу плавучести. В этих членах разность плотностей газа в термике и окружающей атмосфере принималась пропорциональной разности соответствующих температур и не зависящей от давления. Зависимость параметров атмосферы от высоты (т. е. ее стратификация) учитывалась только в связи с распределением по высоте температуры.

Многочисленные экспериментальные исследования эволюции термиков показали, что важнейшим их свойством является наличие стадии движения, в течение которой координата верхней кромки термина  $z_h$ , отсчитываемая от уровня виртуального источника, растет со временем пропорционально  $t^{1/2}$  (см., например, [2]). В случае неограниченной нейтрально стратифицированной по температуре несжимаемой атмосферы эта стадия отвечает автомодельному режиму движения с сохранением интегралов плавучести и энергии: на достаточном удалении от точки выделения тепла термик «забывает» начальные распределения параметров, в задаче исчезает характерный линейный масштаб, а совпадающий с экспериментальным закон автомодельного подъема следует из анализа размерности [2, 9]. Для стратифицированной по температуре несжимаемой атмосферы решение является предельным к автомодельному на достаточно малых временах [10].

Плотность среды можно считать не зависящей от высоты, только если вертикальный масштаб области, охваченной конвективным движением, достаточно мал, так что весовая (изотермическая) сжимаемость газа не играет заметной роли. Если это условие не выполнено, в задаче возникает характерный масштаб длины, обусловленный зависимостью плотности атмосферы от высоты. Автомодельное решение при этом, строго говоря, не существует, а закон подъема термика не следует из анализа размерностей. Вместе с тем обработка экспериментальных данных показывает, что зависимость  $z_h \sim t^{1/2}$  выполняется на определенном интервале времени и в том случае, когда сжимаемость среды существенна (например, при подъеме в атмосфере достаточно крупных термиков, высота зависания которых сравнима с вертикальным масштабом изменения плотности атмосферы, составляющим  $\sim 8,3$  км [10]).

Таким образом, возникает задача о построении приближенного аналитического решения, описывающего подъем термика в сжимаемой атмосфере. Этому вопросу посвящена настоящая работа.

1. Рассматривается свободно-конвективное течение, формирующееся в стратифицированной атмосфере при мгновенном выделении некоторого количества тепла  $Q_0$ . Начало цилиндрической системы координат  $r, z$  совмещено с виртуальным источником, ось  $z$  направлена вертикально вверх. Пусть температура невозмущенной атмосферы  $T_0$  определенным образом зависит от высоты, а плотность  $\rho_0$  и давление  $P_0$  удовлетворяют уравнению

состояния и условию гидростатического равновесия. Обозначим через  $p$  и  $\theta$  отклонения давления и температуры от  $P_a$  и  $T_a$ , после чего линеаризуем уравнение состояния

$$\rho(P, T) = \rho(P_a + p, T_a + \theta) \approx \rho_a(P_a, T_a) [1 - \beta\theta + \alpha p]$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — коэффициенты изотермической сжимаемости и теплового расширения среды. В дальнейшем пренебрежем динамической сжимаемостью газа по сравнению с тепловым расширением ( $|\alpha p| \ll |\beta\theta|$ ) и примем окончательно  $\rho(P, T) \approx \rho_a(P_a, T_a) [1 - \beta\theta]$ . Подобное разложение часто применяется при исследовании глубокой конвекции [13]; в отличие от приближения Буссинеска линеаризация здесь осуществляется относительно локальных значений  $P_a$  и  $T_a$ , а не средних по объему величин, что позволяет учесть весовую сжимаемость газа.

Как показывают оценки [8–11], при больших числах Рэлея, которые отвечают крупным термикам, вертикальные размеры конвективного образования намного превосходят горизонтальные, поэтому параметры течения в радиальном направлении меняются гораздо сильнее, чем в вертикальном. Следуя [8], воспользуемся приближением вертикального пограничного слоя и пренебрежем изменением динамической части давления  $p$  в уравнении для вертикальной компоненты импульса. Кроме того, введем ускорение силы плавучести  $\omega = g(\rho_a - \rho)/\rho_a = g\beta\theta$  ( $g$  — ускорение силы тяжести) и вместо уравнения притока тепла будем использовать уравнение для  $\omega$ . В рамках сделанных предположений задача сводится к решению следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial \rho_a u r}{\partial r} + \frac{\partial \rho_a v r}{\partial z} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho_a v}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho_a u v r}{\partial r} + \frac{\partial \rho_a v^2}{\partial z} = \rho_a \omega + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \rho_a \omega}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho_a u \omega r}{\partial r} + \frac{\partial \rho_a v \omega}{\partial z} = \frac{\lambda}{c_p} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right) - \rho_a v N^2 \quad (1.3)$$

$$N^2 = \frac{g}{T_a} \left( \frac{dT_a}{dz} + \frac{g}{c_p} \right) = -g \left( \frac{d \ln \rho_a}{dz} + \frac{g}{\gamma R T_a} \right) \quad (1.4)$$

где  $u$ ,  $v$  — радиальная и вертикальная компоненты скорости,  $c_p$  — теплоемкость газа при постоянном давлении,  $\gamma = c_p/c_v$  — отношение теплоемкостей,  $N$  — частота Вэйселя — Брента.

Граничные условия задают симметрию течения на оси ( $u = \partial v / \partial r = \partial \omega / \partial r = 0$ ) и отсутствие возмущений на бесконечности ( $u = v = \omega = 0$ ).

Заметим, что при  $\rho_a = \text{const}$  система уравнений (1.1)–(1.4) совпадает с уравнениями в приближении Буссинеска, использованными в [8] для анализа теплового осесимметричного термика в несжимаемой атмосфере. Турбулентный характер течения газа в (1.1)–(1.4) учитывается введением постоянных эффективных коэффициентов динамической вязкости и теплопроводности. Как было показано, например, в [14], такой способ замыкания осредненных уравнений сжимаемого газа позволяет воспроизвести в расчетах важную особенность эволюции термика — наличие стадии движения, отвечающей закону подъема  $z_k \sim t^{1/2}$ .

2. Проведем анализ размерностей. Искомые функции помимо пространственных координат и коэффициентов переноса зависят от параметров, характеризующих начальное состояние термика — его радиуса  $R_0$  и тепловой энергии  $Q_0$ , а также величин, задающих стратификацию атмосферы. Вертикальные распределения температуры и плотности невозмущенной атмо-

сферы описываются соотношениями (1.4), из которых видно, что стратификация атмосферы как по температуре, так и по плотности характеризуется двумя линейными масштабами  $L=RT_0/g$  и  $L_N=g/N^2$ , а распределения температуры и плотности в невозмущенной атмосфере записываются в виде

$$\frac{T_a}{T_0} = \chi\left(\frac{z}{L}, \frac{L_N}{L}, \gamma\right), \quad \frac{\rho_a}{\rho_0} = \Phi\left(\frac{z}{L}, \frac{L_N}{L}, \gamma\right) \quad (2.1)$$

где  $\chi$ ,  $\Phi$  — известные функции,  $T_0$  и  $\rho_0$  — значения параметров на уровне виртуального источника.

В дальнейшем примем, что температура меняется с высотой гораздо медленнее, чем плотность. Так, для стандартной атмосферы ( $N^2=1,2 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-2}$ ) зависимость  $T_a(z)$  близка к линейной, а  $\rho_a(z)$  — к экспоненциальной; при подъеме на высоту 10 км температура падает на 30%, тогда как плотность уменьшается в 3–4 раза. Эти оценки позволяют для течений с большим вертикальным масштабом принять  $\beta=T_a^{-1} \approx \text{const}=T_0^{-1}$ , а вертикальный градиент температуры учитывать только в членах, описывающих температурную стратификацию среды. В то же время плотностная стратификация атмосферы обусловлена весовой сжимаемостью газа, следовательно, ее учет необходим даже в случае безразличной температурной стратификации ( $N^2=0$ ).

Введем вместо  $Q_0$  интеграл плавучести термика

$$\Pi_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \phi \omega r dr dz = \frac{g\beta Q_0}{2\pi\rho_0 c_p} \quad (2.2)$$

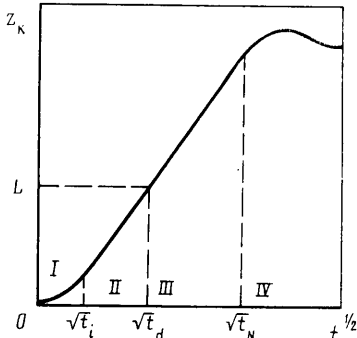
Интегрирование уравнения (1.3) по пространству показывает, что, как и в [10], величина  $\Pi_0$  сохраняется неизменной на начальной и автомодельной стадиях, пока не существенна температурная стратификация атмосферы. Определение  $\Pi_0$  в (2.2) отличается от используемого в приближении Буссинеска [2–11] тем, что в подынтегральное выражение входит функция  $\phi$ , описывающая распределение плотности среды по высоте.

Таким образом, искомые функции  $u$ ,  $v$  и  $\omega$  зависят от времени  $t$ , координат  $r$ ,  $z$ , величин, характеризующих состояние атмосферы и свойства газа  $\rho_0$ ,  $T_0$ ,  $N^2$ ,  $\gamma$ ,  $c_p$ ,  $g$ , коэффициентов переноса  $\mu$ ,  $\lambda$  и параметров, описывающих начальное состояние термика,  $-\Pi_0$ ,  $R_0$ . Воспользовавшись П-теоремой, запишем эту зависимость в виде связи между безразмерными комплексами

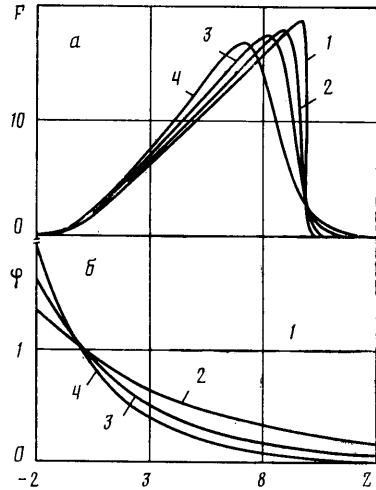
$$\frac{f}{\sigma t^n} = f^\circ\left(\frac{r}{\sigma t^{1/2}}, \frac{z}{\sigma t^{1/2}}, \frac{t}{t_i}, \frac{t}{t_N}, \frac{t}{t_d}, \mu^\circ, \text{Pr}, \frac{\Pi_0}{gR_0^3}, \gamma\right) \quad (2.3)$$

Здесь  $n=-1/2$ , если  $f=u, v$ ,  $n=-3/2$  для  $f=\omega$ ;  $\sigma=\Pi_0^{1/4}$ ,  $\mu^\circ=\mu/\rho_0\sigma^2$ ,  $\text{Pr}=\mu c_p/\lambda$  — число Прандтля, параметр  $\Pi_0/gR_0^3$  характеризует начальный перегрев в термике.

Выражение (2.3) содержит три характерных времени:  $t_i$ ,  $t_N$  и  $t_d$ . Время  $t_i$  определяет продолжительность начальной стадии движения термика, на протяжении которой формируется вихревой тор и вырабатывается режим движения, отвечающий закону подъема  $z_k \sim t^{1/2}$ . Именно на этой стадии существенную роль играет параметр  $\Pi_0/gR_0^3$  (см. (2.3)), характеризующий начальное распределение плавучести в объеме термика; при  $t \gg t_i$  решение перестает зависеть от данного параметра. Как показано в [10], продолжительность начальной стадии составляет  $t_i \approx 3R_0^2/\Pi_0^{1/2}$ . Величина  $t_N=|N^2|^{-1/2}$  определяет характерное время, через которое начинает сказываться температурная стратификация атмосферы: если  $N^2 > 0$  (устойчиво стратифицированная атмосфера), то при  $t \geq t_N$  происходит зависание термика, в противном случае — его разгон. Наконец, величина  $t_d \sim L^2/\Pi_0^{1/2}$  представляет собой характерное время, за которое проявляется стратификация атмосферы по плотности. Коэффициент пропорциональности при оценке  $t_d$  естественно выбрать так, чтобы верхняя кромка термика, поднимающегося по закону  $z_k \sim t^{1/2}$ , за время  $t_d$  проходила бы расстояние  $L$ , рав-



Фиг. 1



Фиг. 2

ное масштабу изменения плотности среды (см. (2.1)). В [8, 10, 11] показано, что для несжимаемой среды  $z_k = (\mu^0)^{-1/2} \sigma t^{1/2}$ , поэтому

$$t_d = \mu^0 L^2 / \sigma^2 = \mu^0 (RT_0 / g \sigma)^2$$

Величина  $t_N$  определяется только температурной стратификацией атмосферы, тогда как  $t_i$  и  $t_d$  зависят от начальной плавучести и радиуса термика. В зависимости от состояния атмосферы и начальных параметров облака возможны различные соотношения между характерными временами  $t_i$ ,  $t_N$  и  $t_d$ , но, как правило,  $t_i \ll t_N$ ,  $t_d$ . Если запас плавучести термика относительно мал, так что  $t_d \gg t_N$ , то в течение всего подъема облака по закону  $z_k \sim t^{1/2}$  плотность окружающей среды меняется незначительно и, следовательно, можно учитывать только температурную стратификацию атмосферы. Именно этот случай ранее подробно рассматривался в литературе на основе уравнений в приближении Буссинеска. Можно сказать, что в [2-11] построено решение, отвечающее промежуточной асимптотике  $t_i \ll t \ll t_N \ll t_d$ . Отметим, что если  $N^2 > 0$ , то термик зависает на определенной высоте и решение остается справедливым при  $t > t_N$ . Если же  $N^2 \leq 0$ , термик поднимается неограниченно высоко и решение, полученное в предположении о несжимаемости среды, справедливо только при  $t \ll t_d$ .

В настоящей работе рассматривается другой предельный случай, когда  $t_i \ll t_d \ll t_N$ . Типичная зависимость координаты верхней кромки всплывающего термика от времени схематически изображена на фиг. 1, где отмечены основные стадии процесса: интервал  $0 \leq t \leq t_i$  соответствует начальной стадии (I); интервал  $t_i \leq t \leq t_N$  отвечает закону подъема  $z_k \sim t^{1/2}$ , причем на участке  $t_i \leq t \leq t_d$  (II) справедливо автомодельное решение, описывающее подъем термика в несжимаемой атмосфере, а на участке  $t_d \leq t \leq t_N$  (III) становится существенной плотностная стратификация среды; наконец, при  $t \geq t_N$  проявляется температурная стратификация атмосферы (в данном случае устойчивая).

Полученное ниже приближенное решение, отвечающее промежуточной асимптотике  $t_i \ll t \ll t_N$ , при  $t \leq t_d$  (стадия II на фиг. 1) совпадает с решением для несжимаемой среды [8, 10, 11], а на стадии III описывает поведение термика в условиях существенного влияния плотностной стратификации атмосферы.

### 3. Сделаем замену переменных

$$\eta = \sigma^{-1} t^{-1/2} r, \quad \zeta = \sigma^{-1} t^{-1/2} z, \quad u^0 = \sigma^{-1} t^{1/2} u \quad (3.1)$$

$$v^0 = \sigma^{-1} t^{1/2} v, \quad \omega^0 = \sigma^{-1} t^{3/2} \omega, \quad \tau = t / t_d = t (\sigma / L)^2 / \mu^0$$

где функции  $u^0$ ,  $v^0$ ,  $\omega^0$  зависят от  $\eta$ ,  $\zeta$  и  $\tau$ . Тогда распределение плотности

атмосферы по высоте описывается функцией  $\varphi = \varphi(\xi(\mu^\circ)^{1/2}\tau^{1/2})$ , а уравнения (1.1)–(1.3) принимают вид

$$\frac{\partial \varphi u^\circ \eta}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi v^\circ \eta}{\partial \xi} = 0 \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \tau \varphi \frac{\partial v^\circ}{\partial \tau} = & \varphi \left( \frac{1}{2} v^\circ + \left( \frac{\eta}{2} - u^\circ \right) \frac{\partial v^\circ}{\partial \eta} + \left( \frac{\xi}{2} - v^\circ \right) \frac{\partial v^\circ}{\partial \xi} + \omega^\circ \right) + \\ & + \mu^\circ \left( \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \eta \frac{\partial v^\circ}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 v^\circ}{\partial \xi^2} \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \tau \varphi \frac{\partial \omega^\circ}{\partial \tau} = & \varphi \left( \frac{3}{2} \omega^\circ + \left( \frac{\eta}{2} - u^\circ \right) \frac{\partial \omega^\circ}{\partial \eta} + \left( \frac{\xi}{2} - v^\circ \right) \frac{\partial \omega^\circ}{\partial \xi} \right) + \\ & + \mu^\circ \text{Pr}^{-1} \left( \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \eta \frac{\partial \omega^\circ}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 \omega^\circ}{\partial \xi^2} \right) - \varphi v^\circ \left( \frac{t}{t_N} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Уравнения (3.3), (3.4) приведены к недивергентному виду с помощью уравнения неразрывности (3.2), граничные условия на оси и на бесконечности совпадают с выписанными ранее. Поскольку решение ищется при  $t \ll t_N$ , последнее слагаемое в уравнении (3.4) можно опустить. Тогда, как следует из (3.4), при движении термика выполняется интегральное равенство, выражающее сохранение запаса плавучести термика  $\Pi_0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi \omega^\circ \eta \, d\eta \, d\xi = 1 \quad (3.5)$$

Как показывают эксперименты и расчеты на основании более полной системы уравнений [14], структура термика при подъеме в среде с переменной плотностью меняется весьма медленно. Поэтому решение задачи (3.2)–(3.5) можно искать, предполагая, что искомые функции зависят от  $\tau$  лишь параметрически. Это позволяет опустить производные по  $\tau$  в левых частях (3.3) и (3.4) и отыскивать для каждого  $\tau$  соответствующее квазистационарное решение.

Следуя [8–10], будем искать решение (3.2)–(3.5) при  $\text{Pr}=1$ , предполагая подобие профилей плавучести  $\omega_0$  и вертикальной скорости  $v^\circ$

$$\omega^\circ = v^\circ = B \exp(-a(\xi)\eta^2) f(\xi) \quad (3.6)$$

где в отличие от [8–11] считается, что величина  $a$  зависит от вертикальной координаты  $\xi$ . Для вычисления горизонтальной проекции скорости  $u^\circ$  удобно сначала найти функцию тока  $\psi^\circ$ , определяемую равенствами  $\varphi v^\circ \eta = -\partial \psi^\circ / \partial \eta$ ,  $\varphi u^\circ \eta = \partial \psi^\circ / \partial \xi$ . Интегрирование с учетом (3.6) и граничного условия на оси симметрии  $\psi^\circ(0, \xi) = 0$  дает

$$\psi^\circ = \frac{\varphi}{2a} B (1 - \exp(-a\eta^2)) f$$

после чего не составляет труда вычислить  $u^\circ$ . Подстановка введенных профилей в уравнения (3.3), (3.4) с нулевой левой частью приводит к одному уравнению для функции  $f$

$$\mu^\circ (f \exp(-a\eta^2))'' + \frac{1}{2} (\varphi \xi f \exp(-a\eta^2))' - \exp(-a\eta^2) \times$$

$$\times \left\{ B\varphi ff' + (4a\mu^\circ - \varphi)(1 - a\eta^2)f + Ba f^2 \left( \frac{\varphi}{a} \right)' (1 - \exp(-a\eta^2)) \right\} = 0 \quad (3.7)$$

(штрих обозначает дифференцирование по  $\zeta$ ).

Положим неизвестную пока функцию  $a(\zeta)$  равной  $\varphi(\zeta)/4\mu^\circ$ , тогда второе и третье слагаемые в фигурных скобках (3.7) тождественно обратятся в нуль. Дальнейшее исследование можно провести, осредняя коэффициенты получившегося уравнения по горизонтальной координате. Для этого все члены уравнения домножим на  $\eta d\eta$  и проинтегрируем в пределах от нуля до бесконечности. В результате получим следующее приближенное уравнение для функции  $f$ :

$$\mu^\circ (f\varphi^{-1})'' - Bff' + \frac{1}{2}(\xi f)' = 0 \quad (3.8)$$

Следуя [8-11], введем новые переменные  $Z = \xi/2(\mu^\circ)^{1/2}$ ,  $F = f/4\mu^\circ$ , а также, без ограничения общности, положим  $B = 1/4(\mu^\circ)^{1/2}$ . Тогда (3.8) и интегральное соотношение (3.5) примут вид

$$(F\varphi^{-1})'' - 2FF' + 2(ZF)' = 0 \quad (3.9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F dZ = \frac{1}{4(\mu^\circ)^2} \quad (3.10)$$

где штрих обозначает дифференцирование по  $Z$ ,  $\varphi = \varphi(\varepsilon Z)$ ,  $\varepsilon = 2\mu^\circ \tau^{1/2}$ .

4. Для функции  $\varphi$  произвольного вида уравнение (3.9) имеет общее решение, удовлетворяющее граничным условиям  $F = F' = 0$  при  $Z = \pm\infty$

$$F = \frac{\exp(-\Psi)}{C + \Phi} \quad (4.1)$$

$$\Psi = \int_0^z (2Z\varphi - \varphi'/\varphi) dZ, \quad \Phi = \int_z^\infty \varphi \exp(-\Psi) dZ \quad (4.2)$$

Для вычисления константы  $C$ , зависящей от  $\mu^\circ$  и  $\varepsilon$ , необходимо решение (4.1) подставить в интегральное тождество (3.10).

Отметим, что при  $\varepsilon = 0$ , когда  $\varphi = 1$ , уравнения (3.9), (3.10) в точности совпадают с полученными в [8-10]: в этом случае

$$\Psi = Z^2, \quad \Phi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}(Z), \quad C = \frac{\sqrt{\pi}}{2} E(1-E)^{-1} \quad (4.3)$$

$$Z_m^\circ \approx \frac{1}{2\mu^\circ} + \mu^\circ \ln(2(\mu^\circ)^3 \pi^{-1/2}), \quad E = \exp\left(-\frac{1}{4(\mu^\circ)^2}\right)$$

где  $Z_m^\circ$  — точка максимума функции  $F$  [10, 11].

Проследим, как меняется распределение  $F(Z)$  с ростом  $\varepsilon$ , когда начинает проявляться стратификация среды по плотности, описываемая функцией  $\varphi(\varepsilon Z)$ . На фиг. 2, а при различных значениях  $\varepsilon$  приведены профили функции  $F$ , соответствующие часто используемому в расчетах случаю изотермической атмосферы ( $T_a = \text{const} = T_0$ ,  $N^2 = g^2/c_p T_0$ ,  $\varphi = \exp(-\varepsilon Z)$ ).

Поскольку для произвольной функции  $\varphi$  выполнить интегрирование и найти константу  $C$  из (3.10) не удается, при построении решения на фиг. 2, а величина  $C$  определялась численно. Кривые 1-4 соответствуют  $\varepsilon = 0, 0,14, 0,22, 0,31$  ( $\tau = 0, 2, 5, 10$ ),  $\mu^\circ = 5 \cdot 10^{-2}$  (число Рэлея  $\text{Ra} = (\mu^\circ)^{-2} = 400$ ).

На фиг. 2, б приведены распределения  $\varphi(Z)$ , отвечающие тем же значениям  $\epsilon$  (кривые 1–4). Подчеркнем, что кривая 1 соответствует найденному в [8–10] решению, описывающему подъем осесимметричного автомодельного термика в среде с постоянной плотностью. Из анализа фиг. 2 следует, что по мере проникновения термика во все более разреженные слои атмосферы автомодельная координата верхней кромки термика остается практически неизменной (кривые 1–4 на фиг. 2, а пересекаются в одной точке). Это значит, что в исходной системе координат  $r, z$  термик поднимается квазиавтомодельным образом по закону  $z_k \sim t^{3/2}$ , соответствующему данным натурных наблюдений. С течением времени максимум функции  $F$  смещается в сторону меньших  $Z$ , т. е. происходит «размытие» верхней кромки термика, хотя общая структура облака меняется слабо.

Горизонтальный размер термика, согласно (3.6), пропорционален  $\varphi(Z_m)^{-1/2}$ , следовательно, радиус термика в автомодельных переменных по мере подъема будет увеличиваться. Данные результаты хорошо согласуются с выводами работы [14], в которой проведено численное моделирование подъема термика в среде с экспоненциально меняющейся плотностью. Кроме того, медленное изменение функции  $F$  с ростом  $\epsilon$  подтверждает справедливость сделанного выше предположения о возможности пренебрежения временными производными в левой части (3.3), (3.4).

Проанализируем решение (4.1) при произвольном распределении плотности атмосферы  $\varphi(\epsilon Z)$ . Для этого проинтегрируем уравнение (3.9) один раз с учетом граничных условий  $F=F'=0$  при  $Z=\pm\infty$

$$F' = \varphi F (F - 2Z - (\varphi^{-1})') \quad (4.4)$$

Изоклины нуля данного уравнения  $F_1=0$  и  $F_2=2Z+(\varphi^{-1})'$  пересекаются в точке  $Z=Z^0$ , где  $2Z^0+(\varphi^{-1})_{Z^0}'=0$ . В дальнейшем для определенности будем считать, что функция  $F(Z)$  имеет единственный максимум на всей оси  $Z$ , который достигается при  $Z=Z_m$ . В этой точке на оси симметрии избыточная температура и вертикальная компонента скорости принимают наибольшие по всему термику значения. Достаточное условие единственности максимума состоит в том, чтобы изоклина нуля  $F_2$  при  $Z < Z^0$  проходила строго ниже  $F_1$ , а при  $Z > Z^0$  монотонно возрастала. Другими словами, при  $Z < Z^0$  должно выполняться неравенство  $2Z+(\varphi^{-1})' < 0$ , а при  $Z > Z^0$  — неравенство  $2+(\varphi^{-1})'' > 0$ . Отметим, что данные условия удовлетворяются для весьма широкого класса функций  $\varphi$ , в частности — для экспоненциальной зависимости, рассмотренной выше.

Чтобы найти координату точки максимума  $Z_m$ , разложим функцию  $\Phi$  в асимптотический ряд, воспользовавшись формулой интегрирования по частям

$$\Phi = \frac{\exp(-\Psi)}{\Psi'} \left\{ \varphi + \left( \frac{\varphi}{\Psi'} \right)' + \left[ \frac{1}{\Psi'} \left( \frac{\varphi}{\Psi'} \right)' \right]' + o\left( \frac{1}{(\Psi')^6} \right) \right\} \quad (4.5)$$

Поскольку при больших числах Рэлея ( $\mu^0 \ll 1$ ) максимум  $F$  достигается при больших  $Z$  (в случае несжимаемой атмосферы  $Z_m \approx 1/2\mu^0 \gg 1$  — см. (4.3)), то величину  $\Psi' = 2Z\varphi - \varphi'/\varphi$  в точке максимума также можно считать большой. Подставим (4.5) в условие максимума  $F=F_2$ , которое с учетом (4.2) может быть записано в виде  $\varphi F = \Psi'$ , и пренебрежем членами разложения, начиная с третьего. В результате получим

$$\exp(-\Psi) = C \frac{\varphi(2Z+(\varphi^{-1})')^3}{2+(\varphi^{-1})''} \quad (4.6)$$

5. Для функций  $\varphi$  произвольного вида получить из (4.1), (4.6) окончательные соотношения типа (4.3) не удастся, поскольку не представляется возможным выполнить интегрирование и найти из (3.10), (4.1) константу  $C$ . Однако для случая  $\varphi = (1+(\epsilon Z)^2)^{-1}$  вычисления можно провести до конца. Функция  $\varphi$  такого вида удовлетворяет условиям, при которых существует единственный максимум распределе-

ния  $F(Z)$ , и может рассматриваться как модельная, описывающая падение плотности атмосферы с высотой ( $Z > 0$ ).

Подстановка указанной функции в (4.2) дает

$$\exp(-\Psi) = \frac{1}{[1 + (\varepsilon Z)^2]^{\varepsilon^{-2}+1}}, \quad \Phi = \int_z^\infty \frac{dZ}{[1 + (\varepsilon Z)^2]^{\varepsilon^{-2}+2}} \quad (5.1)$$

Для вычисления константы  $C$  представим интеграл (3.10) в виде двух слагаемых, обозначаемых ниже  $I_1$  и  $I_2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F dZ = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi F dZ + \int_{-\infty}^{\infty} (1-\varphi) F dZ = I_1 + I_2$$

Первое из этих слагаемых вычисляется точно ( $\Gamma$  — гамма-функция).

$$I_1 = \ln \left( 1 + \frac{1}{C} \Phi(-\infty) \right) = \ln \left( 1 + \frac{\sqrt{\pi}}{C} \xi(\varepsilon) \right), \quad \xi(\varepsilon) = \frac{\Gamma(\varepsilon^{-2}+3/2)}{\varepsilon \Gamma(\varepsilon^{-2}+2)}$$

Для приближенного вычисления  $I_2$  заменим в подынтегральном выражении  $F$  на аппроксимирующую ее функцию.

Простейший способ вычисления  $I_2$  состоит в замене  $F$  разрывной функцией, приближенно описывающей решение в случае несжимаемой атмосферы [8–11]:  $F_1^\circ = 2Z$  при  $0 \leq Z \leq 1/2\mu^\circ$ ,  $F_1^\circ = 0$  при  $Z < 0$  и  $Z > 1/2\mu^\circ$ . Тогда

$$I_2 \approx \int_0^{1/2\mu^\circ} \frac{(\varepsilon Z)^2}{1 + (\varepsilon Z)^2} F_1^\circ dZ = \frac{1}{4(\mu^\circ)^2} (1 - \tau^{-1} \ln(1 + \tau))$$

$$C \approx C_1 = \sqrt{\pi} \xi(\varepsilon) (1 + \tau)^{-\varepsilon^{-2}}, \quad \tau = \left( \frac{\varepsilon}{2\mu^\circ} \right)^2$$

Подставляя  $C_1$  в условие максимума (4.6), можно найти величину  $Z_m$ , которую удобно представить как  $Z_m = Z_m^\circ - \Delta Z_m$ , где  $Z_m^\circ$  — координата точки максимума при  $\varepsilon = 0$  (см. (4.3)), а  $\Delta Z_m$  — ее изменение. Вычисления дают следующую зависимость:

$$\Delta Z_m = \tau \mu^\circ \ln \frac{\sqrt{\pi}}{2(\mu^\circ)^3} + (1 + \tau) \mu^\circ \ln(1 + \varepsilon^2)^2 \xi(\varepsilon) \quad (5.2)$$

При  $\varepsilon \ll 1$  справедлива оценка  $\xi(\varepsilon) \sim 1/\sqrt{1 + \varepsilon^2}$ , поэтому второе слагаемое в (5.2) приближенно равно  $6(\mu^\circ)^3 \tau (1 + \tau) = O((\mu^\circ)^3)$ . Отсюда следует, что зависимость  $\Delta Z_m$  от  $\tau$  описывается первым членом, а размытие передней кромки растет со временем линейно.

На фиг. 3 проведено сравнение значений  $\Delta Z_m$ , полученных в численных расчетах по соотношениям (4.1), (4.2) (точки) и построенных по формуле (5.2) (кривая 1). Видно, что зависимость (5.2) дает примерно вдвое большее по сравнению с истинным размытием переднего фронта термика. Для достижения лучшего соответствия необходимо при вычислении  $I_2$  аппроксимировать  $F$  более точно.

С этой целью найдем асимптотику возрастания функции  $F$  при больших (но не превышающих  $Z_m$ ) значениях  $Z$ . Подставим в (4.4)  $F = 2Z(1 + \varepsilon^2) + G$ , тогда

$$G' + 2(1 + \varepsilon^2)G = G(2Z(1 + \varepsilon^2) + G)(1 + (\varepsilon Z)^2)^{-1}$$

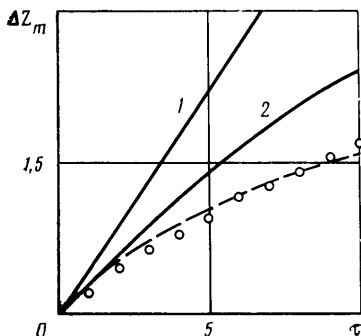
Легко убедиться, что при больших  $Z$  это равенство справедливо, если  $G = \varepsilon^2 Z$ . Таким образом, функция  $F$  возрастает, асимптотически приближаясь к прямой  $F = 2Z(1 + 3/2\varepsilon^2)$ . Поэтому аппроксимируем  $F$  разрывной функцией  $F_2^\circ = 2Z(1 + 3/2\varepsilon^2)$  при  $0 \leq Z \leq Z_2$ ,  $F_2^\circ = 0$  при  $Z < 0$  и  $Z > Z_2$ . Величина  $Z_2$  определяется из интегрального равенства (3.10) для  $F_2^\circ$ :  $Z_2 = \sqrt{1 + 3/2\varepsilon^2}/2\mu^\circ$ . Вычисления, аналогичные проделанным выше, дают следующие результаты:

$$C \approx C_2 = \sqrt{\pi} \xi(\varepsilon) (1 + \tau)^{-(\varepsilon^{-2} + 1/2)} \quad (5.3)$$

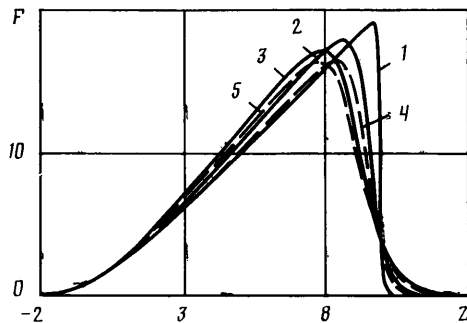
$$\Delta Z_m = \tau \mu^\circ \ln \frac{\sqrt{\pi}}{2(\mu^\circ)^3} - \frac{3}{2} \mu^\circ (1 + \tau) \ln(1 + \tau) + \mu^\circ (1 + \tau) \ln(1 + \varepsilon^2)^2 \xi(\varepsilon) \quad (5.4)$$



Как и ранее, последнее слагаемое оказывается малым по сравнению с первым и со вторым и далее отбрасывается. Зависимость  $\Delta Z_m(\tau)$ , вычисленная согласно (5.4), приведена на фиг. 3 (кривая 2), а соответствующие интегральные кривые построены на фиг. 4 (кривые 1-3 отвечают  $\tau=0, 5, 10$  ( $\varepsilon=0, 0,22, 0,31$ ); сплошные линии - численное определение  $C$ , штриховые - расчет по (5.3)). Видно, что при



Фиг. 3



Фиг. 4

данном способе нахождения  $C$  удается достичь значительно лучшей точности: разница  $\Delta Z_m$  не превосходит 25-30%.

Для получения более точной формулы, определяющей координату  $Z_m$ , была проведена серия расчетов. В них функция  $F$  также аппроксимировалась разрывной функцией, но угловой коэффициент подбирался в ходе расчетов:  $F \approx F_3^0 = 2Z(1 + q\varepsilon^2)$ . Вычисления с такой зависимостью приводят к формулам вида (5.3), (5.4), где в показателе степени и перед логарифмом коэффициент  $3/2$  следует заменить на  $q$ . Расчеты показали, что наилучшее соответствие достигается при  $q \approx 2,2$ . На фиг. 3 полученная функция  $\Delta Z_m(\tau)$  нанесена штриховой линией, отклонение  $\Delta Z_m$  от точного значения не превосходит 5%.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Онуфриев А. Т. Теория движения вихревого кольца под действием силы тяжести. Подъем облака атомного взрыва // ПМТФ. 1967. № 1. С. 3-15.
2. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977. 431 с.
3. Morton В. R. Weak thermal vortex rings // J. Fluid Mech. 1960. V. 9. № 1. P. 107-118.
4. Csanyady G. T. The buoyant motion within a hot gas plume in a horizontal wind // J. Fluid Mech. 1965. V. 22. № 2. P. 225-239.
5. Капланский Ф. Б., Эпштейн А. М. К теории турбулентных вихревых пар // Изв. АН ЭССР. Физ. и матем. 1973. Т. 22. № 4. С. 386-393.
6. Гостинцев Ю. А., Сузанов Л. А. Турбулентный концентрационно-тепловой термик при большой вязкости в нестратифицированной среде // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 6. С. 153-163.
7. Березовский А. А., Капланский Ф. Б. Всплывающее вихревое кольцо в вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 3. С. 42-48.
8. Мальбахов В. М. К теории термик в неподвижной атмосфере // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1972. Т. 8. № 7. С. 683-694.
9. Гостинцев Ю. А., Солодовник А. Ф., Лазарев В. В. К теории аэродинамики, самовоспламенения и выгорания турбулентных термик, вихревых колец и струй в свободной атмосфере // Хим. физика. 1982. № 9. С. 1279-1290.
10. Гостинцев Ю. А., Солодовник А. Ю., Лазарев В. В., Шацких Ю. В. Турбулентный термик в стратифицированной атмосфере: Препринт. Черногловка: ИХФ АН СССР, 1985. 46 с.
11. Гостинцев Ю. А., Лазарев В. В., Солодовник А. Ф., Шацких Ю. В. Турбулентный термик в стратифицированной атмосфере // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 6. С. 141-153.
12. Гершуни Г. З., Жуковичский Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
13. Коган Е. Л., Мазин И. Б., Сергеев Б. Н., Хворостянов В. И. Численное моделирование облаков. М.: Гидрометеоиздат, 1984. 185 с.
14. Махвиладзе Г. М., Якуш С. Е. Автомодельный режим подъема термика в среде с переменной плотностью // Турбулентные течения и техника эксперимента: Тез. докл. VI Всесоюз. науч. совещ. по теор. и прикл. аспектам турбулентн. течений. Таллинн, 1989. С. 127-130.

Москва

Поступила в редакцию  
2.VII.1990