

## ПЛОСКОЕ ВИХРЕВОЕ ТЕЧЕНИЕ, ВЫЗЫВАЕМОЕ ИСТОЧНИКОМ (СТОКОМ) МАССЫ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В последнее время резко возросло количество работ, посвященных лабораторно-моделированию океанских и атмосферных вихрей. В экспериментах вихри нередко создают с помощью контролируемого источника (стока) массы в слое вращающейся жидкости [1–3]. В качестве линейного источника используют, например, тонкую трубку с пористыми стенками [4]. При этом характеристики течения определяются путем прямых измерений, поскольку не известна связь между интенсивностью источника и соответствующими распределениями скорости и завихренности.

В настоящей работе получено решение автомодельного вида, описывающее развитие со временем плоского вихревого течения, возбуждаемого осесимметричным источником (стоком) массы во вращающейся вязкой жидкости. Рассмотрены источники двух типов – импульсный и с постоянной интенсивностью. Решение для полей скорости и завихренности выражены в виде функций, аналогичных неполным гамма-функциям, и представлены на графиках при различных числах Рейнольдса течения.

1. Пусть вязкая несжимаемая жидкость плотностью  $\rho$  вращается как твердое тело с угловой скоростью  $\Omega = \text{const}$  относительно неподвижной в пространстве оси. В момент времени  $t=0$  в жидкости включается «точный» линейный осесимметричный источник, испускающий (поглощающий) по нормали к своей оси в единицу времени на единицу длины массу жидкости  $\rho Q$ . Ниже дается описание развития со временем возникающего плоского течения.

В полярной системе координат, вращающейся вместе с жидкостью с угловой скоростью  $\Omega$  и с началом ( $r=0$ ) на оси источника, основные уравнения с учетом осевой симметрии течения имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} v^2 - 2\Omega v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \left( p - \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 \right) + v \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} u \right\} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} uv + 2\Omega u = v \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} v \right\} \quad (1.2)$$

$$2\pi r u = Q \quad (1.3)$$

где  $u$ ,  $v$  – радиальная и азимутальная компоненты относительной скорости во вращающейся системе координат,  $p$  – давление,  $\nu$  – вязкость. Используя (1.3), перепишем (1.2) в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{Q}{-2\pi r^2} \frac{\partial}{\partial r} (rv + \Omega r^2) + v \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} v \right\} \quad (1.4)$$

Задача сводится к нахождению азимутальной компоненты относительной скорости  $v$  из (1.4) при соответствующих начальных и граничных условиях. Уравнение (1.1) служит для нахождения давления  $p$  по известным  $u$  и  $v$ .

Начальные и граничные условия на бесконечности следующие:

$$v(r, 0) = 0 \quad (r \neq 0), \quad v(\infty, t) = 0 \quad (t \geq 0) \quad (1.5)$$

Граничные условия при  $r=0$  задавать пока не будем.

2. Ищем решение уравнения (1.4), удовлетворяющее условиям (1.5), в виде

$$v(v\Omega)^{1/2} T^\alpha V(\eta), \quad \eta = r/2\sqrt{\nu t}, \quad T = \Omega t \quad (2.1)$$

где  $T$  – безразмерное время,  $V$  – безразмерная функция от безразмерной автомодельной координаты  $\eta$ ,  $\alpha$  – неизвестное число. Вводя безразмерный параметр  $A = Q/2\pi\nu$ , аналогичный числу Рейнольдса [4], перепишем (1.4) в безразмерном виде

$$V'' + \left( \frac{1-A}{\eta} + 2\eta \right) V' - \left( \frac{1+A}{\eta^2} + 4\alpha \right) V = \frac{4AT^{1/2-\alpha}}{\eta} \quad (2.2)$$

Из (2.2) следует, что искомые автомодельные решения вида (2.1) существуют лишь при  $A = \text{const} \neq 0$ ,  $\alpha = 1/2$ . (Случай  $A = 0$  при  $t > 0$  соответствует не только тривиальному случаю покоя, но и источнику в виде дельта-функции  $Q = \delta(t) \rho M$ , «мгновенно» испускающему (поглощающему) в момент времени  $t = 0$  массу жидкости  $\rho M$  на единицу длины. При  $M > 0$  (жидкость испускается) приходим к известной задаче [5, 6] о диффузии первоначально однородно завихренного жидкого цилиндра радиуса  $a = M^{1/2} \pi^{-1/2}$  с распределением завихренности:  $\omega(r, 0) = -2\Omega$  ( $r < a$ ),  $\omega(r, 0) = 0$  ( $r > a$ ). При  $M < 0$  получаем задачу о диффузии вихревой нити с интенсивностью  $\Gamma = -2M\Omega$ .

Делая замену переменных, представим (2.2) при  $A = \text{const} \neq 0$ ,  $\alpha = 1/2$  в виде

$$\begin{aligned} xU'' + (x - 1/2A)U' + U &= A \\ U(x) &= \eta V(\eta), \quad \eta^2 = x \end{aligned} \quad (2.3)$$

Дифференцируя (2.3) по  $x$ , получаем простое однородное уравнение с разделяющимися переменными. Его общее решение есть

$$U = c \int \int e^{-z^2/2A} dz dy + c_1 x + c_2 \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в соответствующее (2.3) однородное уравнение, находим  $c_2 = -1/2 c_1 A$ . Учитывая, что частное решение неоднородного уравнения (2.3) есть  $U_0 = -A$ , получаем общее решение (2.3) в виде

$$U = c \int \int e^{-z^2/2A} dz dy + c_1 (x - 1/2A) - A \quad (2.5)$$

Чтобы удовлетворить граничным условиям (1.5), которые в новых переменных имеют вид  $x^{-1/2}U(x) = 0$  ( $x = \infty$ ), положим  $c_1 = 0$  в (2.5) и перепишем искомое решение в удобной для вычислений форме

$$U = c \int_{-\infty}^x e^{-vy^{1/2}A} (x-y) dy - A \quad (2.6)$$

Задавая подходящие граничные условия при  $x = 0$ , можно найти постоянную  $c$  и определить азимутальную скорость и завихренность

$$v = (\nu\Omega)^{1/2} T^{1/2} x^{-1/2} U(x), \quad x = r^2/4\nu t, \quad T = \Omega t \quad (2.7)$$

$$\omega = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) = \Omega U'(x)$$

3. Рассмотрим два примера. Зададим граничные условия в виде

$$U(x) - xU'(x) = 0 \quad (x=0) \quad (3.1)$$

что соответствует равенству нулю суммарного момента сил трения со стороны источника на окружающую жидкость. При этом из (2.6) получаем

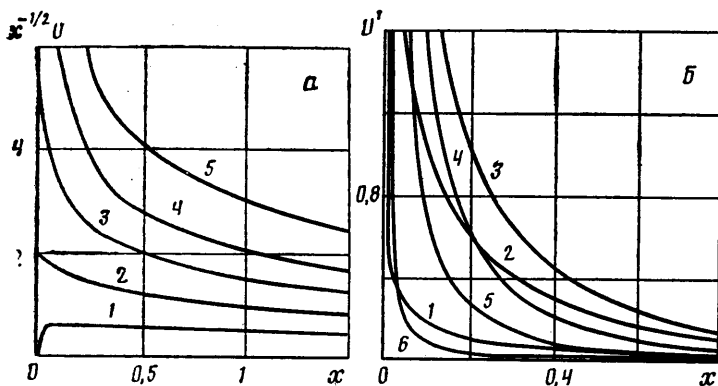
$$U = A \left\{ \int_{-\infty}^x e^{-vy^{1/2}A} (y-x) dy \left[ \int_{-\infty}^0 e^{-vy^{1/2}A} dy \right]^{-1} - 1 \right\} \quad (3.2)$$

$$U' = -A \int_{-\infty}^x e^{-vy^{1/2}A} dy \left[ \int_{-\infty}^0 e^{-vy^{1/2}A} dy \right]^{-1} \quad (3.3)$$

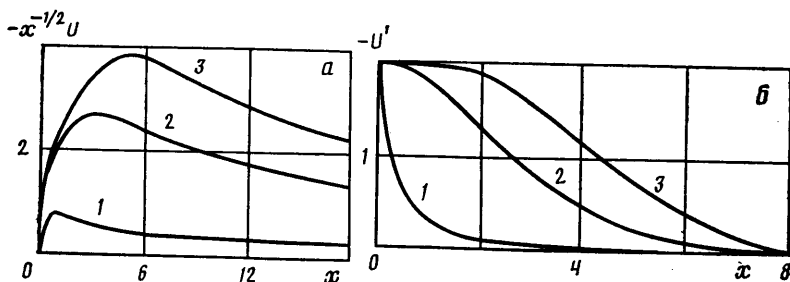
Графики функций  $x^{-1/2}U(x)$  и  $U'(x)$  для положительных значений  $A$  показаны на фиг. 1. Кривые 1-3 соответствуют  $A = 1; 6; 10$ . Аналогичные графики для отрицательных значений  $A$  приведены на фиг. 2. Кривые 1-5 (фиг. 2, а) соответствуют  $A = -0,5; -1; -1,5; -2; -3$ ; а кривые 1-6 (фиг. 2, б) —  $A = -0,1; -0,5; -1; -1,75; -1,9; -1,99$ .

Функция  $x^{-1/2}U(x)$  в каждый момент времени пропорциональна азимутальной скорости (2.7). При малых значениях  $x$  функция  $x^{-1/2}U(x)$  ведет себя как

$$x^{-1/2}U(x) \approx -2x^{1/2}(A > 0)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$x^{-1/2}U(x) \approx -4e^{-x}x^{1/2A+1/2} \left[ (A+2) \int_{\infty}^0 e^{-vy^{1/2}A} dy \right]^{-1} \quad (-2 < A < 0)$$

и при  $x \rightarrow 0$  стремится соответственно к нулю ( $A > -1$ ), конечному пределу ( $A = -1$ ) или к бесконечности ( $-2 < A < -1$ ). При  $A \leq -2$  интеграл в знаменателе (3.2) расходится и  $x^{-1/2}U(x) = -Ax^{-1/2}$  при всех  $x$ , кроме точки  $x=0$ . При больших значениях  $x$  функция  $x^{-1/2}U(x) \approx -Ax^{-1/2}$  и при  $x \rightarrow \infty$  стремится к нулю при всех конечных значениях  $A$ .

Зависимость, порождаемая во вращающейся жидкости источником массы, распространяется от источника за счет вязкой диффузии и путем конвективного переноса. Если  $A > 0$ , то эти эффекты складываются, так как радиальная скорость направлена от источника. При этом безразмерная завихренность  $U'(x)$  вблизи источника конечна и равна  $U'(0) = -2$ . При  $A > 2$  завихренность распространяется от источника в виде плоской волны с крутым фронтом. Безразмерная координата точки перегиба фронта определяется из условия  $U'''(x) = 0$  и равна  $x_* = 1/2A - 1$ . При  $0 < A < 2$  волна не образуется. Если  $A < 0$ , то эффекты от вязкой диффузии и конвективного переноса вычитаются, так как радиальная скорость направлена к источнику, и при  $x \rightarrow 0$  завихренность неограниченно возрастает

$$U'(x) \approx -2x^{1/2A} \left[ \int_{\infty}^0 e^{-vy^{1/2}A} dy \right]^{-1} \quad (-2 < A < 0)$$

При  $A \leq -2$  интеграл в знаменателе (3.3) расходится и  $U'(x) = 0$  при всех  $x$ , кроме точки  $x=0$ , в которой завихренность бесконечно велика. При  $A \leq -2$  в точке  $x=0$  имеем «недиффундирующую» вихревую нить с интенсивностью  $\Gamma = -4\pi A\nu\Omega t$ , линейно растущей со временем.

Зададим теперь граничные условия в виде  $U(x) = 0$  ( $x=0$ ), что соответствует условию прилипания на стенках реального источника в виде тонкой пористой трубки

ки. При этом из (2.6) получаем

$$U = A \left\{ \int_{-\infty}^x e^{-vy^{1/2}A-1}(x-y) dy \left[ \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^y e^{-z^{1/2}A-1} dz dy \right]^{-1} - 1 \right\} \quad (3.4)$$

$$U' = A \int_{-\infty}^x e^{-vy^{1/2}A-1} dy \left[ \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^y e^{-z^{1/2}A-1} dz dy \right]^{-1} \quad (3.5)$$

Сравнивая знаменатели в (3.2) и (3.4), находим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y e^{-z^{1/2}A-1} dz dy \left[ \int_{-\infty}^x e^{-vy^{1/2}A} dy \right]^{-1} = \begin{cases} -1 & (A \geq -2) \\ 2/A & (A < -2) \end{cases}$$

Откуда следует, что решения (3.2), (3.3) в точности совпадают с решениями (3.4), (3.5) во всей области, кроме точки  $x=0$ , при  $A < -2$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Whitehead J. A. Jr., Gershfeld N. Selective withdrawal from a rotating stratified current with applications to OTEC // Ocean Eng. 1981. V. 8. № 5. P. 507-515.
2. Griffiths R. W., Hopfinger E. J. Experiments with baroclinic vortex pairs in a rotating fluid // J. Fluid Mech. 1986. V. 173. P. 501-518.
3. Griffiths R. W., Hopfinger E. J. Coalescing of geostrophic vortices // J. Fluid Mech. 1987. V. 178. P. 73-97.
4. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
5. Некрасов А. И. Диффузия вихря // Тр. ЦАГИ. 1931. Вып. 84. С. 1-32.
6. Розе Н. В., Кибель И. А., Кочин Н. Е. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. Л.; М.: ОНТИ, 1937. 506 с.

Москва

Поступила в редакцию  
11.VI.1990

УДК 532.526 : 537.84

© 1991 г.

В. Я. КИСЕЛЕВ, В. И. ЛЫСЕНКО

### ВЛИЯНИЕ ПРОДОЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПЕРЕХОД ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

При больших скоростях обтекания тел в связи со значительным повышением температуры торможения происходит диссоциация газов, а затем их ионизация. Наложение магнитного поля (как внешнего, так и излучаемого самим летательным аппаратом) на течение ионизованного, т. е. электропроводящего, газа может повлечь изменение положения перехода ламинарного пограничного слоя на обтекаемом теле в турбулентный. В данной работе экспериментально исследуется влияние продольного поля на переход высокоскоростного пограничного слоя.

Такое влияние подробно исследовано для несжимаемой жидкости и результаты этих исследований достаточно хорошо согласуются между собой. Во многих работах (например, [1-3]) получено, что продольное (направленное вдоль потока) магнитное поле подавляет возмущения в течении электропроводящей жидкости (в частности, в пограничном слое). При такой направленности магнитного поля энергия поперечных флуктуаций приводит к появлению микротоков и тормозящих эти флуктуации поперечных сил [1]. С помощью продольного магнитного поля можно добиться перехода турбулентного пограничного слоя в ламинарный, а при определенных условиях можно полностью подавить турбулентность в потоке [2]. Особенность течения в продольном магнитном поле состоит в том, что среднее течение несущественно взаимодействует с магнитным полем, и эффект воздействия поля на турбулентность про-