

УДК 532.516.013.4

© 1991 г.

**Р. Ф. ГАНИЕВ, Л. Е. УКРАИНСКИЙ**

## **МОНОГАРМОНИЧЕСКИЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ, ОТВЕТВЛЯЮЩИЕСЯ ОТ ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ В ПОДАТЛИВОЙ ТРУБЕ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ**

Динамические свойства стенок трубопровода существенным образом влияют на характеристики течения протекающей по нему жидкости. Так, если течение Пуазейля по абсолютно жесткой трубе круглого поперечного сечения линейно-устойчиво при сколь угодно больших значениях числа Рейнольдса  $Re = UR/\nu$  ( $U$  — максимальная скорость невозмущенного течения,  $R$  — радиус трубы,  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости) [4–4], то для достаточно податливых стенок оно становится линейно-неустойчивым уже при конечных значениях  $Re$ , зависящих от податливости стенок [5, 6]. Данная неустойчивость обнаружена для осесимметричных, а также для трехмерных неосесимметричных возмущений с азимутальным волновым числом  $m=2$ , причем по мере увеличения податливости границы сначала неустойчивыми становятся трехмерные возмущения, а затем осесимметричные.

Что касается нелинейной неустойчивости, то для течения Пуазейля по абсолютно жесткой трубе при  $Re > 2000$  имеет место жесткое возбуждение неустойчивости [4, 7], обусловленное, согласно [8], нелинейным взаимодействием трехмерных спиральных волн конечной амплитуды. Исследований устойчивости течений по податливым трубопроводам к конечным возмущениям, насколько это известно авторам, до настоящего времени не проведено. Не установлено, какой тип возбуждения неустойчивости, мягкий или жесткий, имеет место в данном случае, не выяснено также, каким образом влияют на этот процесс упругодемпфирующие свойства стенок трубопровода, их толщина, плотность и т. п. Вместе с тем имеются экспериментальные данные [9], косвенно свидетельствующие о наличии такого влияния.

В настоящей работе исследуется бифуркационная задача вблизи нейтральных кривых, построенных для течения Пуазейля в податливой трубе. Установлено существование устойчивых автоколебательных режимов, ответвляющихся от носиков нейтральных кривых в области линейной неустойчивости как при  $Re < 2000$ , так и при  $Re > 2000$ , что соответствует мягкому режиму возбуждения автоколебаний. Определены формы ответвившихся автоколебаний, проанализировано влияние на ветвление чисел  $Re$ , а также податливости и внутренней вязкости материала оболочки. Полученные данные могут быть использованы в медицине, а также при создании стабилизирующих элементов для течений в круглых трубах.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается течение несжимаемой вязкой жидкости по вязкоупругой, прямой в недеформированном состоянии, бесконечно длинной трубе круглого поперечного сечения. Поле скоростей жидкости и давление в ней принимаются удовлетворяющими уравнениям Навье — Стокса и несжимаемости.

На оси трубопровода считаются выполненными условия ограниченности и однозначности физических компонент вектора скорости и их производных. На подвижной поверхности трубы, смачиваемой жидкостью, должны выполняться условия прилипания, а также соотношения между напряжениями, возникающими в стенке трубы при ее деформировании, и напряжениями в жидкости. Движение трубы описывалось с помощью моментной теории тонких пологих оболочек [10] в рамках гипотез Кирхгофа — Лява в предположении, что труба представляла собой ненапрянутую однослойную оболочку постоянной толщины, а материал, из которого

она изготовлена, однородный, изотропный и линейно-вязкоупругий, подчиняющийся соотношениям модели Фойгта.

Усилия, приложенные к стенке трубы со стороны жидкости, вычислялись через компоненты тензора напряжений в жидкости на подвижной поверхности соприкосновения с трубой и кинематические характеристики деформации трубы. Считалось, что движение рассматриваемой системы происходит под действием постоянной массовой силы, направление действия которой совпадает с осью недеформированной трубы, и постоянных усилий закрепления, приложенных с внешней стороны трубы.

Приведенные предположения определяют нелинейную краевую задачу для уравнений Навье — Стокса в области с подвижными границами, совпадающими с поверхностью трубы, контактирующей с жидкостью. Ниже ограничимся случаем, когда внешние массовые силы и усилия закрепления трубы таковы, что краевая задача допускает стационарное решение, соответствующее течению Пуазейля по неподвижной круглой трубе постоянного поперечного сечения.

Рассматривались такие периодические по осевой пространственной координате возмущения данного движения, которые приближенно могут быть описаны решениями усеченных уравнений возмущенного движения. В этих уравнениях сохранены произведения возмущений компонентов поля скоростей и давления в жидкости, а также поперечных перемещений серединной поверхности трубы и их производных с суммами степеней сомножителей не выше трех, кроме того произведения, содержащие продольные и азимутальные перемещения серединной поверхности и их производные в степенях не выше первой, причем в этих последних произведениях суммы степеней всех сомножителей не превосходят двух. При получении усеченных уравнений возмущенного движения граничные условия на подвижной поверхности трубы, контактирующей с жидкостью, раскладывались в ряды Тейлора по возмущениям и сносились на невозмущенную неподвижную поверхность трубы. В результате усеченные уравнения возмущенного движения могут быть представлены в виде следующей нелинейной краевой задачи:

$$L\mathbf{v} + \nabla p = N(\mathbf{v}), \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ (0 < r < 1, \quad 0 < \theta \leq 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty) \quad (1.1)$$

$$\mathbf{v} = L_k \mathbf{u} + N_k(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \quad L_{d0} \mathbf{u} + L_{d1} \mathbf{v} + L_{d2} p = N_d(\mathbf{v}, \mathbf{u}, p) \quad (r=1) \quad (1.2)$$

$$L_{aj} \mathbf{v} = 0 \quad (j=0, 1, 2; \quad r=0) \quad (1.3)$$

$$\lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ Z \rightarrow \infty}} (ZT)^{-1} \int_{-T}^{+T} \int_{-Z}^{+Z} p \, dz \, dt = 0 \quad (r=0) \quad (1.4)$$

Здесь  $\mathbf{v}$ ,  $p$ ,  $\mathbf{u}$  — безразмерные возмущения поля скоростей (с масштабом  $U$ ) и давления (масштаб  $\rho_f U^2$ , где  $\rho_f$  — плотность жидкости) в жидкости, а также перемещений серединной поверхности трубы (масштаб  $R$ ) соответственно;  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$  — цилиндрические безразмерные координаты с осью  $z$ , совпадающей с осью недеформированной трубы, и с линейным масштабом  $R$ .

Операторы  $L$ ,  $L_k$ , а также  $L_{d0}$ ,  $L_{d1}$  и  $L_{d2}$  определялись соответственно путем линеаризации относительно возмущений уравнений Навье — Стокса, условий прилипания, а также уравнений цилиндрической оболочки [10] и выражений для нагрузки, приложенной к трубе со стороны жидкости [5].

Условия (1.3) выражают граничные условия для амплитуд скорости на оси течения для нулевой ( $j=0$ ), первой ( $j=1$ ) и всех остальных азимутальных гармоник ( $j=2$ ) [5].

Условие (1.4) обеспечивает однозначность стационарных составляющих возмущений, оно получено исходя из предположения о том, что в рассматриваемом возмущенном движении усредненное по осевой пространственной координате и времени значение давления на оси течения совпадает с соответствующим значением в невозмущенном стационарном движении.

Нелинейные дифференциальные операторы  $N$ ,  $N_n$ ,  $N_a$  с указанной выше точностью аппроксимируют нелинейные относительно возмущений части уравнений Навье — Стокса, условий прилипания и уравнений оболочки соответственно.

Явный вид всех упомянутых выше операторов здесь не будем приводить из-за громоздкости.

Выбор условия (1.4) не является единственным. Оно может быть заменено, например, условием постоянства стационарной части расхода либо постоянства среднего по сечению трубы и времени давления, а также некоторыми другими. Как показывают расчеты, влияние этого условия на волновые формы и амплитуды автоколебаний, а также на характеристики устойчивости незначительно.

Линеаризованная задача (1.1) — (1.3) может иметь нетривиальные решения в виде незатухающих бегущих волн вида  $Ae^{\pm i\kappa}$ , где  $i$  — мнимая единица,  $\kappa = \alpha(z-t) + m\theta$ ,  $t$  — безразмерное время (масштаб  $T$ ),  $\alpha$  и  $m$  — продольное и азимутальное волновые числа соответственно,  $A$  — амплитуды, являющиеся функциями полярного радиуса  $r$  для возмущений скорости жидкости и давления или постоянными для перемещений срединной поверхности оболочки. Условием существования такого рода решений является выполнение определенных функциональных зависимостей между безразмерными действительными параметрами

$$C = \frac{R}{UT}, \quad \text{Re}, \quad \rho = \frac{\rho_t}{\rho_f}, \quad \delta = \frac{h}{R}, \quad \eta = \frac{\eta_t}{\rho_t R U}, \quad v_0,$$

$$M = U \sqrt{\frac{\rho_t (1 - v_0^2)}{E}}$$

где  $h$  — толщина трубы  $\rho_t$ ,  $v_0$ ,  $E$ ,  $\eta_t$  — плотность, коэффициент Пуассона, модуль Юнга и динамическая вязкость материала трубы соответственно, фигурирующими в линеаризованной краевой задаче (1.1) — (1.3), а также волновыми числами  $\alpha$  и  $m$ . Эти зависимости определяют нейтральные поверхности. Зафиксировав в них значения всех перечисленных выше параметров, кроме  $C$ ,  $M$  и  $\alpha$ , можно получить соотношения следующего вида, определяющие нейтральные кривые на плоскости  $\{\alpha, M\}$  [5]:

$$C = C(\alpha), \quad M = M(\alpha) \quad (1.5)$$

Выбираем какую-либо точку на нейтральных кривых (1.5). Пусть для определенности ей соответствуют значения  $C = C_0$ ,  $M = M_0$ . Предположим, что эта точка является изолированным простым собственным значением линеаризованной задачи и, кроме того, среди других собственных значений, которые, возможно, существуют при  $M = M_0$ , отсутствуют собственные значения вида  $C = \pm n C_0$ , где  $n$  — целое число, превосходящее по модулю единицу, и  $C_0 \neq 0$ . При этих предположениях по аналогии со случаем плоских течений с абсолютно жесткими границами [7] можно показать, что нелинейная задача (1.1) — (1.4) имеет единственное периодическое по времени решение, ответвляющееся от невозмущенного при изменении параметра  $M$  от начального значения  $M_0$ , причем должны иметь место предельные со-

отношения  $M \rightarrow M_0$ ,  $C \rightarrow C_0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , где  $\varepsilon$  — параметр, обращающийся в нуль вместе с нормой решения нелинейной задачи.

Решение задачи (1.1) — (1.4) искалось в виде

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n C_n, \quad \mathbf{v} = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \mathbf{v}_n, \quad \mathbf{u} = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \mathbf{u}_n$$

$$p = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n p_n, \quad M^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \gamma_n \quad (1.6)$$

$$\varepsilon = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \quad (1.7)$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\alpha^2}{(2\pi)^3} \int_0^{(2\pi/\alpha)} \int_0^{(2\pi/\alpha)} \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle dr d\theta dz dt$$

где  $\mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{u}_0$ ,  $p_0$  — решение линеаризованной задачи,  $\gamma_0 = M_0^{-2}$ ,  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  произвольные векторы,  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  — их скалярное произведение,  $\alpha$  принимает именно то значение, которому соответствуют  $C_0$  и  $M_0$  согласно (1.5).

Вычисление даже нескольких первых членов разложений (1.6) позволяет определить направление ветвления, т. е. установить, с какой стороны от нейтральной кривой возникают вблизи нее нелинейные автоколебательные режимы. Если режим возникает при  $M < M_0$ , то это означает, что он имеет место в системе с оболочкой более жесткой, чем отвечающая значению  $M = M_0$ , при постоянных значениях остальных параметров в области линейной устойчивости. В противном случае нелинейный режим возникает в области линейной неустойчивости для систем с оболочками более мягкими, чем соответствующие нейтральным кривым (1.5).

**2. Методика вычислений.** Подставляя (1.6) в (1.1) — (1.4) и приравнивая члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получаем последовательность линейных краевых задач, первая из которых (так называемая порождающая) совпадает с линеаризованной исходной и является однородной, а остальные представляют собой неоднородные линейные краевые задачи, в правых частях которых фигурируют суммы произведений гармоник вида  $e^{\pm i n \kappa}$ , где  $n$  — целое, на функции полярного радиуса  $r$ . Решения полученных задач искались в виде таких же сумм с неизвестными коэффициентами, зависящими от  $r$ , при экспонентах. Для коэффициентов получались линейные неоднородные краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений.

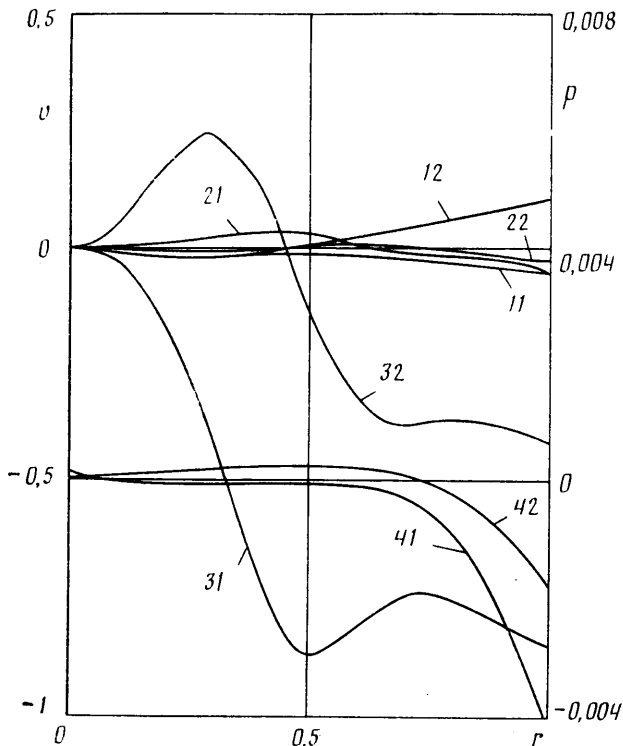
Условие нормировки (1.4) обеспечивало однозначность стационарных составляющих решений, а (1.7) — однозначность коэффициентов при  $e^{\pm i \kappa}$ .

Уравнение (1.1) в цилиндрических координатах имеет сингулярность при  $r=0$ . Поэтому, так же как в [5], граничные условия (1.3) сносились с оси системы в ее малую окрестность.

Последовательное численное интегрирование краевых задач осуществлялось с помощью метода дифференциальной прогонки [11]. Точки стыковки выбирались в критическом слое. Сокращений интервала интегрирования не проводилось. Прогночные уравнения интегрировались методом Рунге — Кутты — Мерсона с автоматическим выбором шага.

Условия разрешимости соотношений, получающихся в точке стыковки после снесения в нее граничных условий с обоих концов интервала интегрирования при решении краевых задач для коэффициентов при гармониках  $e^{\pm i \kappa}$  в выражениях для возмущений, использовались для определения коэффициентов  $\gamma_n$  и  $C_n$  в первом и последнем из разложений (1.6).

**3. Результаты расчетов.** Значения параметров, при которых проводились вычисления, соответствовали точкам на ряде найденных в [5] нейтральных кривых. Типичные распределения амплитуд волновых форм компонент возмущений скоростей жидкости и давления, удовлетворяющие порождающей краевой задаче, приведены на фиг. 1. Значения параметров,

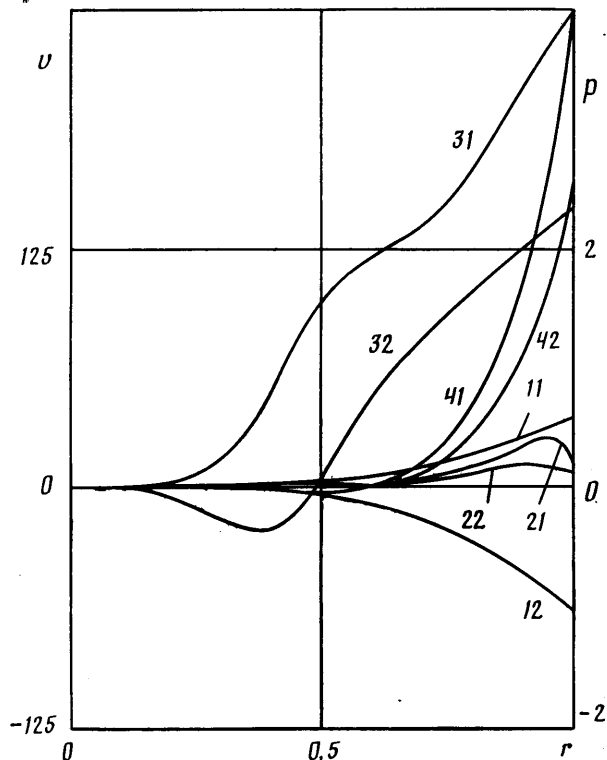


Фиг. 1

соответствующие приведенным распределениям, составляли:  $Re=2635$ ,  $v_0=0,3$ ,  $C_0=0,78$ ,  $M_0=0,063$ ,  $\alpha=0,32$ ,  $m=2$ ,  $\delta=0,01$ ,  $\rho=10$ ,  $\eta=0$ . Первые цифры у кривых на фиг. 1 обозначают цилиндрические составляющие амплитуд вектора  $v_0$ , а также амплитуды  $p_0$ , фигурирующие в (1.6): 1 — радиальную, 2 — азимутальную, 3 — осевую, 4 — амплитуду давления. Вторые цифры 1 и 2 обозначают действительные и мнимые части амплитуд соответственно.

Характерной чертой приведенной волновой формы является преобладание осевых составляющих компонентов скорости жидкости над радиальными и тангенциальными, как это видно из сравнения кривых 11, 12, 21, 22 с кривыми 31, 32 на фиг. 1. Такое свойство сохранялось и для форм, отвечающих другим значениям параметров на нейтральных кривых. Между продольными, поперечными и азимутальными составляющими амплитуд перемещений срединной поверхности оболочки  $u_0$ , отвечающих данной волновой форме, выполняется противоположное соотношение: радиальные и азимутальные составляющие существенно превосходят осевые. Амплитуды давления практически отличны от нуля лишь вблизи податливой стенки. В приосевой зоне течения они пренебрежимо малы.

Последовательное рассмотрение краевых задач второго, четвертого и более высоких четных приближений позволило установить, что их решения представляют собой суммы четных гармоник решения порождающей задачи, а также стационарных слагаемых и, кроме того, коэффициенты  $C_n$  и  $\gamma_n$  для нечетных  $n$  принимают нулевые значения. На фиг. 2 представлены результаты интегрирования краевой задачи второго приближения. Составляющие вектора  $v_1$  представляют собой сумму второй гармоники и стационарного слагаемого, а слагаемое  $p_1$  — только вторую гармонику. Амплитуды гармонических составляющих  $v_1$  и  $p_1$  обозначены на фиг. 2

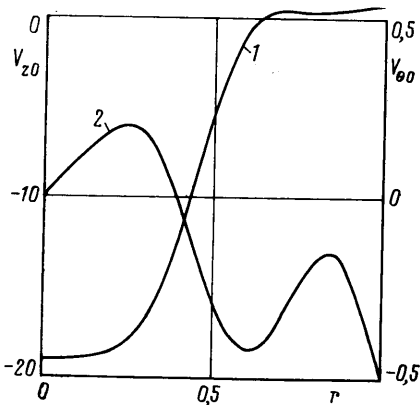


Фиг. 2

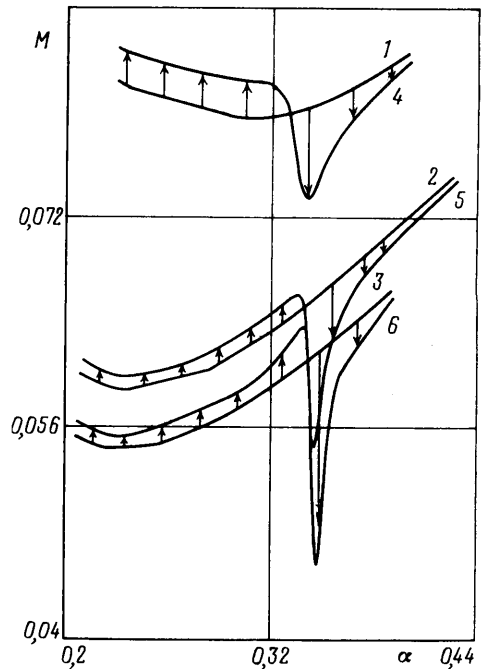
аналогично тому, как обозначены соответствующие амплитуды величин  $v_0$  и  $p_0$  на фиг. 1. Как видно из фиг. 2, так же как и для порождающего решения, доминирующей оказывается осевая компонента. Среди амплитуд вторых гармоник составляющих вектора перемещения срединной поверхности оболочки  $u_1$  доминирующей является амплитуда радиальной составляющей. Эта закономерность сохранялась для всех рассмотренных значений параметров.

Стационарное слагаемое вектора  $v_1$  имеет две ненулевые компоненты: осевую  $v_{z0}$  и азимутальную  $v_{\theta 0}$ . Их распределения как функции полярного радиуса приведены на фиг. 3 и обозначены соответственно цифрами 1 и 2. Как видим, волновой процесс сопровождается в данном случае возникновением односторонне направленного течения, которое вблизи стенки направлено в ту же сторону, что и основное невозмущенное течение, а в приосевой зоне — в противоположную сторону. Причем величина приосевого течения существенно превосходит величину пристенного и может оказать некоторое влияние на сопротивление. Волновой процесс сопровождается также возникновением медленного вращения жидкости вокруг оси трубы, что обусловлено неосесимметричностью возбуждаемой волновой формы. Направление и величина скорости вращения изменяются в зависимости от расстояния до оси течения.

Расчеты коэффициентов  $\gamma$  и  $C_2$  позволили определить направление ветвления автоколебательных режимов рассматриваемого вида. Характер ветвления на плоскости параметров  $\{\alpha, M\}$  иллюстрируется графически на фиг. 4, где цифрами 1, 2, 3 обозначены нейтральные кривые для чисел  $Re=1000, 2600$  и  $5000$  соответственно. Во всех случаях рассматривались наиболее опасные с точки зрения потери устойчивости возмущения, ко-



Фиг. 3



Фиг. 4

торыми являются несесимметричные волновые формы с  $m=2$  [5, 6]. Точкам кривых 4, 5, 6 отвечают те значения  $\alpha$  и  $M$  при  $Re=1000, 2600$  и  $5000$ , для которых существуют автоколебательные режимы с  $\epsilon=0,65 \cdot 10^{-4}$ . При построении последних кривых предполагалось, что для указанных значений  $\epsilon$  в разложениях (1.6) достаточно ограничиться первыми двумя отличными от нуля членами. Стрелками на фиг. 4 показано направление ветвления автоколебаний.

В зависимости от  $\alpha$  автоколебательные режимы могут иметь место в системах как с более жесткими, чем для точек нейтральных кривых, оболочками, так и с более податливыми. В первом из этих случаев ветвление происходит в область устойчивости невозмущенного течения (жесткое возбуждение), а во втором — в область неустойчивости (мягкое возбуждение). Исследование устойчивости найденных режимов приводит в данном случае к результатам, аналогичным хорошо известным для плоскопараллельных течений с абсолютно жесткими границами [11]: жестко ответвляющиеся автоколебательные режимы неустойчивы к любым абсолютно малым возмущениям, а мягко ответвляющиеся — устойчивы в малом к возмущениям амплитуды.

Поскольку нейтральные кривые линейной устойчивости имеют в данном случае на плоскости  $\{\alpha, M\}$  петлеобразный вид, такой же, как и кривые нейтральной устойчивости плоскопараллельных течений с абсолютно жесткими границами на плоскости  $\{\alpha, Re\}$ , то мягко ответвляющиеся режимы могут быть устойчивыми к любым возмущениям и, следовательно, принципиально реализуемыми лишь в том случае, если точка ветвления совпадает с носиком нейтральной кривой. Как видно из фиг. 4, при всех рассмотренных значениях  $Re$  носики нейтральных кривых лежат левее точки смены направления ветвления и ветвление автоколебаний от носиков происходит в сторону неустойчивости основного режима, т. е. мягко, и, следовательно, эти моногармонические автоколебания принципиально реализуемы. Данное обстоятельство существенно отличает рассматривае-

мый случай от течений с абсолютно жесткими границами, для которых типично жесткое возбуждение с ответвляющимися неустойчивыми автоколебаниями [11]. Таким образом, податливое покрытие трубы в определенном смысле является стабилизирующим элементом. Это, однако, относится лишь к системам с чрезвычайно податливым материалом оболочки, которым отвечают носики нейтральных кривых линейной устойчивости [5, 6].

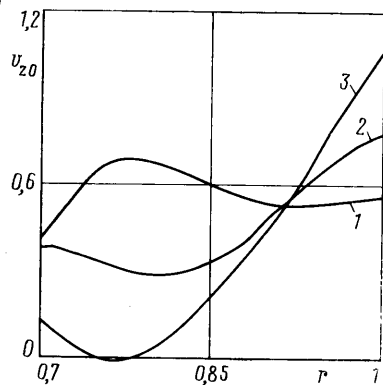
Сравнивая расстояния между кривыми 1 и 4, 2 и 5, а также 3 и 6 на фиг. 4 вблизи носиков нейтральных кривых, можно заметить, что оно уменьшается с ростом  $Re$ . Это свидетельствует о том, что амплитуды ответвившихся автоколебаний нарастают тем быстрее по мере удаления от нейтральных кривых, чем больше  $Re$ .

Из вида кривых 4, 5 и 6 на фиг. 4 можно заключить, что на той их части, которая отвечает жесткому режиму возбуждения автоколебаний, имеется характерный выступ, направленный в ту сторону плоскости  $\{\alpha, M\}$ , которая отвечает системам с более жесткими оболочками. Причем расстояние от вершины выступа до нейтральной кривой с ростом  $Re$  возрастает, а сам выступ как бы заостряется. Этот факт позволяет высказать гипотезу о том, что в линейно-устойчивых системах с податливыми оболочками, которым отвечают точки, лежащие ниже нейтральных кривых на фиг. 4, возможно возникновение неустойчивости именно благодаря наличию неустойчивого автоколебательного режима малой амплитуды рассматриваемого здесь типа вблизи вершины упомянутого выступа. Таким образом, для течения Пуазейля в круглых податливых трубах возможен также и жесткий механизм потери устойчивости.

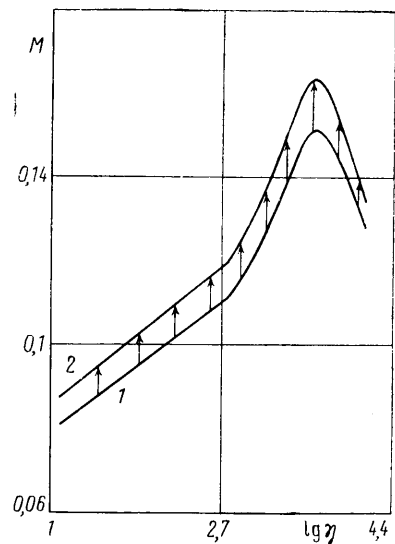
Как видно из фиг. 4, направление ветвления, а также устойчивость ответвившихся режимов зависят от величины волнового числа  $\alpha$ . Определенное представление об одном из механизмов этого влияния дает фиг. 5, где представлены пристенные части профилей стационарных составляющих скорости  $v_{z0}$  для  $Re=2600$  и трех значений  $\alpha$ : кривой 1 соответствует  $\alpha=0,209$ , 2 —  $\alpha=0,318$  и 3 —  $\alpha=0,427$ . Как видим, стационарные добавки по-разному искривляют профиль невозмущенного движения. По мере перемещения вдоль нейтральной кривой от длинно- к коротковолновым возмущениям искривление все более способствует возникновению на возмущенном стационарном профиле точек перегиба, что и способствует неустойчивости.

Влияние внутренней вязкости материала оболочки  $\eta$  на ответвляющиеся режимы иллюстрируется на фиг. 6, где кривые 1 и 2 представляют собой соответственно зависимости от  $\eta$  значений  $M$ , отвечающих носикам нейтральных кривых при  $Re=1000$ , а также тех значений  $M$ , при которых ответвившиеся от этих носиков режимы имеют амплитуду  $\varepsilon=0,0001$ . Стрелками показано направление ветвления, которое при всех показанных на фиг. 6 значениях  $\eta$  имеет мягкий характер. Весь диапазон рассматриваемых значений  $\eta$  можно разбить на два участка, на которых влияние внутренней вязкости на ответвившиеся режимы противоположно. На левом участке, где обе кривые монотонно возрастают,  $\eta$  способствует линейной устойчивости. Расстояние между кривыми 1 и 2 на этом участке существенно выше, чем на правом, где увеличение  $\eta$  способствует линейной дестабилизации. Это свидетельствует о том, что амплитуды ответвившихся автоколебаний по мере удаления от нейтральной кривой быстрее нарастают на правом участке, чем на левом, т. е. увеличение внутренней вязкости материала оболочки до определенного значения, разделяющего правый и левый участки, обладает стабилизирующим действием, которое сохраняется для довольно широкого диапазона податливых материалов, податливость которых превосходит значения, соответствующие нейтральной кривой линейной устойчивости. Для превышающих указанное значение вяз-





Фиг. 5



Фиг. 6

костей наряду с расширением области линейной неустойчивости происходит увеличение амплитуд ответвившихся автоколебаний.

Таким образом, в рамках принятых предположений для течений вязкой жидкости по весьма податливым трубопроводам существует два диапазона значений внутренней вязкости материала оболочки трубопровода. В первом из них внутренняя вязкость способствует стабилизации, а во втором, наоборот, имеет дестабилизирующее действие.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Davey A., Drazin P. G. The stability of Poiseuille flow in a pipe // J. Fluid Mech. 1969. V. 36. № 2. P. 209–218.
2. Salwen H., Grosch C. E. Stability of Poiseuille flow in a pipe of circular cross-section // J. Fluid Mech. 1972. V. 54. № 1. P. 93–112.
3. Вильгельми Т. А., Гольдштик М. А., Сапожников В. А. Устойчивость течения в круглой трубе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 1. С. 20–24.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. С. 416.
5. Ганиев Р. Ф., Малых Ю. Б., Украинский Л. Е. Линейная устойчивость течения вязкой несжимаемой жидкости в круглой вязкоупругой трубе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 6. С. 126–134.
6. Ганиев Р. Ф., Малых Ю. Б., Украинский Л. Е. О динамическом взаимодействии вязкой несжимаемой жидкости с эластичной трубой // Вибротехника. Вильнюс, 1987. № 2/55. С. 85–90.
7. Джозеф Л. Устойчивость движения жидкости. М.: Мир, 1981. С. 149.
8. Никитин Н. В. О жестком возбуждении автоколебаний в течении Гагена – Пуазейля // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 5. С. 181–183.
9. Ганиев Р. Ф., Украинский Л. Е., Телалов А. И., Менделуца В. М. Экспериментальное исследование течения жидкости в трубопроводах с податливыми стенками // Бионика. Киев, 1980. № 14. С. 46–50.
10. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. С. 27–28.
11. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 366 с.

Москва

Поступила в редакцию  
20.IX.1990