

- поверхности треугольных пластин с острыми кромками // Уч. зап. ЦАГИ. 1975. Т. 6. № 1. С. 48–56.
5. *Богданов В. В., Колочинский Ю. Ю., Пleshакова Л. А.* Приборы для измерения плотности тепловых потоков в аэродинамических установках кратковременного действия // Тр. ЦАГИ. 1979. Вып. 1978. С. 27–34.
  6. *Богданов В. В., Казанский Р. А.* Об одном принципе создания устройств сбора данных для аэродинамических установок кратковременного действия // Тр. ЦАГИ. 1980. Вып. 2048. С. 3–13.
  7. *Ковалева Н. А., Колина Н. П., Юшин А. Я.* Исследование влияния угла атаки на переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный около нижней поверхности треугольных пластин в сверхзвуковом потоке газа // Уч. зап. ЦАГИ. 1990. Т. 21. № 4. С. 92–95.
  8. *Воскресенский Г. П., Ильина А. С., Татаренчик В. С.* Сверхзвуковое обтекание крыльев с присоединенной ударной волной // Тр. ЦАГИ. 1974. Вып. 1590. 138 с.
  9. *Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
  10. *Колман В. П.* Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Уч. зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 6. С. 68–77.
  11. *Колина Н. П., Солодкин Е. Е.* Программа на языке ФОРТРАН для численного интегрирования уравнений пространственного пограничного слоя на линии растекания и на бесконечном скользящем цилиндре // Тр. ЦАГИ. 1980. Вып. 2046. С. 66–154.
  12. *Chen K. K., Thyson N. A.* Extension of Emmons' spot theory to flows on blunt bodies // AIAA Journal. 1971. V. 9. № 5. P. 824–825.
  13. *Van Driest E. R.* On turbulent flow near a wall // J. Aeronaut. Sci. 1956. V. 23. № 11. P. 1007–1011.
  14. *Elsenaar A., Boelsma S. H.* Measurements of the Reynolds stress tensor in a three-dimensional turbulent boundary layer under infinite swept wing conditions // NLT. TR-74095 U. 1974. 21 p.

Москва

Поступила в редакцию  
16.VIII.1990

УДК 533.95:537.64

© 1991 г.

В. Ю. ЗАХАРОВ

### ОБ УСТОЙЧИВОСТИ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ АНИЗОТРОПНЫЕ ИОНЫ, ПРИ НАЛИЧИИ ЭЛЕКТРОННОГО ТЕПЛОГО ПОТОКА

В [1] была предложена система МГД-уравнений для описания бесстолкновительной плазмы, содержащей анизотропные ионы и изотропные электроны, с учетом электронного теплового потока. В [2] численно проводилось исследование полученного дисперсионного уравнения.

В настоящей работе, используя результаты [3], получены критерии на параметры однородного состояния, при которых дисперсионное уравнение из [2] не имеет комплексных корней. Полученные аналитические условия определяют границы областей неустойчивости однородного состояния относительно малых возмущений.

Рассмотрим распространение волн малой амплитуды в замагниченной бесстолкновительной плазме, электронная компонента которой изотропна, а ионная анизотропна. Предполагается, что ионный тепловой поток много меньше электронного. Замкнутая система МГД-уравнений для такой плазмы для величин нулевого порядка по  $\varepsilon = R_L L^{-1}$  ( $R_L$  – ионный ларморовский радиус,  $L$  – характерный размер) имеет вид [1, 2]

$$n = zN, \quad \frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div}(N\mathbf{v}) = 0$$

$$MN \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \operatorname{div}[(P_{\parallel} - P_{\perp})\mathbf{h}\mathbf{h}] + \nabla(p + P_{\perp}) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{v}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{p}{n^{3/2}} \right) = - \frac{5}{3n^{3/2}} \operatorname{div}(q\mathbf{h}), \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{P_{\parallel} B^2}{N^3} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{B}{n^{3/2}} \right) = \frac{B}{3pn^{3/2}} (q \operatorname{div} \mathbf{h} - 2(\mathbf{h}\nabla)q), \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{P_{\perp}}{NB} \right) = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$$

Здесь  $N$  и  $n$  – ионная и электронная объемные плотности,  $z$  – ионное атомное число,  $M$  – масса иона,  $\mathbf{v}$  – макроскопическая скорость плазмы,  $\mathbf{B}$  – вектор магнитной индукции,  $\mathbf{h} = \mathbf{B}/B$ ,  $q$  – электронный тепловой поток,  $p$  – электронное давление,  $P_{\parallel}$  и  $P_{\perp}$  – продольное и поперечное ионные давления.

В рамках системы (1) в [2] получено дисперсионное уравнение, определяющее фазовые скорости волн малой амплитуды. Для анализа дисперсионного уравнения преобразуем его, согласно [3], к виду

$$(V^2 - F^2)(f(V) - \operatorname{tg}^2 \theta g(V)) = 0 \quad (2)$$

$$f(V) = V(V^2 - F^2)(V^2 - C^2), \quad F^2 = 1 + 1/2(\beta_{\perp} - \beta_{\parallel}), \quad C^2 = 3/2\beta_{\parallel}$$

$$g(V) = (D^2 + \beta_e)V^3 - \beta_e v_e V^2 - (\beta_e A^2 + D^2 S^2)V + \beta_e v_e A^2$$

$$D^2 = 1 + \beta_{\perp}, \quad S^2 = \frac{3}{2}\beta_{\parallel} - \frac{\beta_{\perp}^2}{4(1 + \beta_{\perp})}, \quad A^2 = \frac{1}{2}(3\beta_{\parallel} - \beta_{\perp})$$

$$V = (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0) \frac{\sqrt{4\pi\rho_0}}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)}, \quad \beta_{\parallel, \perp} = \frac{8\pi P_{\parallel, \perp}}{B_0^2}$$

$$\beta_e = \frac{10\pi p_0}{B_0^2}, \quad v_e = \frac{\sqrt{4\pi\rho_0} q_0}{p_0 B_0}$$

Здесь  $V$  – безразмерная фазовая скорость линейной волны относительно среды,  $\omega$  – частота волны,  $\theta$  – угол между невозмущенным магнитным полем  $\mathbf{B}_0$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$ ;  $\beta_{\parallel}$ ,  $\beta_{\perp}$ ,  $\beta_e$  и  $v_e$  – безразмерные ионные, электронное давление и электронный тепловой поток, индекс ноль отмечает параметры невозмущенного состояния.

Дисперсионное уравнение (2) имеет семь корней. Первый множитель определяет скорость  $V_A = \pm F$  волны, аналогичной альфеновской волне изотропной МГД и анизотропной модели ЧГЛ [4]. Остальные корни определяются из уравнения

$$f(V) - \operatorname{tg}^2 \theta g(V) = 0 \quad (3)$$

При  $\theta = 0$ , л уравнение (3) всегда имеет корни  $V_{EHF} = 0$ ,  $V_{SM\pm} = \pm \min\{F, C\}$ ,  $V_{FM\pm} = \pm \max\{F, C\}$ , соответствующие трем типам волн [3]: волне *EHF* (electron heat flux), которая заморожена в среду при  $v_e = 0$ , и быстрой *FM* и медленной *SM* магнитозвуковым волнам. В этих типах волн испытывают возмущения все параметры плазмы, кроме компонент векторов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$ , ортогональных плоскости, образованной  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{B}_0$ .

При ненулевых значениях  $\operatorname{tg}^2 \theta$  в [2] проведен анализ уравнения (3) только в частном случае отсутствия электронного теплового потока в невозмущенном состоянии. При  $v_e = 0$  были выделены четыре области для давлений  $\beta_{\parallel}$  и  $\beta_{\perp}$ :

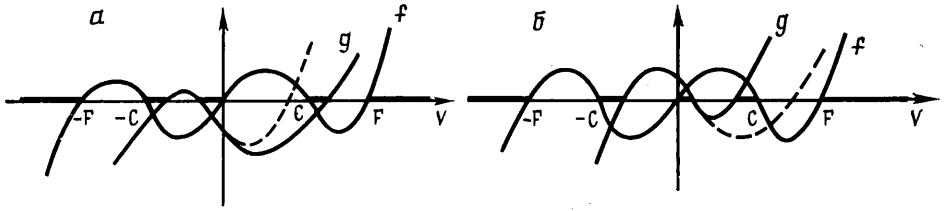
$$\text{I: } \beta_{\parallel} < \frac{\beta_{\perp}^2}{6(1 + \beta_{\perp})}, \quad \text{II: } \frac{\beta_{\perp}^2}{6(1 + \beta_{\perp})} < \beta_{\parallel} < \frac{\beta_{\perp}}{3}$$

$$\text{III: } 1/3\beta_{\perp} < \beta_{\parallel} < 2 + \beta_{\perp}, \quad \text{IV: } \beta_{\parallel} > 2 + \beta_{\perp}$$

В I и IV всегда имеет место неустойчивость, в III – всегда устойчивость, в II однородное состояние устойчиво относительно малых возмущений только при

$$\beta_e < D^2 S^2 / |A^2| \quad (4)$$

Рассмотрим случай  $v_e > 0$  (из вида функций  $f$  и  $g$  следует, что случай  $v_e < 0$  сводится к  $v_e > 0$  заменой  $V$  на  $-V$ ). Так как в приложениях  $\beta_{\perp} \approx 1$ , то можно считать, что  $F^2 > C^2$  (это верно при  $\beta_{\perp} < 6$ ).



Используя предложенный в [3] метод, получим условия на параметры невозмущенного состояния, при которых уравнение (3) не имеет комплексных корней. Для уравнений вида (3) наличие у функции  $g$  комплексных корней является достаточным условием неустойчивости невозмущенного состояния [3]. Поскольку  $g$  является многочленом третьей степени, то условие отсутствия комплексных корней имеет вид

$$\Phi \equiv \frac{A^2(v_e\beta_e)^4}{27(D^2+\beta_e)^2} + \left( \frac{r^2}{162} + \frac{A^2r}{6} - \frac{A^4}{4} \right) (v_e\beta_e)^2 + \frac{r^3(D^2+\beta_e)^2}{27} > 0 \quad (5)$$

$$(r = (\beta_e A^2 + D^2 S^2) / (D^2 + \beta_e))$$

При  $v_e=0$  (5) переходит в (4). Нарушение (5) приводит к неустойчивости невозмущенного состояния при углах  $\theta$ , больших некоторого критического угла  $\theta^*$ . Для получения необходимых и достаточных условий устойчивости невозмущенного состояния нужно знать взаимное расположение корней функций  $f$  и  $g$  и знаки одной из них в корнях другой. При  $v_e > 0$  имеем неравенства

$$g'(0) < 0, \quad g(-C) < 0, \quad g'(-C) > 0$$

$$g(0) < 0 \text{ (II)}, \quad g(0) > 0 \text{ (III)}$$

которые позволяют определить взаимное расположение графиков  $f$  и  $g$  в случае устойчивости (фигура) для областей AA (a) и III (б). Пунктирная линия соответствует другому возможному виду графика  $g$ . На оси  $V$  выделены участки, на которых заключены корни уравнения (3). Поскольку степень  $f$  больше степени  $g$ , то при любом значении  $\text{tg}^2 \theta$  графики  $f(V)$  и  $\text{tg}^2 \theta \cdot g(V)$  будут иметь пять точек пересечения.

Несложный анализ фигуры позволяет определить критерии устойчивости невозмущенного состояния

$$\text{II: } \Phi > 0, \quad g(F) > 0 \quad (6)$$

$$\text{III: } g(C) < 0, \quad g(F) > 0 \text{ или } g(C) > 0, \quad g'(C) > 0, \quad \Phi > 0 \quad (7)$$

Таким образом, если параметры невозмущенного состояния удовлетворяют одному из условий (6)–(7), то дисперсионное уравнение не будет иметь комплексных корней и, следовательно, однородное состояние будет устойчиво относительно малых возмущений. Используемый метод позволяет также определить, какие именно из корней и при каких углах становятся комплексными. Например, нарушение неравенства (5) для II приводит к отсутствию отрицательных корней у функции  $g(V)$  (фигура). В этом случае уравнение (3) будет иметь пару комплексных корней, соответствующих волнам  $EHF$  и  $SM_-$ , при достаточно больших значениях  $\text{tg}^2 \theta$ . Поэтому малые возмущения параметров плазмы не будут затухать с течением времени, их амплитуда будет возрастать по экспоненциальному закону, что приведет к неустойчивости однородного состояния относительно малых возмущений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Duhau S.* Hydromagnetic equations for a collisionless plasmas in strong magnetic fields // *J. Plasma Phys.* 1984. V. 32. Pt. 1. P. 23–34.
2. *Duhau S.* Hydromagnetic waves for a collisionless plasma in strong magnetic fields // *J. Plasma Phys.* 1985. V. 34. Pt 1. P. 67–76.
3. *Зазаров В. Ю.* Волны малой амплитуды в замагниченной плазме без столкновений // Вопросы магнитной гидродинамики плазмы без столкновений в сильном магнитном поле. М.: Изд-во МГУ, 1988. С. 48–70.
4. *Баранов В. Б., Краснобаев К. В.* Гидродинамическая теория космической плазмы. М.: Наука, 1977. 335 с.

Калуга

Поступила в редакцию  
4.X.1990