

УДК 532.59-2

© 1991 г.

А. В. МАРЧЕНКО, В. И. ШПИРА

К ТЕОРИИ ДВУМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В ЖИДКОСТИ ПОД ЛЕДЯНЫМ ПОКРОВОМ

Одной из наиболее важных проблем динамики волн в жидкости под ледяным покровом является вопрос о связи параметров волн с физико-химическими характеристиками льда. Чаще всего ледяной покров моделируется тонкой упругой пластиной. Основные результаты, полученные для этой модели в рамках линейной теории, суммированы, например, в [1-3]. Ряд фундаментальных нелинейных эффектов - взаимодействие трех волн, генерация высших гармоник, образование солитонов - был исследован в [4-8]. Однако специфика влияния ледяного покрова, находящегося в напряженном состоянии, на динамику волн мало исследована даже в линейной теории.

Цель данной работы состоит в развитии метода гамильтонова формализма для волн в жидкости под ледяным покровом и построении на его основе систематической нелинейной теории. Основное внимание уделено исследованию существенно двумерных эффектов, специфика которых в большой мере зависит от напряжений во льду.

1. Система уравнений с граничными условиями, описывающая потенциальные движения в слое жидкости конечной глубины H , находящемся под ледяным покровом, моделируемым тонкой упругой пластиной, не отличается от системы в случае свободной поверхности [4]

$$\left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi = 0, \quad \eta > z > -H \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad z = -H \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[(\nabla \varphi)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + g\eta + \frac{p_i - p_a}{\rho} = 0, \quad z = \eta \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \eta \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad z = \eta \quad (1.4)$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \Delta = \nabla \nabla$$

Здесь φ - потенциал скоростей частиц жидкости, η - возвышение неизвестной поверхности жидкости над горизонтальным положением равновесия, ρ - плотность жидкости, x, y - горизонтальные координаты, z, t - вертикальная координата и время.

Специфика задачи проявляется в связи между давлением в жидкости под нижней поверхностью льда p_i и атмосферным давлением $p_a = \text{const}$, которая задается соотношением [3]

$$\frac{p_i - p_a}{\rho} = (\sigma + D\Delta^2)\eta \quad (1.5)$$

$$\sigma = -\frac{h}{\rho} \left(\sigma_{xx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\sigma_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \sigma_{yy} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)\rho}$$

где $\sigma_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) = (x, y)$ — компоненты тензора напряжений, создаваемых во льду внешними нагрузками, h — толщина льда, D — цилиндрическая жесткость ледяной пластины, E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона льда.

В дальнейшем для оценок будем предполагать, что параметры льда имеют порядок [9]

$$E = O(10^9 \text{ Н/м}^2), \quad \nu \approx 0,3, \quad h \lesssim 1 \text{ м}, \quad \sigma_{\alpha\beta} \lesssim O(10^5 \text{ Н/м}^2)$$

Оценка на $\sigma_{\alpha\beta}$ связана с тем, что прочность льда на сжатие или растяжение имеет порядок $O(10^6 \text{ Н/м}^2)$.

Из (1.5) видно, что влияние внешних напряжений структурно подобно влиянию капиллярности, но имеет существенно анизотропный характер.

2. Система (1.3), (1.4) с учетом (1.1), (1.2) может быть представлена в гамильтоновой форме

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \varphi^*}, \quad \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \eta} \quad (2.1)$$

$$2H = \iint_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-H}^{\eta} \left[(\nabla \varphi)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dz + g\eta^2 + \eta\sigma\eta + D(\Delta\eta)^2 \right] dx dy$$

Здесь φ^* — значение потенциала φ на границе $z = \eta$.

После перехода к комплексным переменным из (2.1) получим

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -i \frac{\delta H}{\delta b^*} \quad (2.2)$$

$$b(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{L}{\omega}} \eta_f + i \sqrt{\frac{\omega}{L}} \varphi_f \right) \quad (2.3)$$

$$\omega = \sqrt{k \operatorname{th}(kH) L(\mathbf{k})} \quad (2.4)$$

$$L(\mathbf{k}) = g + \frac{h}{\rho} \sum_{\alpha, \beta} \sigma_{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta + Dk^4$$

где $\eta_f(\mathbf{k}, t), \varphi_f(\mathbf{k}, t)$ — фурье-образы $\eta(x, t), \varphi^*(x, t)$.

При устремлении толщины h к нулю в (2.2)–(2.4) имеет место предельный переход к задаче со свободной поверхностью. Для волн малых амплитуд гамильтониан H может быть представлен в виде ряда по степеням канонических переменных

$$\begin{aligned} 2H = & \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) b^*(\mathbf{k}) d\mathbf{k} + \iiint_{-\infty}^{\infty} \left[V^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) b(\mathbf{k}) b^*(\mathbf{k}_1) \times \right. \\ & \times b^*(\mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) + \frac{1}{3} V^{(3)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) b(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}_1) \times \\ & \left. \times b(\mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \right] d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 + \dots + C. C. \end{aligned}$$

Коэффициенты $V^{(i)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ выражаются через \mathbf{k}_i и функцию $\omega(\mathbf{k})$, удовлетворяющую дисперсионному соотношению (2.4), и зависят от па-

раметров льда только через дисперсионное соотношение. Коэффициенты $V^{(1, 3)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ приведены в Приложении.

Располагая явными выражениями для коэффициентов, можно воспользоваться аппаратом и результатами теории нелинейных волн [10, 11]. В частности, для описания различных режимов нелинейной эволюции волнового поля можно использовать «готовые» укороченные уравнения, решения которых хорошо изучены. Отделяя «стандартные» случаи, основное внимание уделим тем ситуациям, где в наибольшей степени проявляется специфика ледяного покрова.

3. Исследуем влияние напряжений на кинематику волн в линейной теории. Распространение слабомодулированных волновых пакетов со спектром в окрестности волнового вектора \mathbf{k} в приближении геометрической оптики описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla \omega \nabla + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \omega_{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} \right) \varphi = 0 \quad (3.1)$$

$$\nabla \omega = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_x}, \frac{\partial \omega}{\partial k_y} \right)$$

$$\omega_{xx} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_x^2}, \quad \omega_{xy} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_x \partial k_y}, \quad \omega_{yy} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_y^2}$$

Здесь $\varphi(x, t)$ — огибающая волнового пакета $\Phi = \varphi \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{x} + \omega t)]$. Квадратичная форма $\omega_{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta}$ определяет дисперсионное распывание волнового пакета.

В декартовой системе координат, перемещающейся с групповой скоростью $\nabla \omega$ и повернутой относительно осей x и y на угол ψ , определяемый соотношением

$$\operatorname{tg} 2\psi = 2 \frac{\omega_{xy}}{\omega_{xx} - \omega_{yy}}$$

уравнение (3.1) записывается в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + W_+ \frac{\partial^2}{\partial X^2} + W_- \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) \varphi = 0 \quad (3.2)$$

$$W_{\pm} = \frac{1}{4} [\omega_{xx} + \omega_{yy} \pm (2\omega_{xy} \sin 2\psi + (\omega_{xx} - \omega_{yy}) \cos 2\psi)]$$

Координаты X и Y связаны с x и y формулами

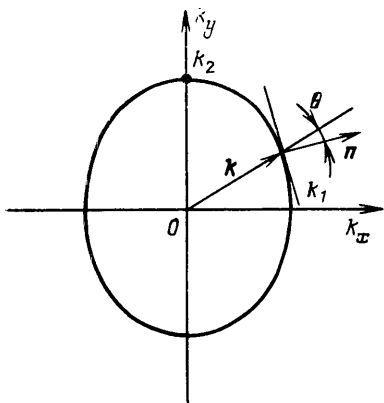
$$X = x \cos \psi + y \sin \psi, \quad Y = -x \sin \psi + y \cos \psi$$

Для произвольного направления τ в плоскости (x, y) можно указать волновой вектор $\mathbf{k}_{\tau} \parallel \tau$, такой, что выполняется

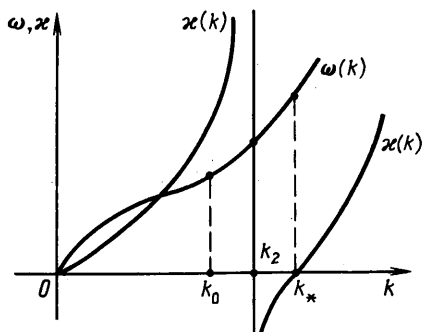
$$\det(\omega_{\alpha\beta}) = \omega_{xx}\omega_{yy} - \omega_{xy}^2 = 0 \quad (3.3)$$

Вектор \mathbf{k}_{τ} определяет угол ψ и, следовательно, направление оси X , в котором волновые пакеты, имеющие спектр в окрестности \mathbf{k}_{τ} , не испытывают дисперсионного распывания в рамках (3.1). Компоненты \mathbf{k}_{τ} являются функциями $\sigma_{\alpha\beta}$ и параметров ледяного покрова.

Для примера рассмотрим направление $\tau = (1, 0)$. В этом случае (3.3) выполняется при $\omega_{xx} = 0$. Вследствие аномального характера дисперсии волн в жидкости под упругой пластиной [4] это уравнение имеет



Фиг. 1



Фиг. 2

решение, которое может быть записано в приближенной форме

$$k = k_0 - \frac{\sigma_{xx}(3g + 11Dk_0^4)}{60gDk_0(g + Dk_0^4)} \quad (3.4)$$

$$k_0^4 = (-1 + \sqrt{1 + 1/15})g/D$$

Сжатие ледяного покрова в направлении оси x уменьшает длину волн, распространяющихся с минимальной групповой скоростью в этом направлении и затухающих пропорционально $t^{-1/3}$. Зная параметры льда и k , по формуле (3.4) можно определить напряжение σ_{xx} .

Волновые пакеты со спектром в окрестности k_τ при любом направлении τ испытывают слабое дисперсионное расплывание в направлении их распространения и затухают пропорционально $t^{-1/3}$ в ходе их эволюции. Если ледяной покров находится в анизотропном напряженном состоянии, то $|k_\tau|$ различны при разных τ . При $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma\delta_{\alpha\beta}$ длина вектора $|k_\tau|$ одинакова при любых τ . По величинам $|k_\tau|$ для трех различных направлений τ_1, τ_2, τ_3 можно с помощью (3.3) определить напряжения $\sigma_{\alpha\beta}$ для заданных параметров льда.

При принятых выше значениях параметров члены $\sigma_{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta$ в дисперсионном соотношении (2.4) малы ($\approx 10^{-1}$) по сравнению с g или Dk^4 . В ситуациях, когда ледяной покров неоднороден и представляет собой совокупность льдин, его жесткость при рассмотрении волн длиной много большей характерных размеров льдин, существенно меньше, чем при однородном покрове, и напряженное состояние влияет на параметры волн.

Дисперсионное соотношение (2.4) в системе координат, связанной с главными осями $\sigma_{\alpha\beta}$, записывается в виде

$$\omega = \sqrt{k \operatorname{th}(kH) (g + \sigma_1 k_x^2 + \sigma_2 k_y^2 + Dk^4)} \quad (3.5)$$

$$\sigma_1 = \frac{h}{\rho} \sigma_{xx}, \quad \sigma_2 = \frac{h}{\rho} \sigma_{yy}$$

После введения обозначений $k_x = k \cos \psi'$, $k_y = k \sin \psi'$ из (3.5) находим

$$\sin^2 \psi' = \frac{D(k, \omega, \sigma_1)}{(\sigma_1 - \sigma_2) k^3 \operatorname{th}(kH)}, \quad \sigma_1 \neq \sigma_2 \quad (3.6)$$

$$D(k, \omega, \sigma) = \omega^2 - k \operatorname{th}(kH) (g + \sigma k^2 + Dk^4)$$

Из (3.6) следует, что при фиксированной частоте ω величина k меняется в пределах $k_1 \leq k \leq k_2$, где $k_{1,2}$ — корни уравнений

$$D(k, \omega, \sigma_{1,2}) = 0, \quad \sigma_2 < \sigma_1$$

Концы волновых векторов волн фиксированной частоты ω лежат на кривой, являющейся сечением дисперсионной поверхности плоскостью $\omega = \text{const}$ (см. фиг. 1). Вектор групповой скорости $\nabla \omega$ направлен вдоль нормали \mathbf{n} к этой кривой. Фазовая скорость направлена вдоль \mathbf{k} . Угол θ между направлениями фазовой и групповой скоростей является характеристикой анизотропии дисперсионного соотношения, которая обусловлена неоднородными условиями сжатия или растяжения льда. Для жидкости большой глубины находим

$$\cos \theta = \frac{\nabla \omega \mathbf{k}}{k |\nabla \omega|} = \frac{1 + 3k_x^2 (\sigma_1 - \sigma_2) / \Omega_1}{\sqrt{1 + k_x^2 (\sigma_1 - \sigma_2) \Omega_2 / \Omega_1}}$$

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= g + 3\sigma_2 k^2 + 5Dk^4 \\ \Omega_2 &= 6(g + 5Dk^4) + 2k^2(7\sigma_1 + 2\sigma_2) + 5k_x^2(\sigma_1 - \sigma_2) \end{aligned}$$

При $\sigma_1 = \sigma_2$ направления групповой и фазовой скоростей совпадают и угол $\theta = 0$. При анизотропном напряженном состоянии направления групповой и фазовой скоростей различны.

4. Рассмотрим эволюцию слабонелинейных длинных волн под ледяным покровом. В этом случае в задаче имеется два малых параметра $\mu = (H/\lambda)^2 \ll 1$, $\varepsilon = a/H \ll 1$, где a , λ — характерные амплитуда и длина волны. Введем безразмерные переменные

$$(x, y) = (\lambda x', \lambda y'), \quad z = z' H, \quad t = \lambda t' / \sqrt{gH}$$

$$\eta = a\eta', \quad \varphi = a\lambda \sqrt{\frac{g}{H}} \varphi', \quad \sigma_{\alpha\beta}' = \frac{h\sigma_{\alpha\beta}}{\rho g \lambda^2}, \quad D' = \frac{D}{g\lambda^4}$$

Далее штрихи у безразмерных переменных опускаются. Из (1.1), (1.2) в безразмерной форме находим

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 - z\mu(\Delta\varphi_0 + \frac{1}{3}\mu\Delta^2\varphi_0) - \frac{1}{2}z^2\mu\Delta\varphi_0 + \\ &+ \frac{1}{6}z^3\mu^2\Delta^2\varphi_0 + \frac{1}{24}z^4\mu^2\Delta^2\varphi_0 + O(\mu^3) \\ \varphi &= \varphi_0(x, t) + O(\varepsilon^2, \mu^2, \varepsilon\mu) \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} 2H &= \iint_{-\infty}^{\infty} \left[(\varepsilon\eta + 1)(\nabla\varphi_0)^2 + \frac{2}{3}\mu(\nabla\varphi_0 \nabla\Delta\varphi_0) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{3}\mu(\Delta\varphi_0)^2 + \eta^2 - \eta\sigma\eta + D(\Delta\eta)^2 \right] dx dy + O(\varepsilon^2, \mu^2, \varepsilon\mu) \end{aligned}$$

Проводя варьирование в уравнениях (1.6), получаем систему уравнений Буссинеска для жидкости под ледяным покровом

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \varepsilon \nabla(\eta \nabla \varphi_0) + \Delta \varphi_0 + \frac{1}{3} \mu \Delta^2 \varphi_0 = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{2} \varepsilon (\nabla \varphi_0)^2 + \eta - \sigma \eta + D \Delta^2 \eta = 0$$

Полагая, что величины $\sigma_{\alpha\beta}$, D имеют порядок $O(\mu)$ (см. [7]), исключим η из (4.2)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi_0 - \Delta \varphi_0 + 2\varepsilon \left(\nabla \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} \nabla \varphi_0 \right) + \varepsilon \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} \Delta \varphi_0 - \left(\frac{1}{3} \mu \Delta - \sigma \right) \Delta \varphi_0 - D \Delta^3 \varphi_0 = 0 \quad (4.3)$$

Уравнение (4.3) имеет солитоноподобное стационарное решение

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= A \operatorname{th} \theta (1 - 1/3 \operatorname{th}^2 \theta) \\ \theta &= \alpha x + \beta y + \gamma t \end{aligned} \quad (4.4)$$

В системе координат (x, y) , связанной с главными осями тензора напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$, постоянные α, β, γ связаны с амплитудой солитона $a = A\gamma$ соотношениями

$$\begin{aligned} \Delta \sigma \alpha^2 &= A - B \sigma_{yy}, \quad -\Delta \sigma \beta^2 = A - B \sigma_{xx} \\ \gamma^2 &= B(1 + 3/35 \varepsilon a) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$A = \frac{13}{140} \varepsilon a + \frac{1}{3} \mu B, \quad B = \sqrt{\frac{\varepsilon a}{560D}}$$

$$\Delta \sigma = \sigma_{xx} - \sigma_{yy}$$

Рассмотрим случай, когда лед находится в состоянии растяжения вдоль оси x : $\sigma_{xx} > 0$. Из (4.5) следует

$$\sigma_{xx} > \sqrt{169/35 \varepsilon a D} + \mu/3 \quad (4.6)$$

Солитоны (4.4) качественно отличны от солитонов КдВ тем, что их амплитуда фиксирована. Максимальная амплитуда, согласно (4.6), дается выражением

$$a_* = \frac{35}{169} \left(\frac{1}{3} \mu - \sigma_{xx} \right)^2 (\varepsilon D)^{-1}$$

При стремлении угла ψ ($\operatorname{tg} \psi = \beta/\alpha$) между осью x и направлением распространения солитона к нулю a стремится к a_* . При $a = a_*$ решение (4.4) переходит в решение, полученное в [8].

5. Рассмотрим эволюцию слабонелинейных волн в жидкости большой глубины. Введем безразмерные переменные

$$(x, y, z) = (\lambda x', \lambda y', \lambda z'), \quad t = \sqrt{\lambda/g} t', \quad \varphi = a \sqrt{g \lambda} \varphi'$$

В дальнейшем штрихи у безразмерных переменных опускаются. В задаче имеется один малый параметр $\varepsilon = a/\lambda \ll 1$.

В [4–6] с использованием асимптотических разложений по параметру ε были получены и исследованы в некоторых случаях укороченные уравнения, описывающие различные режимы нелинейной эволюции волновых пакетов. Поэтому в дальнейшем не будем останавливаться на выводе исследуемых уравнений и уделим основное внимание изучению некоторых типов их решений.

Дисперсионное соотношение (2.4) допускает выполнение условий синхронизма для нелинейного взаимодействия трех волн [4, 5] и для генерации высших гармоник [6]. Анализ уравнений резонансных взаимодействий волновых пакетов показывает, что с течением времени происходит перераспределение энергии между ними. Этот процесс, как правило, имеет периодический или распадный характер. Однако в некоторых случаях резонансное взаимодействие приводит к захвату взаимодействующих пакетов под одной огибающей, имеющей постоянные форму и скорость. Этот эффект был получен в одномерном случае в [5] для трех взаимодействующих

щих волновых пакетов, один из которых в линейном приближении имеет минимальную групповую скорость.

В отсутствие резонансов распространение волновых пакетов в координатной системе, перемещающейся вдоль оси x с групповой скоростью ω' , описывается нелинейным уравнением Шредингера [6]

$$\left(i \frac{\partial}{\partial T'} + \frac{\omega''}{2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\omega'}{2k} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) \Phi = \kappa |\Phi|^2 \Phi \quad (5.1)$$

$$T' = \epsilon^2 t$$

При $\sigma_{\alpha\beta} = 0$ выполняется

$$\kappa = k^4 (2 - 13Dk^4) [\omega (1 - 14Dk^4)]^{-1}$$

Свойства уравнения (5.1) зависят от знака произведения $\kappa\omega''$ [12]. При $\kappa\omega'' < 0$ плоские периодические волны неустойчивы и их огибающая Φ с течением времени распадается на солитоны. При $\kappa\omega'' > 0$, $\partial/\partial Y = 0$ произвольные начальные данные для (5.1), гладкие и обращающиеся в нуль при $|X| \rightarrow \infty$ порождают излучение, которое убывает как $1/\sqrt{T'}$. В этом случае плоские периодические волны устойчивы по отношению к длинным продольным возмущениям.

В двумерном случае при $\omega'' > 0$, $\kappa < 0$ решения (5.1) для определенного класса начальных данных неустойчивы, причем неустойчивость имеет взрывной характер и решение фокусируется в точку за конечный промежуток времени. Этот эффект был исследован в [13-15] применительно к нелинейной оптике.

Графики $\omega(k)$ и $\kappa(k)$ представлены на фиг. 2, где

$$k_0 \approx \frac{1}{\sqrt[4]{30D}}, \quad k_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{14D}}, \quad k_* = \frac{1}{\sqrt[4]{13/2 D}}, \quad \omega''(k_0) = 0$$

Условие $\kappa\omega'' < 0$ выполняется при $k \in (0, k_0) \cup (k_2, k_*)$. Вблизи $k = k_2$ коэффициент $|\kappa| \gg 1$. В этом случае предположения, в которых выведено (5.1), не выполняются и с течением времени происходит генерация второй гармоники [4].

Солитонные решения (5.1) в плоском случае записываются в виде (далее штрих у T' опускается)

$$\Phi = \psi(X - vT) \exp[i(rX + sT)], \quad \psi = A \operatorname{ch}^{-1}[B(X - vT)]$$

$$A = \sqrt{-2R/\kappa}, \quad B = \sqrt{2R/\omega''}, \quad R = s + 1/2 r^2 \omega'', \quad v = r\omega''$$

В случае совпадения скорости солитона огибающей с фазовой скоростью волны, бегущей под ним, волновой пакет

$$\Phi = \varphi \exp[i(kx + \omega t)]$$

является солитоном с осциллирующей структурой. В нулевом порядке по ϵ это условие выполняется при $\omega' = \omega/k$. Разрешая это соотношение относительно k , находим

$$k = 1/\sqrt[4]{3D}$$

Для анализа взрывной неустойчивости двумерных решений при $\omega'' > 0$, $\kappa < 0$ сделаем в (5.1) замену

$$X' = X/\sqrt{\omega''}, \quad Y' = Y\sqrt{k/\omega'}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{i}{2} (\Delta \Phi - 2\kappa |\Phi|^2 \Phi) \quad (5.2)$$

Из (5.2) следует [15]

$$I(T) = I(0) + AT^2 - BT, \quad \frac{dE}{dT} = 0$$

$$I(T) = \frac{1}{E} \int r^2 |\varphi|^2 dS, \quad E = \int |\varphi|^2 dS$$

$$A = \frac{1}{E} \int (|\nabla\varphi| + \kappa|\varphi|^4) dS|_{T=0}$$

$$B = \frac{2}{E} \int (\mathbf{r}\nabla\varphi') |\varphi|^2 dS|_{T=0}$$

$$\mathbf{r} = (X, Y), \quad dS = dXdY, \quad \varphi = |\varphi| \exp i\varphi'$$

штрихи у X' , Y' опущены. При $\kappa < 0$, т. е. при $k \in (k_2, k_*)$, возможно выполнение условия $A < 0$, при котором за конечный промежуток времени

$$\Delta T = (B + \sqrt{B^2 - 4AI(0)}) / (2A) \quad (5.3)$$

волновой пакет Φ фокусируется в точку (коллапсирует), амплитуда $|\varphi|$ при этом обращается в бесконечность.

Для примера рассмотрим начальные условия

$$\varphi = e^{-\alpha r^2}, \quad \alpha > 0, \quad T = 0 \quad (5.4)$$

Амплитуду $|\varphi(0, 0)|$ считаем равной единице, так как ее величину выберем в качестве характерной величины волновых амплитуд при обезразмеривании. С учетом (5.4) условие $A < 0$ записывается в виде $\alpha < -1/4\kappa$. Это соотношение является достаточным условием на ширину волнового пакета заданной амплитуды в начале координат с огibaющей (5.4) для того, чтобы он коллапсировал в течение промежутка времени

$$\Delta T = [-\alpha(4\alpha + \kappa)]^{-1/2}$$

Положим

$$E = 3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, \quad \nu = 0,3, \quad \rho = 900 \text{ кг/м}^3,$$

$$h = \alpha' \cdot 10^{-1} \text{ м}, \quad 1 \leq \alpha' \leq 10, \quad \lambda = \sqrt[4]{7Eh^3 / (12\rho g)} = 2\sqrt[4]{10\alpha^3} \text{ м}$$

где λ — характерный горизонтальный масштаб.

Отсюда следует, что $\kappa = -2$ при $k = 1$. Начальные условия (5.4) в размерном виде выглядят следующим образом:

$$\varphi = a \exp \left[\frac{\alpha e^2}{\lambda^2} \left(\frac{x^2}{\omega''} + \frac{y^2}{\omega'} \right) \right], \quad \omega(k) = \sqrt{k \left(1 + \frac{2}{14} k^4 \right)}, \quad T = 0$$

Характерную ширину волнового пакета определим выражением $r_0 = \lambda e^{-1} \sqrt[3]{\alpha}$. Полагая $\alpha = 1/2 - \delta$, $0 < \delta < 1/2$, условия коллапса волн длиной $2\pi\lambda$ перепишем следующим образом:

$$\alpha < 0,5; \quad \Delta T \geq e^{-2} \sqrt{\lambda / (2\delta g)}; \quad r_0 \geq \lambda e^{-1} \sqrt[3]{3}$$

Для $h = 10$ см, $a = 1$ см имеем $\Delta T_1 \geq 2/\sqrt{\delta}$ ч, $r_0^{-1} \geq 0,8$ км, для $h = 1$ м, $a = 20$ см — $\Delta T_2 \geq 2,8/\sqrt{\delta}$ ч, $r_0^{-1} \geq 1,2$ км. Оценим расстояния $r_{1,2}$, которое волновые пакеты пройдут за время коллапса, считая что их скорость мало отличается от групповой скорости ω' : $r_1 \geq 43\sqrt{\delta}$ км, $r_2 \geq 153/\sqrt{\delta}$ км.

При уменьшении пространственного масштаба модуляции волн при коллапсировании рассматриваемое приближение теряет смысл. Кроме того, может происходить разрушение ледяного покрова в результате роста амплитуды волн. В связи с этим эволюция рассматриваемых волновых пакетов в данном приближении описывается уравнением (5.1) на временах $t < \Delta T_{1,2}$ и расстояниях $r < r_{1,2}$ соответственно.

ПРИЛОЖЕНИЕ

$$V^{(4)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = -V(-\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) - V(-\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1) + V(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k})$$

$$V^{(3)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) + V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1) + V(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k})$$

$$V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{\omega(\mathbf{k}) \omega(\mathbf{k}_1) |\mathbf{k}_2|}{2|\mathbf{k}| |\mathbf{k}_1| \omega(\mathbf{k}_2)}} [|\mathbf{k}\mathbf{k}_1| + |\mathbf{k}| |\mathbf{k}_1|]$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Букатов А. Е.* Влияние продольно сжатой упругой пластинки на неустановившееся волновое движение однородной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 5. С. 68–75.
2. *Букатов А. Е., Черкесов Л. В.* Влияние ледяного покрова на развитие внутренних волн от периодических возмущений // Морские гидрофизические исследования. Севастополь, 1976. № 4 (75). С. 5–16.
3. *Хейсин Д. Е.* Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967. 215 с.
4. *Марченко А. В., Сибгатуллин Н. Р.* О резонансном взаимодействии волн в тяжелой жидкости, находящейся под упругой пластиной // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем. Мех. 1986. № 4. С. 94–97.
5. *Марченко А. В., Сибгатуллин Н. Р.* Об эволюции волновых пакетов при трехволновом взаимодействии в тяжелой жидкости под ледяным покровом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 6. С. 57–64.
6. *Марченко А. В.* О резонансном возбуждении волн в тяжелой жидкости под вязкоупругой пластиной. // ПМТФ. 1991. № 3.
7. *Ильичев А. Т., Марченко А. В.* О распространении длинных нелинейных волн в тяжелой жидкости под ледяным покровом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 88–95.
8. *Марченко А. В.* О длинных волнах в мелкой жидкости под ледяным покровом // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 230–234.
9. *Богородский В. В., Гаврило В. П.* Лед. Физические свойства. Современные методы гляциологии. Л.: Гидрометеиздат, 1980. 384 с.
10. *Захаров В. Е.* Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости // ПМТФ. 1968. № 2. С. 86–94.
11. *Захаров В. Е.* Гамильтоновский формализм для волн в нелинейных средах с дисперсией // Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т. 17. № 4. С. 431–454.
12. *Абловиц М. Дж., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. 480 с.
13. *Захаров В. Е., Сынах В. С.* О характере особенности при самофокусировке // ЖЭТФ. 1975. Т. 68. Вып. 3. С. 940–947.
14. *Kelley P. L.* Self-focusing of optical beams // Phys. Rev. Lett. 1965. V. 15. № 26. P. 1005–1008.
15. *Власов С. Н., Петрищева В. А., Таланов В. И.* Усредненное описание волновых пучков в линейных и нелинейных средах (метод моментов) // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т. 14. № 9. С. 1353–1363.

Влаживосток

Поступила в редакцию
15.V.1990