УДК 532.546



С. Е. ХОЛОДОВСКИЙ

# КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ВНЕШНИМИ УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ В ФИЛЬТРАЦИИ

На примере $m$ неоднородных зон, разделенных эллипсами, предложен метод решения плоских задач фильтрации жидкости в грунтах с криволинейными линиями уровня и разрыва функции проницаемости, трещинами и завесами. Метод основан на решении краевых задач с внешними условиями сопряжения и более эффективен, чем метод построения течений на римановых поверхностях для двух однородных зон [1], метод сведения задач для однородных зон к решению системы интегральных уравнений [2] или метод теорем об окружностях для четырех однородных зон [3].

1. Рассмотрим в полярных координатах $r$, $\alpha$ в области $D$ $(r\geqslant 1)$ краевую задачу с неклассическими граничными условиями сопряжения

$$\operatorname{div}(K\nabla\varphi)=0 \tag{1.1}$$

$$r=1:\quad \varphi|_{\alpha=t}=\varphi|_{\alpha=-t},\quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{\alpha=t}=-\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{\alpha=-t} \tag{1.2}$$

$$0<t<\pi$$

где функция $\varphi(r,\alpha)$ имеет особые точки заданной функции $f(r,\alpha)$, удовлетворяющей вне особых точек уравнению (1.1), $K=K(r)>0$ — непрерывная функция. Решение задачи (1.1), (1.2) найдем в виде

$$\varphi=f-\sum_{n=1}^{\infty} v(r,n)\left[\frac{H_n\cos n\alpha}{v'(1,n)}+h_n\sin n\alpha\right]-K(1)\frac{H_0}{2}\int_1^r\frac{dr}{rK(r)} \tag{1.3}$$

где $h_n(H_n)$ — коэффициенты Фурье функций $f(1,\alpha)\,(\partial f(1,\alpha)/\partial r)$ по $\sin n\alpha$ $(\cos n\alpha)$, $v$ — ограниченные при $r>1$ решения задачи Коши

$$r(rKv')'-n^2Kv=0,\quad v(1,n)=1,\quad v'=dv/dr \tag{1.4}$$

С учетом асимптотик решений уравнения (1.4) при $n\to\infty$ [4] аналогично [5] можно показать, что решение задачи (1.1), (1.2) вида (1.3) существует и единственно с точностью до аддитивной постоянной.

Конформно отображая область $D$ на плоскость $xy$ с разрезом $s(y=0,\ -1<x<1)$ посредством функции

$$z=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right) \tag{1.5}$$

где $z=x+iy$, $\zeta=r\exp(i\alpha)$, найдем потенциал (1.3) фильтрационного течения, индуцированного особыми точками функции $F(x,\ y)=f(r,\ \alpha)$ в грунтах с функцией проницаемости $k(x,\ y)=K(r)$, линии уровня которой являются софокусными эллипсами. При этом в силу условий (1.2) разрезом $s$ можно пренебречь.

2. Пусть функция $K(r)$ — кусочки-непрерывна, т. е. $K=K_j(r)$, $f=f_j(r,\ \alpha)$ в зонах $D_j$ $(r_{j-1}<r<r_j,\ j=1,\ \ldots,\ m+1,\ r_0=1,\ r_{m+1}=\infty)$. Отсюда для функций $\varphi_j$ в зонах $D_j$ имеем уравнение (1.1) с коэффициентами $K_j$ при условиях

$$r=r_j:\quad \varphi_j=\varphi_{j+1},\quad K_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial r}=K_{j+1}\frac{\partial\varphi_{j+1}}{\partial r},\quad j=1,\ldots,m$$

причем функция $\varphi_1$ удовлетворяет условиям (1.2).

Аналогично изложенному выше функции $\varphi_j$ найдем в виде

$$\varphi_j=f_j+\sum_{n=1}^{\infty}(U_j^1\cos n\alpha+U_j^2\sin n\alpha)+c_j\int_{r_{j-1}}^{r}\frac{dr}{rK_j(r)}+d_j \tag{2.1}$$

$$U_j^\nu=a_j^\nu(n)u_j(r,\ n)+b_j^\nu(n)v_j(r,\ n) \tag{2.2}$$

где $\nu=1, 2$ – индексы; $u_j$, $v_j$ – решения задач Коши

$$r(rK_jv_j')'-n^2K_jv_j=0$$
$$r=r_{j-1}:\ u_j=1,\ u_j'=0;\ v_{m+1}(r_m)=1 \tag{2.3}$$
$$r=r_j:\ v_j=0,\ v_j'=-1;\ |v_{m+1}|\leqslant M$$

Здесь $a_j^\nu$, $b_j^\nu$ в (2.2) – решение системы алгебраических уравнений

$$r=1:\ (U_1^1)'=-H_{10}^1,\ U_1^2=-h_{10}^2 \tag{2.4}$$

$$r=r_j: \begin{array}{l} \overset{\nu}{U}_{j+1}-U_j^\nu=h_{jj}^\nu-\overset{\nu}{h}_{j+1j} \\ \overset{\nu}{K}_{j+1}[(\overset{\nu}{U}_{j+1})'+\overset{\nu}{H}_{j+1j}]=K_j[(U_j^\nu)'+H_{jj}^\nu] \end{array} \tag{2.5}$$

$$j=1,\ldots,m,\quad \overset{\nu}{a}_{m+1}=0$$

где $C_j$, $d_j$ строятся по рекуррентным формулам

$$r=r_j:\ C_{j+1}=C_j+{}^1/_2(K_jH_{jj}-K_{j+1}H_{j+1j})r$$

$$d_{j+1}=\frac{1}{2}(h_{jj}-h_{j+1j})+C_j\int\limits_{r_{j-1}}^{r_j}\frac{dr}{rK_j(r)}+d_j$$

$$C_1=-\frac{1}{2}K_1(1)H_{10},\quad d_1=0$$

Здесь $h_{jk}^\nu(H_{jk}^\nu)$ – коэффициенты Фурье функций $f_j$ $(\partial f_j/\partial r)$ при $r=r_k$ соответственно по $\cos n\alpha$ при $\nu=1$ и по $\sin n\alpha$ при $\nu=2$: $h_{jk}=h_{jk}^1$, $H_{jk}=H_{jk}^1$ при $n=0$.

*Теорема.* Система алгебраических уравнений (2.4), (2.5) имеет единственное решение.

Так как для решений дифференциального уравнения (2.3) из условия $vv'\geqslant0$ при $r=r_j$ следует $vv'>0$ при $r<r_j$ [6], то с учетом начальных условий (2.3) найдем $u_j>0$, $u_j'>0$, $v_{j+1}>0$, $v_{j+1}'<0$ при $r=r_j$, $(j=1, \ldots, m)$, $v_{m+1}'(r_m)<0$. Отсюда определитель $I$ системы (2.4), (2.5), записанный, начиная с последней пары уравнений (2.5), является трехдиагональным, причем знаки его элементов определяются из последних неравенств и условий (2.3). Приводя определитель $I$ к диагональному виду с учетом знаков элементов строк, получим вдоль главной диагонали отличные от нуля элементы, т. е. $I\neq0$. Теорема доказана.

В переменных $x$, $y$ из (1.5) функции (2.1) определяют потенциалы течений в грунтах с эллиптическими линиями разрыва проницаемости.

Если функции $K_j$ имеют вид $K_j(r)=(A_j\rho+B_j)^2$, где $\rho=\ln r$, то функции $f_j$ выражаются через особые точки гармонических функций $\Phi_j(\rho, \alpha)$: $f_j=\Phi_j/\sqrt{K_j}$, при этом линейно-независимые решения уравнений (2.3) имеют вид $r^n/\sqrt{K_j}$ и $(r^n\sqrt{K_j})^{-1}$. Разбивая область фильтрации на соответствующие зоны $D_j$, функциями $K_j$ указанного вида можно аппроксимировать с заданной точностью произвольную функцию проницаемость $K(r)$.

3. Предложенный метод позволяет строить потенциалы течений при наличии криволинейных трещин (слабопроницаемых завес), которые моделируем бесконечно тонкими слоями бесконечно большой (малой) проницаемости. Указанная фильтрационная модель отличается от модели трещины, основанной на законах движения вязкой жидкости между непроницаемыми стенками, или трещины как тонкой каверны [2, 7, 8]. В данной модели трещина (завеса) характеризуется конечным параметром

$$A=\lim lK\quad (B=\lim l/k) \tag{3.1}$$

где раскрытие трещины (завесы) $l\to0$, а ее проницаемость $K\to\infty$ $(K\to0)$ по сравнению с характерными параметрами грунта.

Рассмотрим три однородные зоны $D_j$ $(j=1, 2, 3)$, когда особые точки течения описываются произвольной гармонической функцией $f_3(\rho, \alpha)$ в зоне $D_3$, где $\rho=\ln r$, а средняя зона $D_2$ вырождается в трещину (завесу). Переходя в равенствах (2.1) к пределу (3.1), где $l=\rho_2-\rho_1$, $K=K_2$, $\rho_j=\ln r_j$, окончательно в переменных $x$, $y$ из (1.5) найдем потенциалы течения в соответствующих зонах $D_1$ и $D_3$, разделенных эллиптической трещиной (завесой), в виде

$$\varphi_1=\sum_{n=1}^{\infty} b_1\,\mathrm{ch}\,n\rho\cos n\alpha+\frac{b_2}{\delta_2}[\delta_1\,\mathrm{ch}\,n\rho+\mathrm{sh}\,n(\rho-\rho_1)]\sin n\alpha$$

$$\varphi_3=f_3-\frac{(\rho-\rho_1)H+h}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(\rho_1-\rho)}(\gamma_1\cos n\alpha+\gamma_2\sin n\alpha)$$

$$b_\nu=K_3Q_\nu,\quad Q_\nu=(h_\nu+H_\nu)/\Delta_\nu,\quad \delta_1=\mathrm{sh}\,n\rho_1\quad \delta_2=\mathrm{ch}\,n\rho_1$$

$$\gamma_\nu=K_3\delta_{3-\nu}Q_\nu-h_\nu,\quad \Delta_\nu=K_1\delta_\nu+\delta_{3-\nu}(nA+K_3)$$

$$(\gamma_\nu=H_\nu-K_1\delta_\nu Q_\nu,\quad \Delta_\nu=K_3(K_1\delta_\nu nB+\delta_{3-\nu})+K_1\delta_\nu)$$

где $h_\nu=h_{31}^\nu$; $H_\nu=H_{31}^\nu/n$; $h=h_{31}^1$, $H=H_{31}^1$ при $n=0$; $h_{jk}^\nu$ и $H_{jk}^\nu$ определены выше.

Отсюда, в частности, следует, что потенциал (поток) на берегах трещины (завесы) непрерывен, что согласуется с известными результатами, полученными из других соображений [2, 8].

Если в качестве области $D$ рассмотреть полуплоскость $y\geqslant 0$, при этом в граничных условиях при $y=0$ вида (1.2) заменить $r$, $\alpha$ соответственно на $y$, $x$ $(0<t<\infty)$ и отобразить $D$ на плоскость с разрезом, то аналогично изложенному выше получим потенциалы течений в грунтах с параболическими линиями уровня и разрыва функции проницаемости, трещинами и завесами.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Шпилевой А. Я.* Использование римановых поверхностей при исследовании процессов в кусочно-однородных средах // Исследования по специальным задачам гидродинамики. М.: Наука, 1982. С. 39–42.
2. *Пилатовский В. П.* Основы гидромеханики тонкого пласта. М.: Недра, 1966. 317 с.
3. *Копаев А. В., Радыгин В. М.* Фильтрационные теоремы об окружностях // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 1. С. 179–183.
4. *Титчмарш Э. Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Ч. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 278 с.
5. *Положий Г. Н.* Уравнения математической физики. М.: Высш. шк. 1964. 559 с.
6. *Сансоне Д.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 347 с.
7. *Ромм Е. С.* Структурные модели порового пространства горных пород. Л.: Недра, 1985. 240 с.
8. *Абдурахманов И. М., Алишаев М. Г.* Плоская стационарная фильтрация в пласте, разделенном прямолинейной трещиной // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 4. С. 173–177.


Брянск

Поступила в редакцию
31.V.1990

УДК 533.6.011.5



Н. А. КОВАЛЕВА, Н. П. КОЛИНА, А. П. КОСЫХ, А. Я. ЮШИН

# РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО И ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЙ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО НАГРЕВАНИЯ НИЖНЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ТРЕУГОЛЬНЫХ КРЫЛЬЕВ С ОСТРЫМИ ПЕРЕДНИМИ КРОМКАМИ ПРИ ЧИСЛАХ $M_\infty=6{,}1$ И 8

В ударной трубе при углах атаки $\alpha\leqslant 15°$ исследуется теплообмен сверхзвукового потока с нижней поверхностью треугольных крыльев, имеющих углы стреловидности передних кромок $\chi=65$ и 70°. Проведен численный расчет сверхзвукового невязкого обтекания этих крыльев на режимах, когда головная ударная волна при-