

УДК 532.51.013.4 : 532.135

© 1991 г.

М. А. БРУТЯН, П. Л. КРАПИВСКИЙ

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ КОЛМОГОРОВА В ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ

Несмотря на многочисленные исследования гидродинамики неьютоновских жидкостей (обзор представлен в [1]), достаточно полные аналитические результаты получены только в простейших задачах. В частности, очень немного известно относительно устойчивости течений вязкоупругой жидкости даже в линейном приближении [2–7]. Поэтому было бы интересно изучить задачу, в которой можно надеяться на получение аналитических результатов в исследовании линейной, а возможно, и слабонелинейной устойчивости.

В классическом случае несжимаемой ньютоновской жидкости один из примеров, в котором при исследовании линейной и нелинейной устойчивости аналитическими методами удается продвинуться достаточно далеко, является задача устойчивости однонаправленного периодического течения Колмогорова $u = \sin y$, индуцированного массовой силой $R^{-1} \sin y$, направленной вдоль оси x (все переменные обезразмерены; через R обозначено число Рейнольдса). Устойчивость течения Колмогорова изучалась в линейном и слабонелинейном приближении в [8–11].

1. Постановка задачи. Введение медленных переменных. Рассмотрим устойчивость течения Колмогорова в вязкоупругой несжимаемой жидкости, взяв в качестве модели среды верхнеконвективную модель Максвелла. Справедливость теоремы Сквайра в этой модели [3] позволяет при анализе устойчивости, во всяком случае в линейном приближении, считать течение двумерным. При этом уравнение движения для функции тока $\psi(t, x, y)$ принимает вид [4]

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + \frac{\partial (\Delta \psi, \psi)}{\partial (x, y)} = -R^{-1} \cos y + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (A - C) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) B \quad (1.1)$$

$$A = \sigma_{xx}, \quad B = \sigma_{xy}, \quad C = \sigma_{yy}.$$

В верхнеконвективной модели Максвелла тензор напряжений σ и тензор скоростей деформаций D связаны соотношением

$$\sigma + \lambda \left[\frac{\partial \sigma}{\partial t} + u \frac{\partial \sigma}{\partial x} + v \frac{\partial \sigma}{\partial y} - (\Omega + D)\sigma + \sigma(\Omega - D) \right] = \frac{2}{R} D \quad (1.2)$$

$$D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2u_x & u_y + v_x \\ u_y + v_x & 2v_y \end{pmatrix}, \quad \Omega = \frac{u_y - v_x}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

где λ — время релаксации. Поскольку все величины обезразмерены, то λ является числом Деборы в рассматриваемой задаче. Представим уравнение состояния (1.2) в покомпонентном виде

$$LA = 2(Au_x + Bu_y) + \frac{2}{R\lambda} u_x, \quad LB = Av_x + Cu_y + \frac{1}{R\lambda} (u_y + v_x) \quad (1.4)$$

$$LC = 2(Bv_x + Cv_y) + \frac{2}{R\lambda} v_y, \quad L = \lambda^{-1} + \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$$

В случае малой надкритичности оказывается полезным введение малого параметра ε так, что $R^{-1}=R_*^{-1}(1-\varepsilon^2)$, с последующей деформацией пространственно-временных координат

$$T=\varepsilon^4 t, \quad X=\varepsilon x, \quad Y=y \quad (1.5)$$

Аргументы в пользу такого выбора масштабов для ньютоновской жидкости обсуждаются в [11]. Фактически в (1.5) заложено априорное физическое представление о том, что в случае малой надкритичности должна возникнуть продольная вихревая структура с характерными размерами $x \sim (R-R_*)^{-1/2}$, $y \sim 1$ и характерным временем эволюции $t \sim (R-R_*)^{-2}$. Это предположение, как обычно, проверяется непосредственным решением, по ходу которого в каждом приближении проверяется условие асимптотической разрешимости.

В новых переменных уравнение движения (1.1) принимает вид

$$\begin{aligned} & \varepsilon^4 \frac{\partial}{\partial t} (\psi_{yy} + \varepsilon^2 \psi_{xx}) + \varepsilon \frac{\partial (\psi_{yy}, \psi)}{\partial (x, y)} + \varepsilon^3 \frac{\partial (\psi_{xx}, \psi)}{\partial (x, y)} = \\ & = -\frac{1-\varepsilon^2}{R_*} \cos y + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (A-C) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) B \end{aligned} \quad (1.6)$$

В (1.6) и всюду далее, где это не оговаривается особо, используются новые переменные T, X, Y , которые обозначаются прежними буквами t, x, y соответственно. В новых переменных уравнение состояния принимает вид

$$\begin{aligned} LA &= 2 \left(\varepsilon A \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + B \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + 2\varepsilon \frac{1-\varepsilon^2}{R_* \lambda} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \\ LB &= C \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \varepsilon^2 A \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1-\varepsilon^2}{R_* \lambda} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi \\ LC &= -2 \left(\varepsilon C \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \varepsilon^2 B \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) - 2\varepsilon \frac{1-\varepsilon^2}{R_* \lambda} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \\ L &= \lambda^{-1} + \varepsilon \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) + \varepsilon^4 \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Поскольку возмущенное течение предполагается периодическим по y , проинтегрируем (1.6) по периоду. В результате приходим к интегральному соотношению

$$\varepsilon^4 \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \psi_{xx} dy + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{2\pi} \psi_y \psi_{xx} dy + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{2\pi} B dy = 0 \quad (1.8)$$

которое в дальнейшем будет использовано для нахождения критического числа R_* .

2. Определение критического числа Рейнольдса. Решение задачи ищем в виде асимптотических рядов по малому параметру ε . Подставляя эти ряды в (1.6), (1.7), в нулевом приближении находим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 B_0}{\partial y^2} = \frac{\cos y}{R_*} \\ & A_0 = 2\lambda B_0 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2}, \quad B_0 = \lambda C_0 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} + \frac{1}{R_*} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2}, \quad C_0 = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Интегрируя эти уравнения и учитывая, что ищется периодическое решение, окончательно получаем

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \cos y + \varphi_0(x, t) \\ A_0 &= \frac{2\lambda}{R_*} \cos^2 y, \quad B_0 = -\frac{1}{R_*} \cos y, \quad C_0 = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Совершенно аналогично приходим в первом приближении к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\psi_{0yy}, \psi_0)}{\partial(x, y)} &= \frac{\partial^2 B_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (A_0 - C_0) \\ \lambda^{-1} A_1 + \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) A_0 &= \\ = 2 \left(A_0 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x \partial y} + B_0 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + B_1 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \right) + \frac{2}{R_* \lambda} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x \partial y} \\ \lambda^{-1} B_1 + \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) B_0 &= C_0 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + C_1 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} + \frac{1}{R_* \lambda} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \\ \lambda^{-1} C_1 + \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) C_0 &= -2C_0 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x \partial y} - \frac{2}{R_* \lambda} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Используя нулевое приближение (2.2) и периодичность по y , после прямых вычислений определяем выражения для функции тока и компонент тензора напряжений в первом приближении

$$\begin{aligned} \psi_1 &= (\lambda - R_*) \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \sin y + \Phi_1(x, t) \\ A_1 &= -\lambda \left(2 + \frac{\lambda}{R_*} \right) \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \sin 2y, \quad B_1 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \sin y, \quad C_1 = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Во втором приближении определяем

$$\frac{\partial(\psi_{0yy}, \psi_1)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(\psi_{1yy}, \psi_0)}{\partial(x, y)} = \frac{\cos y}{R_*} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (A_1 - C_1) + \frac{\partial^2 B_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 B_2}{\partial x^2} \quad (2.5)$$

Выражение для B_2 находим из (2.5) после двукратного интегрирования по y с учетом периодичности, так что

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \sin y + \left[(R_* - \lambda) \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{R_*} \right] \cos y - \\ &\quad - \lambda \left(1 - \frac{\lambda}{2R_*} \right) \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} \cos 2y + b_2(x, t) \end{aligned}$$

Уравнение состояния во втором приближении с учетом равенств $C_0 = C_1 = 0$ принимает вид

$$\begin{aligned} \lambda^{-1} A_2 + \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) A_1 + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) A_0 &= \\ = 2 \left(A_0 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} + A_1 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x \partial y} + B_0 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + B_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + B_2 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \right) + \frac{2}{R_* \lambda} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} \\ \lambda^{-1} B_2 + \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) B_1 + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) B_0 &= \end{aligned}$$

$$=C_2 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} - A_0 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} + \frac{1}{R_* \lambda} \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} \right)$$

$$\lambda^{-1} C_2 = -2B_0 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} - \frac{2}{R_* \lambda} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y}$$

Используя нулевое и первое приближение, после прямых громоздких вычислений последовательно определяем C_2 , ψ_2 и A_2 . При этом $b_2 = b_2(x, t)$ подбирается так, чтобы ψ_2 оказалась периодической функцией от y . Окончательно получаем выражения для функции тока и компонент тензора напряжений во втором приближении (выражение для A_2 не приводим ввиду громоздкости)

$$\psi_2 = (\lambda - R_*) \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \sin y + R_* (2\lambda - R_*) \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right)^2 \cos y -$$

$$- \frac{\lambda}{4R_*} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} \cos 2y + \Phi_2(x, t)$$

$$b_2 = - \left[\frac{1}{R_*} + \lambda \left(1 + \frac{\lambda}{2R_*} \right) \right] \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2}, \quad C_2 = 2 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} \cos y \quad (2.6)$$

Подставим теперь полученные результаты в интегральное соотношение (1.8). В нулевом приближении приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{2\pi} B_0 dy = 0$$

которое выполняется тождественно на решении (2.2). В первом приближении из (1.8) получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{2\pi} B_1 dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} dy = 0$$

Оба слагаемых в этом выражении тождественно равны нулю ввиду (2.4) и (2.2) соответственно. Наконец, во втором приближении из (1.8) находим

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{2\pi} B_2 dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} \right) dy = 0 \quad (2.7)$$

Используя (2.2), (2.4) и (2.6) вычисляем интегралы в (2.7)

$$\int_0^{2\pi} B_2 dy = -2\pi \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} \left[\frac{1}{R_*} + \lambda \left(1 + \frac{\lambda}{2R_*} \right) \right]$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} dy = \pi (R_* - \lambda) \frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial x^3}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} dy = 0$$

Из (2.7) после элементарных преобразований находим критическое число Рейнольдса потери устойчивости

$$R_* = \frac{3}{2} \lambda + \sqrt{2 + \frac{13}{4} \lambda^2} \quad (2.8)$$

Полученная формула для критического числа Рейнольдса представляет собой единственный известный авторам аналитический результат в

теории устойчивости неньютоновских жидкостей. В случае ньютоновской жидкости, $\lambda=0$, формула (2.8) переходит в известную формулу Мешалкина — Синая $R_* = \sqrt{2}$ [8]. Поведение критического числа R_* в зависимости от числа Дебора оказывается монотонным: с ростом λ число R_* монотонно возрастает и при больших λ зависимость $R_*(\lambda)$ приближается к линейной

$$R_* = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{13})\lambda + (2/\sqrt{13})\lambda^{-1} + O(\lambda^{-3})$$

Описанная процедура построения асимптотических разложений может быть продолжена и далее. При этом в третьем приближении из интегрального соотношения (1.8) в качестве асимптотического условия разрешимости вновь получаем соотношение (2.8). Интереснее обстоит дело в четвертом приближении, где в качестве условия асимптотической разрешимости получается уравнение типа Курамото — Сивашинского относительно функции $\varphi_0(x, t)$. Эти высшие приближения получаются после прямых, чрезвычайно громоздких вычислений.

3. Исследование устойчивости в других моделях вязкоупругой жидкости. Рассмотрим устойчивость того же однонаправленного периодического течения в других моделях вязкоупругой жидкости, что позволит оценить влияние выбора модели в задачах устойчивости. Большинство рассматриваемых моделей представляют собой частные случаи обобщенной модели Олдройда

$$\sigma + \lambda F_{abc}(\sigma) = \frac{2}{R} [D + \lambda' F_{\alpha\beta}(D)]$$

$$F_{abc}(\sigma) = \frac{d\sigma}{dt} - \Omega\sigma + \sigma\Omega - a(D\sigma + \sigma D) + b(\sigma : D)I + c(\text{Tr } \sigma)D \quad (3.1)$$

$$F_{\alpha\beta}(D) = \frac{dD}{dt} - \Omega D + D\Omega - 2\alpha D^2 + \beta(D : D)I$$

Здесь λ' — так называемое время запаздывания, I — единичный тензор; слагаемое $\gamma(\text{Tr } D)D$ отсутствует в (3.1), поскольку жидкость предполагается несжимаемой, так что

$$\text{Tr } D = \text{div } V = 0$$

Верхнеконвективная модель Максвелла получается из модели (3.1) в случае $a=1$, $b=c=0$, $\lambda'=0$. Совершенно аналогично исследуется нижнеконвективная модель Максвелла, в которой $a=-1$, $b=c=0$, $\lambda'=0$. Анализ этой модели показал, что критическое число Рейнольдса потери устойчивости определяется той же формулой (2.8).

Рассмотрим более общий случай модели Олдройда, в котором $\lambda' \neq 0$. Обе «производные» F_{abc} и $F_{\alpha\beta}$ в (3.1) предположим верхнеконвективными, т. е.

$$a=1, \quad b=c=0, \quad \alpha=1, \quad \beta=0 \quad (3.2)$$

Возвращаясь к модифицированным переменным (1.5), представим уравнение состояния (3.1) с учетом связи (3.2) в покомпонентном виде

$$\begin{aligned} \lambda \left[LA - 2 \left(B \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \varepsilon A \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \right] &= \frac{2\lambda'}{R_*} (1 - \varepsilon^2) \left[L' \left(\varepsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) - \right. \\ &\quad \left. - 2 \left(\varepsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi \right] \\ \lambda \left[LB - C \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \varepsilon^2 A \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right] &= \frac{2\lambda'}{R_*} (1 - \varepsilon^2) \left[\frac{1}{2} L' \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\varepsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big] \quad (3.3) \\
\lambda \left[LC + 2 \left(\varepsilon C \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \varepsilon^2 B \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \right] &= \frac{2\lambda'}{R_*} (1 - \varepsilon^2) \left[L' \left(-\varepsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) - \right. \\
& \left. - 2 \left(\varepsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi \right]
\end{aligned}$$

где оператор L' получается из L заменой $\lambda \rightarrow \lambda'$.

Далее повторяем процедуру, детально описанную в предыдущем разделе на примере верхнеконвективной модели Максвелла. В нулевом приближении функция тока ψ_0 и компоненты тензора напряжений B_0, C_0 имеют прежний вид (2.2), а отличается лишь

$$A_0 = 2[(\lambda - \lambda')/R_*] \cos^2 y$$

В первом приближении для компонент тензора напряжений B_1, C_1 получаем прежние выражения (2.4), в то время как ψ_1 и A_1 изменяются

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= (\lambda - \lambda' - R_*) \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} + \Phi_1(x, t) \\
A_1 &= (\lambda' - \lambda) \left(2 + \frac{\lambda + 2\lambda'}{R_*} \right) \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \sin 2y
\end{aligned} \quad (3.4)$$

Асимптотические условия разрешимости в нулевом и первом приближении вновь оказываются тривиальными. Во втором приближении из вида асимптотического условия разрешимости (2.7) ясно, что для получения главного результата — критического числа Рейнольдса — из всех результатов второго приближения требуется вычислить лишь интеграл от B_2 по периоду. Это заметно упрощает задачу, так как полное определение второго приближения чересчур громоздко. Удобно воспользоваться вторым уравнением (3.3), из которого во втором приближении с учетом равенств $C_0 = C_1 = 0, \partial^2 \psi_0 / \partial x \partial y = 0$ получаем

$$\begin{aligned}
B_2 + \lambda \left[\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) B_1 + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) B_0 + \right. \\
\left. + A_0 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} - C_2 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \right] &= \frac{1}{R_*} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\psi_2 - \psi_0) - \frac{1}{R_*} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} + \\
+ \frac{\lambda'}{R_*} \left[\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} \right]
\end{aligned} \quad (3.5)$$

Выясняется, что определять ψ_2 не обязательно, поскольку после интегрирования (3.4) по периоду, слагаемые, содержащие ψ_2 , обнуляются ввиду периодичности. Поэтому, как следует из (3.5), осталось определить только C_2 . Из (3.3) находим

$$C_2 = -2\lambda B_0 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} - \frac{2}{R_* \lambda} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} + \frac{2\lambda'}{R_*} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \quad (3.6)$$

После прямых весьма длинных вычислений из (3.5) с учетом (3.4), (3.6) следует

$$\int_0^{2\pi} B_2 dy = -2\pi \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} \left[\frac{1}{R_*} + (\lambda - \lambda') \left(1 + \frac{\lambda + 2\lambda'}{R_*} \right) \right]$$

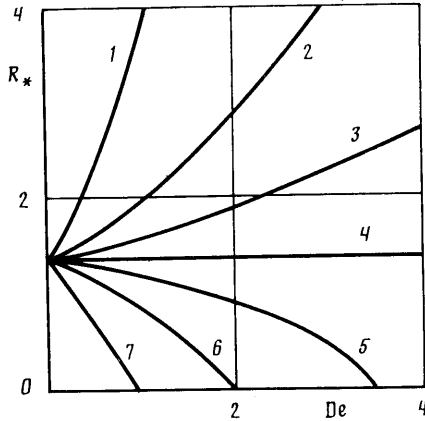
Вычисляя оставшиеся интегралы

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} dy = 0, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} dy = \pi (R_* + \lambda + \lambda') \frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial x^3}$$

находим критическое число Рейнольдса потери устойчивости однонаправленного периодического течения вязкоупругой жидкости

$$R_* = \frac{3}{2}(\lambda - \lambda') + \sqrt{2 + \frac{1}{4}(\lambda - \lambda')^2 (13\lambda - \lambda')} \quad (3.7)$$

В качестве частных случаев формула (3.7) содержит верхнеконвективную модель Максвелла ($\lambda' = 0$, при этом (3.7) переходит в (2.8)), классическую модель Навье — Стокса ($\lambda = \lambda'$) и, наконец, верхнеконвективную



модель Джефффри ($\lambda = 0$). Вместо времени релаксации λ и запаздывания λ' удобно ввести новые переменные

$$De = \lambda + \lambda' \quad \text{и} \quad \delta = (\lambda - \lambda') / (\lambda + \lambda') \quad (De > 0, \quad -1 \leq \delta \leq 1)$$

в которых (3.7) принимает вид

$$R_* = \frac{3}{2}\delta De + \sqrt{2 + \frac{1}{4}\delta(7\delta + 6)De^2} \quad (3.8)$$

График зависимости $R_* = R_*(De)$ при различных значениях параметра δ представлен на фигуре. Отметим, что при $\delta < 0$, т. е. $\lambda < \lambda'$, R_* обращается в ноль при $De = De_* = 2(\delta^2 - 3\delta)^{-1/2}$.

При больших значениях $De > De_*$ формула (3.8) теряет смысл — течение Колмогорова в таких условиях оказывается неустойчивым при всех числах Рейнольдса. Устойчивость рассматриваемого течения повышается при увеличении λ и, напротив, уменьшается при увеличении λ' . Возможно, этот качественный вывод справедлив и для более широкого класса течений.

Наряду с описанными моделями вязкоупругой жидкости, часто используется также B -модель Олдройда. В этой модели тензор напряжений σ разбивается на две составляющие — ньютоновскую и неньютоновскую

$$\sigma = 2\eta_p D + S, \quad S + \lambda \frac{DS}{Dt} = 2\eta_s D \quad (3.9)$$

Здесь η_p — вязкость полимера, η_s — вязкость растворителя, а через DS/Dt обозначена верхнеконвективная производная от «неньютоновской» составляющей S тензора напряжений. Особую популярность B -модели Олдройда придало экспериментальное открытие класса полимерных жид-

костей, хорошо описываемых уравнением состояния (3.9) (см. [12]). Преобразуя (3.9) к виду

$$\sigma + \lambda \frac{D\sigma}{Dt} = 2(\eta_p + \eta_s)D + 2\lambda\eta_s \frac{DD}{Dt}$$

замечаем, что B -модель Олдройда также является частным случаем обобщенной модели Олдройда (3.1) со связью (3.2), в которой время запаздывания определяется соотношением

$$\lambda' = \lambda\eta_s / (\eta_p + \eta_s)$$

Поэтому критическое число Рейнольдса потери устойчивости в B -модели Олдройда, часто называемой также жидкостью Богера [12, 13], определяется выражением

$$R_* = \frac{3}{2} \frac{\eta_p}{\eta_p + \eta_s} \lambda + \sqrt{2 + \frac{\lambda^2}{4} \frac{\eta_p}{\eta_p + \eta_s} \left(12 + \frac{\eta_p}{\eta_p + \eta_s} \right)}$$

Таким образом, течение Колмогорова несжимаемой жидкости Богера оказывается более устойчивым ($R_* > \sqrt{2}$), чем течение ньютоновской жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Астарита Дж., Марруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 309 с.
2. Bird R. B., Armstrong R. C., Hassager O. Dynamics of polymeric liquids // Fluid Mechanics. New York et al. Wiley 1987. V. 1. 649 p.
3. Huilgol R. R., Phan-Thien N. Recent advances in the continuum mechanics of viscoelastic liquids // Int. J. Eng. Sci. 1986. V. 24. № 2. P. 161–251.
4. Городцов В. А., Леонов А. И. О линейной неустойчивости плоскопараллельного течения Куэтта в упруговязкой жидкости // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 2. С. 289–299.
5. Tlapa G., Bernstein B. Stability of relaxation-type viscoelastic fluid with slight elasticity // Phys. Fluids. 1970. V. 13. № 3. P. 565–568.
6. Akbay U., Frischmann G. Stabilität der ebenen Scherströmung // ZAMM. 1985. V. 65. № 4. P. 179–180.
7. Akbay U., Frischmann G., Wasner J. Stabilität der ebenen Couette-Strömung eines Maxwell-Fluids und ihre kritische Weissenbergzahl // Rheol. Acta. 1987. V. 26. № 2. P. 119–126.
8. Akbay U., Fischer M., Frischmann G. Stabilität der ebenen Couette-Strömung bezüglich Störungen in der viskosimeterischen Ebene // Rheol. Acta. 1987. V. 26. № 3. P. 233–242.
9. Renardy M., Renardy Y. Linear stability of plane Couette flow of an upper convected Maxwell fluid // J. Non-Newt. Fluid Mech. 1986. V. 22. № 1. P. 23–33.
10. Renardy M., Renardy Y. Stability of shear flows of viscoelastic fluids under perturbations perpendicular to the plane of flow // J. Non-Newt. Fluid Mech. 1989. V. 32. № 2. P. 145–155.
11. Обухова А. М. Течение Колмогорова и его лабораторное моделирование // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38. № 4. С. 101–111.
12. Мешалкин Л. Д., Синай Я. Г. Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 6. С. 1140–1143.
13. Green J. S. A. Two-dimensional turbulence near the viscous limit // J. Fluid Mech. 1974. V. 62. Pt 2. P. 273–287.
14. Клячкин В. И. К нелинейной теории устойчивости периодических течений // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 2. С. 263–271.
15. Sivashinsky G. I. Weak turbulence in periodic flow // Physica. Ser. D. 1985. V. 17. № 2. P. 243–255.
16. Boger D. V. A highly elastic constant-viscosity fluid // J. Non-Newt. Fluid Mech. 1977. V. 33. № 1. P. 87–91.
17. Jackson K. P., Walters K., Williams R. W. A rheometrical study of Boger fluids // J. Non-Newt. Fluid Mech. 1984. V. 14. № 1–3. P. 173–188.
18. Walters K., Rawlinson O. M. On some contraction flows for Boger fluids // Rheol. Acta. 1982. V. 21. № 4–5. P. 547–552.
19. Chai M. S., Yeow Y. L. Modelling of Boger fluid jets using the Oldroyd – B equation – A comparison of experimental and numerical results // J. Non-Newt. Fluid Mech. 1988. V. 29. № 1–3.