

УДК 532.516

© 1991 г.

С. И. ЧЕРНЫШЕНКО

ОТРЫВНОЕ ОБТЕКАНИЕ УСТУПА, ВЫСОТА КОТОРОГО МНОГО БОЛЬШЕ ТОЛЩИНЫ НИЖНЕГО ПОДСЛОЯ ОБЛАСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В рамках теории взаимодействия пограничного слоя со сверхзвуковым потоком рассмотрено обтекание малого уступа. Высота уступа предполагается много большей толщины нижнего подслоя области взаимодействия, но много меньшей толщины пограничного слоя. В соответствующем пределе структура течения оказывается во многом подобной структуре течения в известной модели Бэтчелора. В частности, завихренность в отрывной зоне в пределе постоянна, а отрывную зону окружает рециркуляционный пограничный слой. При произвольном значении завихренности в отрывной зоне решение в рециркуляционном слое не срачивается с решением в отрывной зоне. Изменение завихренности в сторону уменьшения этого рассогласования приводит к появлению вторичного отрыва. При этом рассогласование оказывается довольно малым и линейная экстраполяция позволяет получить величину донного давления, удовлетворительно согласующуюся с экспериментом. Однако правомочность подобного подхода требует дальнейшего обоснования.

В работе [1] была рассмотрена задача обтекания уступа сверхзвуковым потоком (фиг. 1). Предполагалось, что высота уступа сравнима с толщиной нижнего подслоя области свободного взаимодействия. После предельного перехода $Re \rightarrow \infty$ был рассмотрен второй предельный переход, в котором отношение высоты уступа к толщине нижнего подслоя также стремится к бесконечности. Получающаяся задача, относящаяся к задачам о локальном отрыве, благодаря второму предельному переходу имеет многие черты, характерные для задач о глобальном отрыве. В частности, течение внутри отрывной зоны оказывается невязким течением с постоянной завихренностью, величину которой необходимо определить из анализа окаймляющего отрывную зону пограничного слоя. В [1] такой анализ проведен не был, а величина завихренности была определена из грубых приближенных соображений. Ниже эта задача изучена более детально, и особое внимание уделено циклическому пограничному слою. Кроме того, в отличие от [1] разделяющая линия тока не предполагается прямой.

1. Пусть уступ расположен на расстоянии L от начала пограничного слоя. Будем считать стенку теплоизолированной, вязкость линейно зависящей от температуры, число Прандтля равным единице, поток вне пограничного слоя сверхзвуковым и введем число Рейнольдса $Re = UL/\nu_\infty$ по скорости U и вязкости ν_∞ потока на бесконечности. Устремим $Re \rightarrow \infty$ и предположим, что высота уступа имеет порядок $Re^{-5/8}$. Тогда при введении подходящих масштабов течение в окрестности уступа будет описываться уравнениями теории свободного взаимодействия [1] (см. также [2])

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

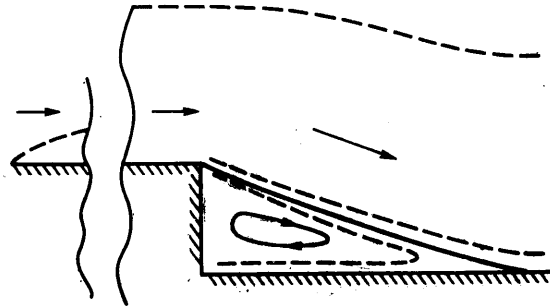
$$u(x, \Lambda) = v(x, \Lambda) = 0, \quad x < 0; \quad u(x, 0) = v(x, 0) = 0, \quad x > 0 \quad (1.2)$$

где Λ — безразмерная высота уступа. Давление $p = p(x)$ определяется из

условия

$$y \rightarrow \infty, \quad v/u \rightarrow p; \quad x \rightarrow +\infty, \quad p \rightarrow 0 \quad (1.3)$$

Уравнения теории свободного взаимодействия непригодны в непосредственной окрестности уступа. Оценки показывают, что в этой области вязкими членами в уравнениях Навье — Стокса в первом приближении можно пренебречь, хотя детальный анализ затруднителен. Эффективно невязкий характер течения в этой области влечет за собой выполнение в ней



Фиг. 1

интеграла Бернулли вдоль линий тока, что наряду с $\partial p/\partial y = 0$ приводит к следующему условию на вертикальной стенке уступа:

$$x=0, \quad 0 < y < \Lambda, \quad u^2 = f(\psi) \quad (1.4)$$

где ψ — функция тока. Далее рассмотрена асимптотика решения задачи (1.1) — (1.4) при $\Lambda \rightarrow \infty$.

2. Будем предполагать, что при $x < 0$ возвратные течения отсутствуют. В этом случае при $x < 0$ осуществляется хорошо изученное течение разрежения со свободным взаимодействием [2], целиком определяемое значением p при $x=0$. Причем при $p(0) \rightarrow -\infty$ имеет место следующее разложение [2]:

$$u(0, y) = y - \Lambda + \sqrt{-2p(0)} + \dots \quad (2.1)$$

справедливое при $y - \Lambda$ порядка или много больше, чем $(-p(0))^{1/2}$. (Неверным это разложение становится лишь при $y - \Lambda \sim (-p(0))^{-1/2}$ [2].)

В предлагаемой модели получается, что $p(0) \rightarrow -\infty$ при $\Lambda \rightarrow \infty$. Поэтому соотношение (2.1) следует рассматривать как граничное условие для течения при $x > 0$. (При $y - \Lambda \sim (-p(0))^{-1/2}$ следует брать разложение в вязкой подобласти [2], конкретный вид которого, однако, далее оказывается несущественным.)

Сделаем замену $y = \Lambda Y$, $x = \Lambda^{3/2} X$, $p = \Lambda^{3/2} P$. Выбор показателей степени объяснен в [1]. Правильность выбора обосновывается просто согласованностью получаемых результатов (в той мере, в какой эта согласованность достигнута). Переходя после этой замены к пределу $\Lambda \rightarrow \infty$ в (1.1), получим, что член $\partial^2 u/\partial y^2$ выпадает из уравнений. В результате оказывается выполненным параболизованный вариант интеграла Бернулли: $\frac{1}{2}u^2 + p = H(\psi)$, где ψ — функция тока. Это приводит к необходимости отдельно рассматривать течения вне и внутри отрывной зоны. Вне отрывной зоны функцию $H(\psi)$ можно определить из (2.1). Положив $\psi=0$ на твердой стенке, получим при $\psi > 0$: $H(\psi) = \sqrt{2\psi}$.

В отрывной зоне линии тока либо замкнуты, либо приходят в точку $x=0$, и тогда на них выполнено (1.4). Применив к (1.1) рассуждения, проводимые при доказательстве теоремы Прандтля — Бэтчелора [3],

и учтя (1.4), получим «параболизированный» вариант этой теоремы: при $\Lambda \rightarrow \infty$ внутри отрывной зоны завихренность постоянна

$$\omega = -\frac{\partial u}{\partial y} = \text{const}$$

Линия раздела между отрывной зоной и внешним потоком оказывается при этом тангенциальным разрывом. Пусть форма этого разрыва описывается уравнением $Y=W(X)$. Тогда вне и внутри отрывной зоны получим

$$u = \Lambda [Y + A(X) + \dots], \quad v = \Lambda^{1/2} [-A'Y - AA' + \dots],$$

$$W' = -A' = P \quad (2.2)$$

$$u = \Lambda^{1/2} [-\Omega(Y - 1/2W) + \dots], \quad v = \Lambda^{3/2} [-\Omega W'/2 + \dots],$$

$$P' = -1/4 \Omega^2 W W' \quad (2.3)$$

где $\Omega = \Lambda^{-1/2} \omega = \text{const}$ — завихренность в отрывной зоне. Исключив из (2.2) и (2.3) $P(X)$, получим уравнение относительно $W(X)$, решение которого имеет вид

$$-1/2 \Omega W = \sqrt{-2P_b} \operatorname{tg} [1/4 \Omega \sqrt{-2P_b} (X - X_r)] \quad (2.4)$$

Условие того, что разделяющая линия тока исходит из кромки уступа, дает $W(0) = 1$. Следовательно

$$\Omega = 2\sqrt{-2P_b} \operatorname{tg} [1/4 \Omega \sqrt{-2P_b} X_r] \quad (2.5)$$

Таким образом, форма отрывной зоны определена с точностью до трех констант: X_r — координаты точки присоединения, P_b — давления торможения невязкого потока в отрывной зоне на ее границе, и Ω . Одну из этих констант можно исключить с помощью (2.5). Вычисление остальных двух требует анализа пограничного слоя, возникающего около тангенциального разрыва и стенки, и области присоединения потока.

3. Область присоединения потока при $\Lambda \rightarrow \infty$ изучена в [1] и вполне аналогична области присоединения, рассмотренной в [4]. Для дальнейшего существенно лишь, что эта область оказывается эффективно невязкой и что решение в ней сращивается с остальными областями только при выполнении известного условия Чепмена — Корста: давление торможения в слое смешения на разделяющей линии тока должно быть равно статическому давлению далеко вниз по течению. Положим в пограничном слое

$$u = \Lambda^{1/2} \sqrt{-2P_b} w(s, \eta), \quad \psi = \Lambda^{2/5} (-2P_b) \eta \quad (3.1)$$

$$x = \begin{cases} \Lambda^{3/5} (-2P_b)^{3/2} s, & 0 \leq s \leq s_r \\ \Lambda^{3/5} (-2P_b)^{3/2} (2s_r - s), & s_r \leq s \leq 2s_r \end{cases}$$

Здесь η — масштабированная функция тока в пограничном слое, а $s_r = (-2P_b)^{3/2} X_r$ — координата точки присоединения. Как видно из связи s и x , продольная координата в пограничном слое отсчитывается от 0 до s_r в слое смешения и от s_r до $2s_r$ — в пристенном слое, причем отсчет ведется в направлении течения. Уравнения пограничного слоя в переменных Мизеса получаются при подстановке (3.1) в (1.1) при $\Lambda \rightarrow \infty$

$$w \frac{\partial w}{\partial s} = U(s) U'(s) + w \frac{\partial}{\partial \eta} w \frac{\partial w}{\partial \eta} \quad (3.2)$$

Скорость невязкого течения в отрывной зоне на ее границе получается из (2.3) и (2.4) и имеет вид

$$U(s) = \operatorname{tg} [\theta |s/s_r - 1|], \quad \theta = \Omega P_b^2 X_r \quad (3.3)$$

Функция тока η изменяется от $-\infty$ до $+\infty$ при $0 < s < s_r$, т. е. в слое смешения, и от $-\infty$ до нуля при $s_r < s < 2s_r$, т. е. в пристенном слое. Эффективно невязкий характер течения в области присоединения приводит к тому, что на выходе из нее профиль скорости оказывается просто перевернутым профилем скорости в слое смешения, а в переменных Мизеса он вообще не изменяется. Это позволяет воспринимать весь пограничный слой при $0 \leq s \leq 2s_r$ как единое целое. Граничные условия таковы: в набегающем потоке из (2.1) вытекает

$$s=0, \quad \eta > 0, \quad w = \sqrt{1 + 2\eta + (\operatorname{tg} \theta)^2} \quad (3.4)$$

из (1.4) следует условие периодичности

$$s=0, \quad \eta < 0, \quad w(0, \eta) = w(2s_r, \eta) \quad (3.5)$$

условие прилипания дает

$$s_r < s < 2s_r, \quad w(s, 0) = 0 \quad (3.6)$$

Срачивание с невязким течением внутри отрывной зоны приводит к условию $w(s, \eta) \rightarrow U(s)$ при $\eta \rightarrow -\infty$. Однако для единственности решения (3.2)–(3.6), по-видимому, достаточно потребовать ограниченности $w(s, \eta)$

$$w(s, -\infty) < \infty \quad (3.7)$$

Эта идея была высказана в [5], хотя попытка доказательства, принятая в этой работе, оказалась неудачной [6].

При заданных значениях s_r и θ задача (3.2)–(3.7) может быть решена численно. При этом, в частности, оказываются вычисленными величины

$$K(s_r, \theta) = w(s_r, 0) - 1, \quad g(s_r, \theta) = \lim_{\eta \rightarrow -\infty} [U^2(s) - w^2(s, \eta)]$$

Для того чтобы решение в области присоединения срачивалось с решениями в остальных областях, должно быть выполнено, как уже говорилось, условие Чепмена–Корста, которое во введенных обозначениях принимает вид $K(s_r, \theta) = 0$. Условие срачивания решения в пограничном слое с невязким течением в отрывной зоне сводится к требованию $g(s_r, \theta) = 0$. Это дает два уравнения для определения двух неизвестных s_r и θ .

Под донным давлением следует понимать давление торможения невязкого потока на оси симметрии в отрывной зоне, хотя благодаря условию (1.4) область торможения набегающего на стенку из отрывной зоны потока и исключена из рассмотрения. Если s_r и θ известны, то донное давление может быть определено по формуле

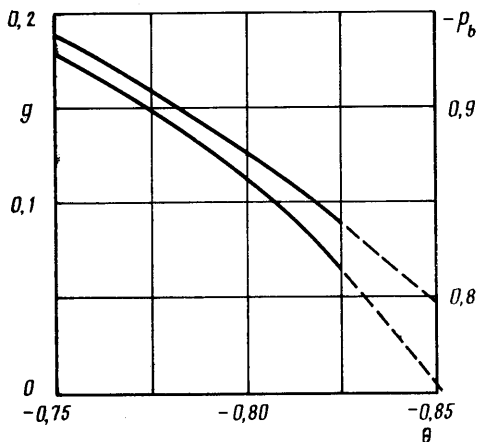
$$-P_b = 2^{-3/s} (s_r \theta^{-1} \operatorname{tg} \theta)^{-2/s}$$

вытекающей из (2.5), (3.1) и (3.3). Эта формула совпадает с формулой работы [1] в пределе $\theta \rightarrow 0$, отвечающем прямолинейной границе отрывной зоны (в [1] использовано обозначение $-P_b = k_0$).

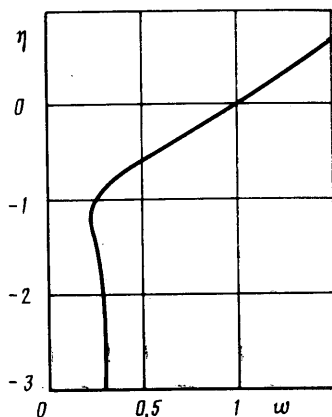
4. При численном решении условие (3.7) заменялось условием

$$\left. \frac{\partial w}{\partial \eta} \right|_{\eta = \eta_{\min}} = 0$$

где $\eta_{\min} < 0$ – нижняя граница расчетной области. При заданных s_r и θ расчет производился итерационным методом: по заданному $w(0, \eta)$ при $\eta < 0$ с помощью маршевой схемы определялось $w(2s_r, \eta)$, которое принималось за новое $w(0, \eta)$, и так далее до установления. Программа, реализующая эту процедуру, использовалась в качестве подпрограммы вычисления $K(s_r, \theta)$ при численном решении уравнения $K(s_r, \theta) = 0$ относительно s_r при заданном θ .



Фиг. 2



Фиг. 3

Результаты численных расчетов приведены на фиг. 2 в виде графиков зависимости $-P_b$ и g от θ . Продолжить расчеты при больших $|\theta|$ не удалось из-за возникновения вторичного отрыва (т. е. отрицательных значений w^2) в слое смешения. Величина g при наибольших достигнутых значениях $|\theta|$ оказывается невелика, что можно трактовать как слабость вторичного отрыва. Поэтому можно рассматривать полученное решение как приближенное. Расчет дает при $\theta = -0,825$ значение $-P_b \approx 0,835$. Используя линейную экстраполяцию (штриховая линия на фиг. 2), можно получить, что равенство $g=0$ будет выполнено при $\theta \approx -0,85$. При этом линейная экстраполяция дает $-P_b \approx 0,80$. Значение 0,8 дано в [1] как результат обработки экспериментальных данных. Совпадение может быть случайным. Действительно, согласно экспериментальным данным [7], донное давление для уступа и кромки практически одинаково, в то время как в данной теории эти случаи должны сильно различаться. В данной теории, как и в [1], не учтено отличие числа Прандтля от единицы. Наконец, данная теория предсказывает значительные изменения статического давления внутри отрывной зоны, что противоречит эксперименту. И все же полученное совпадение позволяет считать целесообразным дальнейшее исследование вопроса о вторичном отрыве.

5. Появление вторичного отрыва в рассматриваемом течении может показаться неожиданным. Действительно, в этой задаче в циклическом пограничном слое градиент давления благоприятен всюду на твердой стенке, а торможение потока на границе слоя происходит лишь в слое смешения. Более детальный анализ проясняет ситуацию. При $\eta \rightarrow -\infty$ в соответствии с (3.7) $w(s, \eta) \rightarrow w_\infty(s)$. Рассмотрим поведение решения задачи о рециркуляционном слое при $\eta \rightarrow -\infty$. При $\eta \rightarrow -\infty$ положим $w(s, \eta) = w_\infty(s) + v(s, \eta)$. Считая $v \ll w_\infty$, линеаризуем (3.2). После замены переменных $vw_\infty(s) = v_*(t, \eta)$, $w_\infty(s) ds = dt$ придем к уравнению

$$\frac{\partial v_*}{\partial t} = \frac{\partial^2 v_*}{\partial \eta^2} \quad (5.1)$$

Член UU' сокращается при этом с $w_\infty w_\infty'$. При $\eta < 0$ функция $w(s, \eta)$ периодична по s с периодом $2s_r$. Частное решение (5.1), полученное методом разделения переменных, имеет вид

$$v_* = \text{const } e^{V^{1/2} \lambda \eta} \sin(\sqrt{1/2} \lambda \eta + \lambda t)$$

Минимальное значение $\lambda_{\min} = 2\pi/T$, где $T = t(2s_r)$. Поэтому при $\eta \rightarrow -\infty$

$$w(s, \eta) = w_\infty(s) + \text{const } w_\infty^{-1}(s) e^{V^{1/2} \lambda_{\min} \eta} \sin(\sqrt{1/2} \lambda_{\min} \eta + \lambda_{\min} t) \quad (5.2)$$

Следовательно, всегда существуют такие значения η , при которых $w(s, \eta) < w_\infty(s)$. Как указано выше, завихренность в отрывной зоне долж-

на быть выбрана так, чтобы $w_\infty(s) = U(s)$. Если невязкий поток внутри отрывной зоны имеет точки торможения, то в этих точках $U(s) = 0$ и должно быть $w_\infty(s) = 0$. Поэтому при приближении к точкам торможения невязкого потока следует ожидать обращения в нуль скорости в какой-либо точке внутри пограничного слоя.

Построенное разложение неравномерно пригодно, так как вблизи точек, в которых $w_\infty(s) = 0$, второй член в (5.2) больше первого. Предположим, что $w_\infty(s) \sim s - s_r$ при $s \rightarrow s_r$, как это и имеет место в рассмотренном выше частном случае. Так как разложение построено в предположении малости v , введем малый параметр ε в явном виде, положив в (5.2) $\text{const} = \varepsilon^2 C$, где C — константа порядка единицы. Тогда в (5.2) оба члена будут одного порядка при $s - s_r \sim \varepsilon$. При $s - s_r \sim \varepsilon$ в (3.2) члены $w \partial w / \partial s$ и $U U'$ оказываются порядка ε , а член $w(\partial / \partial \eta) w(\partial w / \partial \eta)$ порядка ε^3 , так что при $s - s_r \sim \varepsilon$ течение локально невязкое и особенности течения в этой области не могут предотвратить вторичного отрыва.

В качестве иллюстрации на фиг. 3 приведен профиль скорости в слое смещения вблизи точки торможения, полученный в численном расчете. Ясно виден минимум скорости в нижней части слоя. При увеличении $|\theta|$ значение скорости в точке минимума уменьшается и достигает нуля раньше, чем значение скорости при $\eta \rightarrow -\infty$.

Введение в схему течения вторичной отрывной зоны не позволяет преодолеть возникшее затруднение, так как проведенный анализ справедлив и для циклического слоя внутри этой зоны, необходимо вводить третью зону и т. д. Приходится прийти к выводу, что при $\Lambda \rightarrow \infty$, а в других задачах, для которых естественно принять модель Бэтчелора, таких, как рассмотренная в [8], при $\text{Re} \rightarrow \infty$, отрывная зона дробится до бесконечности, образуя в пределе сложную ячеистую структуру. Построить асимптотическую теорию такого течения довольно трудно: расширив класс функций, в котором разыскивается решение, можно попытаться построить равномерно пригодное комплекснозначное решение с одной отрывной зоной. Этот вопрос, однако, требует отдельного рассмотрения.

Таким образом, при расчетах отрывных течений в рамках модели Бэтчелора наличие точек торможения невязкого потока внутри отрывной зоны неизбежно влечет возникновение вторичного отрыва. Но в рассмотренной задаче обтекания малого уступа сверхзвуковым потоком вторичный отрыв оказывается относительно небольшим, что позволяет с помощью экстраполяции получить величину донного давления, согласующуюся с экспериментом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Messiter A. F., Hough G. R., Feo A. Base pressure in laminar supersonic flow // J. Fluid Mech. 1973. V. 60. Pt 3. P. 605–624.
2. Нейланд В. Я. Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений // Тр. ЦАГИ. 1974. Вып. 1529. 124 с.
3. Batchelor G. K. On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number // J. Fluid Mech. 1956. V. 1. Pt 2. P. 177–190.
4. Нейланд В. Я. К асимптотической теории присоединения сверхзвукового потока // Тр. ЦАГИ. 1975. Вып. 1650. С. 3–17.
5. Колосов Б. В., Шифрин Э. Г. Об одной краевой задаче, возникающей при исследовании замкнутых стационарных отрывных зон в несжимаемой жидкости // ПММ. 1975. Т. 39. № 5. С. 835–844.
6. Чернышенко С. И. О приближенном способе определения завихренности в зоне отрыва при вязкости, стремящейся к нулю // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 1. С. 10–15.
7. Хама. Экспериментальное исследование краевого скачка уплотнения // Ракетная техника и космонавтика. 1968. Т. 6. № 2. С. 25–34.
8. Чернышенко С. И. Расчет отрывных течений маловязких жидкостей с помощью модели Бэтчелора // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 2. С. 40–45.

Москва

Поступила в редакцию
11.VI.1990