

УДК 532.516.5 : 533.6.011

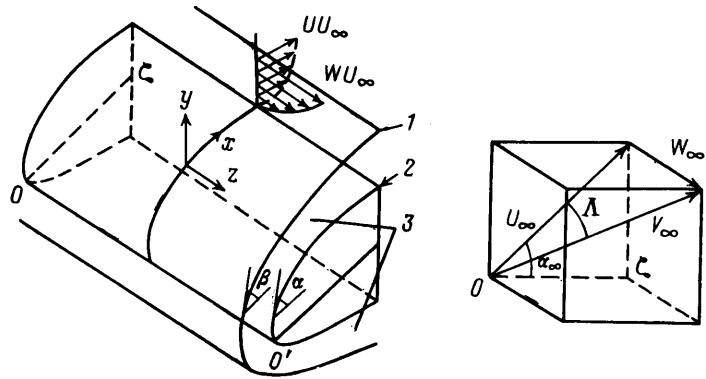
© 1991 г.

И. В. ВЕРШИНИН, Г. А. ТИРСКИЙ, С. В. УТЮЖНИКОВ

СВЕРХЗВУКОВОЕ ЛАМИНАРНОЕ ОБТЕКАНИЕ НАВЕТРЕННОЙ
ЧАСТИ СКОЛЬЗЯЩИХ КРЫЛЬЕВ БЕСКОНЕЧНОГО РАЗМАХА
В ШИРОКОМ ДИАПАЗОНЕ ЧИСЕЛ РЕЙНОЛЬДСА

Теория обтекания скользящих крыльев с учетом вязкости и сжимаемости в рамках уравнений пограничного слоя начала разрабатываться еще в 40-х годах [1-3]. В рамках теории тонкого (гиперзвукового) вязкого ударного слоя, описывающей все возмущенное течение газа от поверхности крыла до ударной волны в широком диапазоне чисел Рейнольдса, эта задача решалась в последние годы во многих работах советских авторов [4, 5]. Однако это приближение не дает удовлетворительной точности распределения давления на теле вниз по потоку, касательного напряжения трения и теплового потока к телу, а обтекание клина с малым углом полураствора рассчитать в этом приближении невозможно [6]. Поэтому существует практическая необходимость в получении решения в рамках более совершенной газодинамической модели, задачи о сверхзвуковом и в частном случае гиперзвуковом обтекании скользящих крыльев в широком диапазоне чисел Рейнольдса: от малых, соответствующих началу континуального режима обтекания, до больших, когда становится справедливой теория асимптотически тонкого пограничного слоя. В настоящее время такое решение можно получить, если воспользоваться моделью полных уравнений вязкого ударного слоя [4, 5, 7], завоевавшей в последние годы большую популярность из-за своей большой универсальности и развития эффективных численных методов ее решения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим сверхзвуковое обтекание под произвольным углом атаки α_∞ скользящего крыла бесконечного размаха с гладкой затупленной передней кромкой OO' с углом скольжения Λ (фиг. 1). Крыло симметрично относительно плоскости $\zeta OO'$ и в плане представляет бесконечную полосу. Обозначения на фиг. 1: 1 — ударная волна, 2 — крыло, 3 — вязкий ударный слой. Выпишем для этой задачи уравнения полного вязкого ударного слоя в криволинейной ортогональной естественной системе координат x, y, z , в которой координата x направлена вдоль контура сечения, перпендикулярного передней кромке крыла OO' , y — по нормали к поверхности, координату z направим вдоль образующей крыла так, чтобы тройка x, y, z образовала правую систему координат. Разложим скорость набегающего потока V_∞ в плоскости, проходящей через переднюю кромку крыла OO' , на скорость скольжения внешнего потока W_∞ ($W_\infty = V_\infty \sin \Lambda$), направленную параллельно оси z , и составляющую скорости набегающего потока, перпендикулярную передней кромке крыла U_∞ ($U_\infty = V_\infty \cos \Lambda$), тогда $V_\infty = U_\infty + W_\infty$. В случае обтекания крыла под углом атаки вектор скорости U_∞ будет составлять в плоскости перпендикулярного сечения крыла угол α_∞ с осью симметрии $O\zeta$ контура сечения крыла. Используя асимптотический подход вывода полных уравнений вязкого ударного слоя для плоской задачи [10], метод получения в [2] уравнений тонкого вязкого ударного слоя для скользящих крыльев бесконечного размаха и основное геометрическое свойство задачи, что параметры потока не меняются по размаху крыла ($\partial/\partial z = 0$), можно сразу выписать систему полных уравнений вязкого ударного слоя для рассмат-



Фиг. 1

риваемого случая

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho U) + \frac{\partial}{\partial y}(H_1 \rho V) = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho \left(\frac{U}{H} \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{UV}{RH} \right) = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}_\infty} \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[H_1^2 \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{U}{RH_1} \right) \right] \quad (1.2)$$

$$\rho \left(\frac{U}{H_1} \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{U^2}{RH_1} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} \quad (1.3)$$

$$\rho \left(\frac{U}{H_1} \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} \right) = \frac{1}{\text{Re}_\infty H_1} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(H_1 \mu \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \quad (1.4)$$

$$\rho \left(\frac{U}{H_1} \frac{\partial H}{\partial x} + V \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \frac{1}{\text{Re}_\infty H_1} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{H_1 \mu}{\sigma} \left[\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{U_\infty^2}{H_\infty} \left(\frac{\sigma-1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (U^2 + W^2) - \frac{\sigma U^2}{RH_1} \right) \right] \right\} \quad (1.5)$$

$$\frac{P}{\rho} = \frac{R_a T}{m}, \quad H_\infty H = h + (U^2 U_\infty^2 + V^2 U_\infty^2 + W^2 U_\infty^2) / 2 \quad (1.6)$$

Здесь UU_∞ , VU_∞ , WU_∞ — физические компоненты скорости соответственно по осям x , y , z , $H_\infty H$ — полная удельная энтальпия, h — термодинамическая энтальпия, ρ — плотность, P — давление, μ_∞ — коэффициент динамической вязкости, $H_1 = 1 + y/R$ — метрический параметр Ламе, $R(x)$ — радиус кривизны контура нормального сечения крыла, величины x , y , z и $R(x)$ отнесены к $R_0 = R(0)$, $\text{Re}_\infty = \rho_\infty U_\infty R_0 / \mu_\infty$ — число Рейнольдса, вычисленное по параметрам набегающего потока, $\sigma = \mu C_p / \lambda$ — число Прандтля, λ — коэффициент теплопроводности, C_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, T — абсолютная температура, m — средняя молекулярная масса газа, R_a — абсолютная газовая постоянная.

На теле поставим граничные условия непротекания и прилипания; температуру стенки T_w будем считать заданной и постоянной. На искомой внутренней границе ударной волны выставлены обобщенные условия Ренкина — Гюгонно, которые в рассматриваемом приближении имеют вид [10]

$$U_* = U_* - \frac{\mu_* (1 - \text{tg}^2 \beta_*) \cos^3 \beta_*}{\text{Re}_\infty \sin(\beta - \alpha_\infty)} \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{U}{RH_1} \right), \quad (1.7)$$

$$V_s = U_s \operatorname{tg} \beta_s - \frac{k_s \sin(\beta - \alpha_\infty)}{\cos \beta_s} \quad (1.8)$$

$$W_s = \operatorname{tg} \Lambda - \frac{\mu_s \cos \beta_s}{\operatorname{Re}_\infty \sin(\beta - \alpha_\infty)} \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)_s, \quad P_s = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + (1 - K_s) \sin^2(\beta - \alpha_\infty) \quad (1.9)$$

$$H_s = 1 - \frac{\cos \beta_s}{\operatorname{Re}_\infty \sigma_s \sin(\beta - \alpha_\infty)} \left[\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{U_\infty^2}{H_\infty} \left(\frac{1 - \sigma}{2} \frac{\partial}{\partial y} (U^2 + W^2) + \frac{\sigma U^2}{RH_1} \right) \right]_s \quad (1.10)$$

$$U_* = \cos \beta_s [\cos(\beta - \alpha_\infty) + K_s \operatorname{tg} \beta_s \sin(\beta - \alpha_\infty)] \quad (1.11)$$

$$k_s = \frac{1}{\rho_s}, \quad \sigma_s = \frac{\mu_\infty C_{ps}}{\lambda_s}, \quad \gamma = \frac{C_{p\infty}}{C_{v\infty}}, \quad M_\infty = \frac{U_\infty}{a_\infty}$$

Здесь β — угол между касательной к нормальному сечению ударной волны и плоскостью его симметрии, $\beta_s = \beta - \alpha$, где α — угол между касательной к нормальному сечению крыла и плоскостью его симметрии, a_∞ — скорость звука набегающего потока, γ — показатель адиабаты в набегающем потоке, s — условия на внутренней границе размытой ударной волны, $U_* U_\infty$ — проекция скорости за ударной волной на ось x при $\operatorname{Re}_\infty = \infty$. При $\operatorname{Re}_\infty \rightarrow \infty$ условия (1.7)–(1.10) переходят в классические соотношения Ренкина — Гюгонно для невязкого газа. В уравнении (1.7) оставлен внепорядковый член, пропорциональный $(U/RH_1)_s$. Дополнительный анализ показывает и численные решения это подтверждают, что среди аналогичных внепорядковых членов это слагаемое вносит наибольший вклад. Для определения отхода ударной волны $y_s(x)$ вместо условия (1.8) удобно использовать следующее балансовое соотношение массы в ударном слое:

$$\int_0^{y_s} \rho U dy \Big|_x - \int_0^{y_s} \rho U dy \Big|_{x=0} = \int_0^x H_{1s} \sin(\beta - \alpha_\infty) dx \quad (1.12)$$

где $y_s = y_s(x)$ — отход ударной волны, $H_{1s} = 1 + y_s/R(x)$. Угол наклона ударной волны определяется из очевидного геометрического соотношения

$$\operatorname{tg} \beta_s = \frac{1}{H_{1s}} \frac{dy_s}{dx}, \quad H_{1s} = 1 + \frac{y_s}{R(x)} \quad (1.13)$$

Уравнения полного вязкого ударного слоя (1.1)–(1.6), хотя и существенно более простые, чем уравнения Навье — Стокса, остаются достаточно сложными для численного решения, так как они сохраняют в стационарном случае эллиптический характер задачи в дозвуковых областях течения — в данном случае в окрестности притупления и в дозвуковых областях около поверхности тела. Поэтому задача Коши по маршевой координате x для уравнений вязкого ударного слоя является некорректной вдоль всей образующей сечения крыла (см. например, [11]). Как показано в [12], для определения наклона ударной волны в области затупления также требуется учет распространения возмущений вверх по потоку.

Для преодоления трудностей, связанных с эллиптическими свойствами задачи, применяется численный метод [8, 9], основанный на проведении глобальных итераций. При расчете начальной глобальной итерации для угла β_s использовалась приближенная аналитическая формула [10], давление при этом бралось в приближении Ньютона.

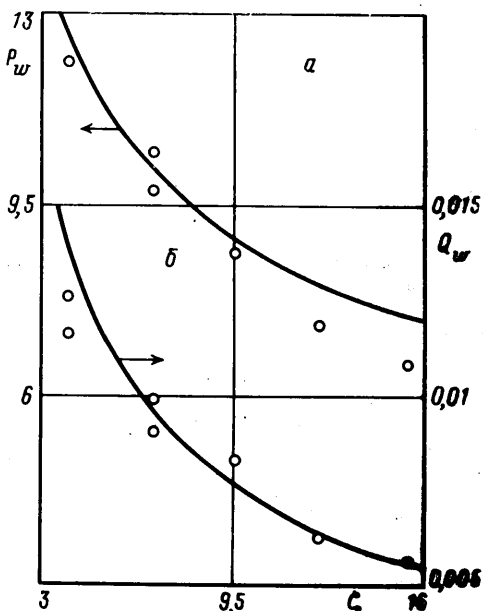
Для проведения численных расчетов использовались независимые переменные типа Дородницина — Лиза [10]. При этом использовалась разностная схема второго порядка аппроксимации по продольной координате x и четвертого — по поперечной y , являющаяся обобщением на случай уравнений вязкого ударного слоя разностной схемы, предложенной И. В. Петуховым для решения уравнений пограничного слоя.

2. Результаты расчетов. Плоскопараллельный ударный слой существенно толще, чем осесимметричный (в окрестности критической точки от-

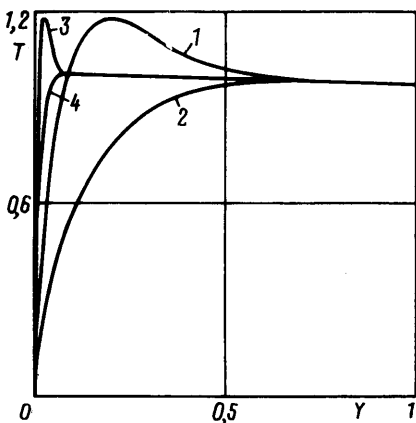
ход ударной волны для плоской задачи почти в 3 раза больше, чем для осесимметричной). Этот факт, а также наличие угла скольжения приводят к увеличению числа глобальных итераций. В данном случае это связано с более сильным влиянием условий вблизи по потоку на течение вверх по потоку. Если в осесимметричном случае число глобальных итераций для первого блока, содержащего дозвуковую область в окрестности сферического затупления носка, составляет 4–6 [9], то при обтекании кругового цилиндра с углом скольжения оно достигает 15–20, но это тем не менее значительно меньше, чем в методах установления.

В данной работе проведено сравнение численных расчетов по изложенному выше методу с экспериментальными результатами, представленными в работе [13]. Эксперимент проводился при следующих условиях: $M_\infty=9,35$, $Re_\infty=575$, $\gamma=1,4$, $\Lambda=60^\circ$, в зоне размещения датчиков $T_w=0,0874$. На фиг. 2, а приведено сравнение по давлению. Давление отнесено к давлению в набегающем потоке P_∞ . На фиг. 2, б приведено сравнение по тепловому потоку $Q/(\rho_\infty U_\infty (H_\infty - H_w))$. По оси абсцисс на фиг. 2, 4 отложено ζ , отнесенное к R_0 . На фиг. 3 и 4 приведены результаты расчетов для кругового цилиндра при следующих условиях: $T_w=0,05$, $M_\infty=15$. На фиг. 3 показаны профили температуры в критической точке:

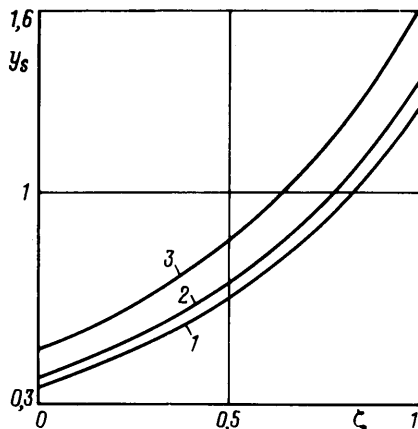
1 – $Re_\infty=10^3$, $\Lambda=60^\circ$; 2 – $Re_\infty=10^3$, $\Lambda=0^\circ$; 3 – $Re_\infty=10^5$, $\Lambda=60^\circ$; 4 – $Re_\infty=10^5$, $\Lambda=0^\circ$. Температура обезразмерена на температуру торможения. Координата y отнесена к отходу ударной волны. Наличие скольжения изменяет решение в вязком подслое (кривые 1, 3). Так как при малых числах Рейнольдса вязкий подслой шире, то влияние скольжения на решение задачи уменьшается с увеличе-



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

нием числа Рейнольдса. На фиг. 4 показана зависимость отхода ударной волны от маршевой координаты и угла скольжения при $Re_{\infty}=10^3$: 1 — $\Lambda=0^\circ$, 2 — $\Lambda=40^\circ$, 3 — $\Lambda=60^\circ$. При малых числах Рейнольдса отход ударной волны существенно возрастает с увеличением угла скольжения, это затрудняет сходимость глобальных итераций. При $Re_{\infty} \geq 10^5$ отход мало зависит от угла скольжения. При фиксированном угле скольжения тепловой поток в критической точке, отнесенный к тепловому потоку, при $\Lambda=0^\circ$ практически не зависит от числа Рейнольдса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Струминский В. В. Аэродинамика и молекулярная газовая динамика. М.: Наука, 1985. 240 с.
2. Prandtl L. Uber Reibungsschichten bei dreidimensionalen Strömungen // Festschrift zum 60. Geburtstage von A. Betz. Göttingen. 1945. S. 134–141.
3. Prandtl L. On boundary layers in three-dimensional flow // Rep. and Trans. № 64. British M. A. P. Volkerode May 1. 1946.
4. Гершбейн Э. А., Пейгин С. В., Турский Г. А. Сверхзвуковое обтекание тел при малых и умеренных числах Рейнольдса // Итоги науки и техники. ВИНТИ. Мех. жидкости и газа. 1985. Т. 19. С. 3–85.
5. Пейгин С. В., Турский Г. А. Трехмерные задачи сверх- и гиперзвукового обтекания тел потоком вязкого газа // Итоги науки и техники. ВИНТИ. Мех. жидкости и газа. 1988. Т. 22. С. 62–177.
6. Турский Г. А., Утюжников С. В. Сравнение моделей тонкого и полного вязкого ударного слоя в задаче сверхзвукового обтекания приглушенных конусов вязким газом // ПММ. 1989. Т. 53. № 6. С. 963–969.
7. Davis R. T., Rubin S. G. Non-Navier-Stokes viscous flow computations // Comput. and Fluids. 1980. V. 8. № 1. P. 101–131.
8. Васильевский С. А., Турский Г. А., Утюжников С. В. Численный метод решения уравнений вязкого ударного слоя // Докл. АН СССР. 1986. Т. 290. № 5. С. 1058–1062.
9. Васильевский С. А., Турский Г. А., Утюжников С. В. Численный метод решения уравнений вязкого ударного слоя // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27. № 5. С. 741–750.
10. Турский Г. А. К теории гиперзвукового обтекания плоских и осесимметричных затупленных тел вязким химически реагирующим газом при наличии вдува // Науч. Тр. Ин-та мех. МГУ. 1975. № 39. С. 5–38.
11. Утюжников С. В. Метод глобальных итераций для решения уравнений вязкого ударного слоя // Мат. методы управления и обработки информации. М.: изд. МФТИ, 1985. С. 141–145.
12. Васильевский С. А., Турский Г. А. О некоторых способах численного решения уравнений вязкого ударного слоя // Аэродинамика гиперзвуковых течений при наличии вдува. М.: Изд-во МГУ, 1979. С. 87–98.
13. Boger R. C., Aiello G. F. Hypersonic flow on yawed wedges with leading-edge bluntness and viscous interaction // J. Spacecraft and Rockets. 1971. V. 8. № 7. P. 729–735.

Москва

Поступила в редакцию
18.I.1990