

УДК 532.5.013.4 : 536.25

© 1991 г.

А. А. НЕПОМНЯЩИЙ, И. Б. СИМАНОВСКИЙ

ВОЗНИКНОВЕНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЙ КОНВЕКЦИИ В СИСТЕМАХ С ДЕФОРМИРУЕМОЙ ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА

Исследуется колебательная неустойчивость равновесия с учетом деформации поверхности раздела. Установлена возможность возбуждения двух типов колебаний, один из которых аналогичен известному типу в системах с плоской границей раздела, а другой обусловлен колебаниями деформируемой поверхности.

Линейная теория монотонной термокапиллярной неустойчивости равновесия в системе двух слоев вязких жидкостей с деформируемой поверхностью раздела построена в [1]. Известно, однако, что равновесие двухслойной системы может терять устойчивость колебательным образом. Возникновение колебаний для систем с плоской границей раздела изучалось в [2-4]. В [5, 6] обнаружен новый тип неустойчивости однослойной системы со свободной верхней границей, существенно связанной с поверхностными колебаниями.

1. Пусть пространство между двумя горизонтальными твердыми пластинами $y=a_1$ и $-a_2$, на которых поддерживаются постоянные температуры, различающиеся на величину θ , заполнено двумя слоями не смешивающихся жидкостей. В состоянии механического равновесия уравнение границы раздела $y=0$. Плотности сред, коэффициенты динамической и кинематической вязкости, теплопроводности и температуропроводности равны $\rho_m, \eta_m, \nu_m, \kappa_m, \chi_m$ ($m=1$ и 2 для верхнего и нижнего слоев). Коэффициент поверхностного натяжения σ линейно зависит от температуры T , отсчитываемой от температуры границы в состоянии равновесия: $\sigma=\sigma_0(1-\alpha T)$. Тепловое расширение жидкостей не учитывается.

Введем обозначения: $\rho=\rho_1/\rho_2, \eta=\eta_1/\eta_2, \nu=\nu_1/\nu_2, \kappa=\kappa_1/\kappa_2, \chi=\chi_1/\chi_2, a=-a_2/a_1$. В качестве единиц длины, времени, скорости, давления и температуры выберем соответственно $a_1, a_1^2/\nu_1, \nu_1/a_1, \rho_1 \nu_1^2/a_1^2$ и θ . Безразмерные градиенты температуры A_m и давления B_m в равновесии постоянны и равны соответственно $A_1=-s/(1+\kappa a), A_2=-s\kappa/(1+\kappa a), B_1=-Ga, B_2=-Ga/\rho$, где $Ga=ga_1^3/\nu_1^2$ — число Галилея. Для нормальных возмущений x - и y -компонент скорости v_{mx} и v_{my} , давления p_m и температуры T_m ($m=1, 2$) линеаризованные уравнения конвекции имеют вид

$$-(\lambda+i\omega)v_{my}=-e_m p_m'+c_m Dv_{my}, \quad -(\lambda+i\omega)v_{mx}=-ike_m p_m+c_m Dv_{mx} \\ -(\lambda+i\omega)T_m+A_m v_{my}=d_m P^{-1}DT_m, \quad ikv_{mx}+v_{my}'=0$$

$$D=\frac{d^2}{dy^2}-k^2, \quad c_1=d_1=e_1=1, \quad c_2=\frac{1}{\nu}, \quad d_2=\frac{1}{\chi}, \quad e_2=\rho, \quad P=\frac{\nu_1}{\chi_1}$$

Здесь k — волновое число, $\lambda+i\omega$ — комплексный декремент, штрихом обозначено дифференцирование по координате y , P — число Прандтля.

Условия на твердых границах зададим в виде

$$y=1: \quad v_1=0, \quad T_1=0; \quad y=-a: \quad v_2=0, \quad T_2=0$$

На границе раздела ставятся условия для нормальных и касательных напряжений [7], непрерывности вектора скорости, температуры и нормальной компоненты потока тепла, а также кинематическое условие, связывающее отклонение границы h со скоростью жидкостей на поверхности раздела. Условия на деформированной границе раздела в результате перенесения на плоскость $y=0$ принимают вид

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 + [Ga(\rho^{-1} - 1) + Wk^2]h &= 2(v_{1y}' - \eta^{-1}v_{2y}') \\ \eta(v_{1x}' + ikv_{1y}) - (v_{2x}' + ikv_{2y}) - ik \text{Gr}' T_1 - \frac{s}{1 + \kappa a} h &= 0 \\ v_{1x} &= v_{2x}, \quad -(\lambda + i\omega)h = v_{1y} = v_{2y} \\ T_1 - T_2 &= \frac{s(1 - \kappa)}{1 + \kappa a} h, \quad \kappa T_1' - T_2' = 0 \\ W &= \sigma a_1 / \eta_1 v_1, \quad \text{Gr} = \alpha \theta a_1 / \eta_2 v_1 \end{aligned}$$

где Gr — аналог числа Марангони.

Вводя возмущения функции тока

$$v_{mx} = \psi_m', \quad v_{my} = -ik\psi_m \quad (m=1, 2)$$

и исключая стандартным образом возмущения давления, запишем полученную краевую задачу в виде

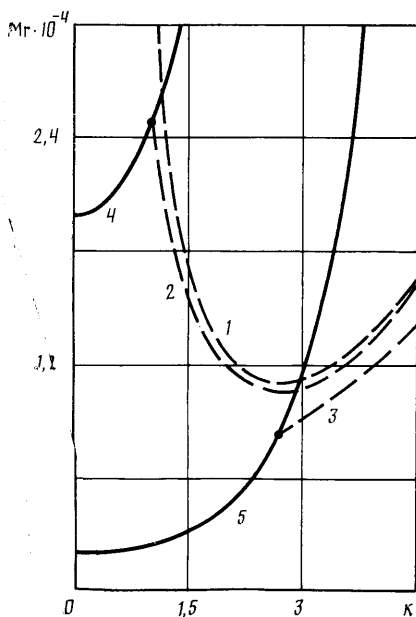
$$\begin{aligned} (\lambda + i\omega)D\psi_m &= -c_m D^2\psi_m \\ -(\lambda + i\omega)T_m - ikA_m\psi_m &= d_m P^{-1}DT_m \\ y=1: \quad \psi_1 &= \psi_1' = T_1 = 0, \quad y=-a: \quad \psi_2 = \psi_2' = T_2 = 0 \\ y=0: \quad \psi_1''' - \eta^{-1}\psi_2''' + [(\lambda + i\omega)(1 - \rho^{-1}) - 3k^2(1 - \eta^{-1})]\psi_1' + &+ ik[Ga(\rho^{-1} - 1) + Wk^2]h = 0 \\ \eta(\psi_1'' + k^2\psi_1) - (\psi_2'' + k^2\psi_2) - ik \text{Gr} \left(T_1 - \frac{s}{1 + \kappa a} h \right) &= 0 \\ \psi_1' &= \psi_2', \quad \psi_1 = \psi_2 = -i\lambda k^{-1}h \\ T_1 - T_2 &= \frac{s(1 - \kappa)h}{1 + \kappa a}, \quad \kappa T_1' - T_2' = 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Граница монотонной неустойчивости ($\lambda = \omega = 0$) определяется аналитически [1]

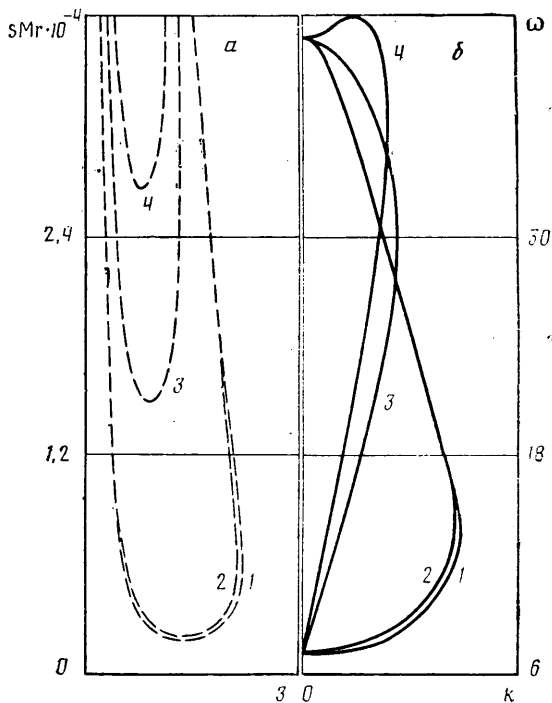
$$\text{Gr}(k) = \frac{8sk^2(1 + \kappa a)(\kappa D_1 + D_2)(\eta B_1 + B_2)}{\kappa[P(\chi E_2 - E_1) - 8k^5(D_1 + D_2)(F_1 - \eta^{-1}F_2)][Ga(\rho^{-1} - 1) + Wk^2]^{-1}} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{C_1}{S_1}, \quad D_2 = \frac{C_2}{S_2}, \quad B_1 = \frac{S_1 C_1 - k}{S_1^2 - k^2}, \quad B_2 = \frac{S_2 C_2 - \kappa a}{S_2^2 - k^2 a^2}, \\ E_1 &= \frac{S_1^3 - k^3 C_1}{S_1(S_1^2 - k^2)}, \quad E_2 = \frac{S_2^3 - k^3 a^3 C_2}{S_2(S_2^2 - k^2 a^2)}, \quad F_1 = \frac{1}{S_1^2 - k^2}, \quad F_2 = \frac{a^2}{S_2^2 - k^2 a^2} \\ S_1 &= \text{sh } k, \quad C_1 = \text{ch } k, \quad S_2 = \text{sh } \kappa a, \quad C_2 = \text{ch } \kappa a \end{aligned}$$

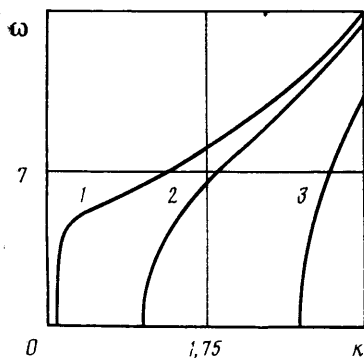
Монотонная мода неустойчивости, однако, не исчерпывает всей совокупности возможных типов потери устойчивости равновесия. Даже в отсутствие деформации границы известны ситуации, когда возникает колебательная мода неустойчивости [2—4]. Кроме того, можно ожидать появления специфических колебаний, связанных с возбуждением волн на поверхности (как это имеет место в однослойной системе [5, 6]). В даль-



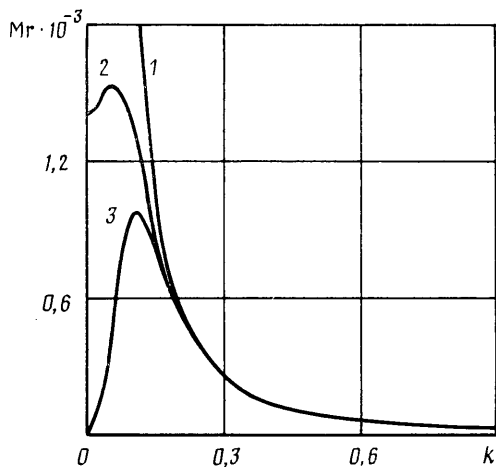
Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2



Фиг. 4

нейшем будем полагать $\rho < 1$, чтобы исключить из рассмотрения механизм неустойчивости Рэля — Тейлора.

2. Расчеты колебательных нейтральных кривых осуществлялись посредством численного интегрирования краевой задачи (1.1) с использованием метода Рунге — Кутты.

Поскольку влияние деформации границы предполагается наиболее сильным для случая близких плотностей жидкостей, рассмотрим сначала модельную систему с $\rho = 0,999$. Остальные параметры системы выберем следующими: $\chi = a = W = 1$, $\nu = 0,5$. Можно показать, что в отсутствие деформации границы (предел $Ga \rightarrow \infty$) выражение (1.2) для рассматривае-

мой системы обращается в бесконечность и единственно возможной модой неустойчивости является колебательная мода [3], реализующаяся в случае подогрева снизу ($s=1$). При конечных значениях Ga для данной системы при подогреве снизу появляется также монотонная мода неустойчивости, для которой критическое значение числа Mg реализуется при $k=0$ и, согласно (1.2), $Mg(0) \approx 2 \cdot 10^{-3} Ga$.

Взаимное расположение колебательных ($Ga=10^9$, 10^7 и 10^6 — линии 1–3) и монотонных ($Ga=10^7$, 10^6 — линии 4 и 5) нейтральных кривых при конечных значениях k показаны на фиг. 1. Здесь и в дальнейшем монотонные нейтральные кривые изображаются сплошными линиями, а колебательные — штриховыми. Зависимости частоты колебаний от волнового числа представлены на фиг. 2 ($Ga=10^9$, 10^7 , и 10^6 — линии 1–3). Видно, что колебательная неустойчивость исчезает в длинноволновой области и сохраняется только для значений волнового числа k , больших некоторого $k_*(Ga)$; при $k=k_*$ частота колебаний обращается в нуль.

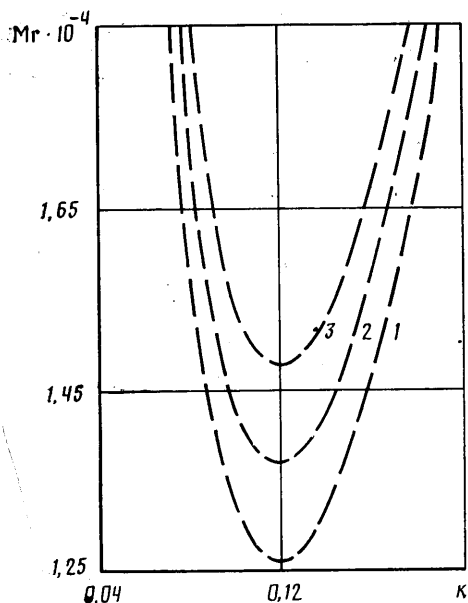
С уменьшением параметра Ga монотонная нейтральная кривая опускается значительно быстрее, чем колебательная, так что длинноволновые монотонные возмущения, существенно связанные с деформацией границы, становятся более опасными (при $Ga \leq 5 \cdot 10^6$).

Деформация границы может приводить к возникновению колебательной неустойчивости даже в том случае, когда в отсутствие деформации механическое равновесие абсолютно устойчиво. В качестве примера рассмотрим описанную выше систему при нагреве сверху. Для этой системы при условии деформации границы обнаруживается новый тип колебательной неустойчивости. Нейтральная кривая имеет форму мешка (фиг. 3, а; $Ga=0$, 10^4 , 10^6 и $2 \cdot 10^6$ — линии 1–4), т. е. любому значению волнового числа в некоторой области $k < k_1(Ga)$ соответствуют два значения $s Mg$. Зависимость частоты колебаний ω от волнового числа k на обеих ветвях нейтральной кривой показана на фиг. 3, б (нумерация линий такая же, как на фиг. 3, а). При $k \rightarrow 0$ асимптотики верхней и нижней ветвей нейтральной кривой, обозначаемые индексами «плюс» и «минус», имеют вид $Mg \rightarrow C_{\pm} k^{-2}$, $\omega \rightarrow \omega_{\pm}$, причем значения $C_{\pm}$, $\omega_{\pm}$ не зависят от параметра Ga . Пороговое значение числа Mg стремится к бесконечности при $Ga \rightarrow \infty$, что свидетельствует о том, что данная мода неустойчивости существенно связана с деформацией границы раздела. Ширина области неустойчивости по волновому числу k_1 монотонно убывает с ростом Ga .

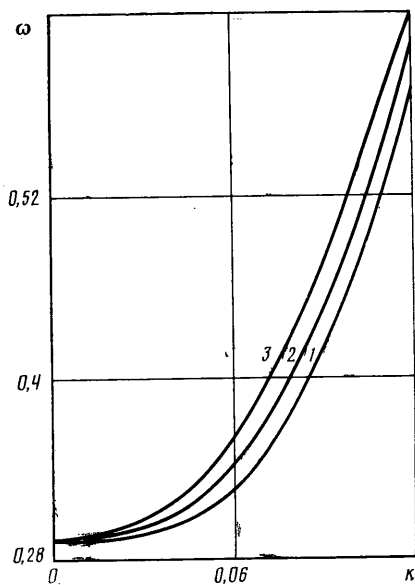
Таким образом, колебательная неустойчивость равновесия в данной системе реализуется при обоих способах подогрева.

3. Перейдем теперь к исследованию условий возникновения термокапиллярной конвекции в системе реальных сред воздух — вода ($P=0,758$; $\eta=0,0182$; $\nu=15,077$; $\kappa=0,0396$; $\chi=138,42$; $\rho=0,00121$). Рассмотрим случай равных толщин слоев: $a=1$. Для реальной системы сред в земных условиях параметры W и Ga , определяемые толщиной верхнего слоя, не являются независимыми, а связаны между собой соотношением $Ga = (W/\gamma)^3$, где константа $\gamma = (\sigma/\rho_1) (g\nu_1^4)^{-1/3}$ зависит только от физических свойств сред. В дальнейшем, однако, будем рассматривать Ga и W как независимые параметры, предполагая возможность изменения величины g (в условиях пониженной гравитации). Положим $W=10^6$ (что соответствует толщинам каждого из слоев 3 мм) и будем варьировать параметр Ga .

В отсутствие деформации ($Ga \rightarrow \infty$) неустойчивость в данной системе возникает только при подогреве снизу и имеет монотонный характер. Минимальное значение $Mg_{\text{кр}} \approx 21$ реализуется при значении волнового числа $k_{\text{кр}} \approx 2$. Как следует из выражения (1.2), влияние деформации при $W \gg 1$ проявляется только в длинноволновой области. На фиг. 4 показана



Фиг. 5



Фиг. 6

зависимость критического числа Mg от волнового числа для значений параметра $Ga = 10^6$, 10 и 0 (линии 1–3). С уменьшением числа Ga (в области $Ga < Ga_1 \approx 13,5$) на нейтральной кривой возникает второй минимум, которому соответствует $k=0$. Длинноволновые возмущения наиболее опасны, если $Ga < Ga_2 \approx 0,15$. При $Ga \rightarrow 0$ критическое число $Mg \rightarrow 0$.

В нагреваемой сверху системе воздух — вода состояние механического равновесия для случая плоской границы при $a=1$ абсолютно устойчиво. Деформация границы приводит к появлению нового типа колебательной неустойчивости, обсуждавшегося в разд. 2. Нейтральные кривые формально могут быть построены для любых значений числа Ga . Следует помнить, однако, что температурное изменение поверхностного натяжения $\alpha\theta$ не должно превышать его среднего значения σ : $\alpha\theta \leq \sigma$; отсюда вытекает соотношение $\alpha\theta \leq W\eta$. Как показывают расчеты, это соотношение реализуется для рассматриваемой системы только в области $Ga \lesssim 20$, т. е. в условиях пониженной гравитации.

На фиг. 5 и 6 показаны соответственно колебательные нейтральные кривые и зависимости частоты от волнового числа для значений $Ga = 0$, 3 и 6 (линии 1–3). Критические волновые числа лежат в длинноволновой области. Обратим внимание на то, что в отличие от случая, изучавшегося в разд. 2, нейтральные кривые не имеют формы «мешка», т. е. при $Mg \rightarrow \infty$ ширина области неустойчивости по волновому числу не убывает.

Напомним, что для слоя бесконечной толщины колебательная мода неустойчивости, возникающая при нагреве сверху и существенно связанная с деформацией границы, была обнаружена в [5]. Этот тип неустойчивости, однако, реализуется в случае $Ga/W \gg 1$ (капиллярный радиус много меньше толщины слоев) и имеет коротковолновый характер ($k_c \sim (Ga/W)^{1/2} \gg 1$). Напротив, колебательная мода, обнаруженная в данной работе, реализуется в длинноволновой области при $Ga/W \ll 1$.

4. Обсудим причины различия формы колебательных нейтральных кривых для систем, рассмотренных в разд. 2 и 3. С этой целью вычислим знак декремента длинноволновых термокапиллярных колебаний в преде-

ле $k \rightarrow 0$, $M = \text{Mr } k^2 \rightarrow \infty$. Можно убедиться в том, что при этом частота колебаний $\omega \sim M$, поэтому движение имеет характер скин-слоев вблизи свободной и твердых поверхностей. Вводя обозначения $T_m = k\theta_m$, $h = kH$, $\psi_m = M\varphi_m$, $\lambda + i\omega = (\Lambda + i\Omega)M$ и $Z = M^{1/2}z$, записываем систему (1.1) для низшего порядка по k

$$\begin{aligned} (\Lambda + i\Omega)\varphi_m'' &= -c_m\varphi_m^{IV} \\ &\quad - (\Lambda + i\Omega)\theta_m - iA_m\varphi_m = d_m P^{-1}\theta_m'' \\ Z = M^{1/2}: \varphi_1 &= \varphi_1' = \theta_1 = 0; \quad Z = -M^{1/2}a: \varphi_2 = \varphi_2' = \theta_2 = 0 \\ Z = 0: \varphi_1''' &- \eta^{-1}\varphi_2''' + (\Lambda + i\Omega)(1 - \rho^{-1})\varphi_1' = 0 \\ \eta\psi_1'' - \psi_2'' - i\theta_1 + i\frac{s}{1+\kappa a}T &= 0, \quad \psi_1' = \psi_2' \\ \psi_1 = \psi_2 - i\Lambda H, \quad \theta_1 - \theta_2 &= -\frac{s(1-\kappa)}{1+\kappa a}H, \quad \kappa\theta_1' - \theta_2' = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Решение системы (4.1) может быть получено аналитически в виде ряда по степеням $M^{-1/2}$. В результате для частоты колебаний получаем формулу

$$\Omega^2 = \frac{s\kappa}{1+\kappa a} \left(\frac{\sqrt{P}}{1+\sqrt{P}} - \frac{\sqrt{\chi P}}{\sqrt{\nu} + \sqrt{\chi P}} \right) \frac{1}{\sqrt{P}(\eta + \sqrt{\nu})(\kappa + \sqrt{\chi})} \quad (4.2)$$

Колебания возможны при таком способе подогрева, когда выражение в правой части положительно, поэтому для декремента Λ находим

$$\begin{aligned} \Lambda = -M^{-1/2}(2\Omega)^{-1/2} &\left[\frac{s\kappa}{(1+\kappa a)} \frac{1}{\sqrt{\nu} + \sqrt{\chi P}} - \Omega^2 \sqrt{P}(\kappa + \sqrt{\chi}) \right] \times \\ &\times \left[\frac{1+\rho a}{\rho a - \nu^{-1/2}} \frac{1-a\sqrt{\nu}}{a} - \sqrt{\nu} \frac{1+a}{a} \right] \left[\sqrt{P}(\sqrt{\chi} + \kappa)(\sqrt{\nu} + \eta) \frac{1+\rho a}{\rho a - \nu^{-1/2}} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Из (4.2) следует, что для обеих рассмотренных систем колебательная неустойчивость возможна при нагреве сверху. Для модельной системы выражение (4.3) дает $\Lambda > 0$, что означает отсутствие колебательной неустойчивости при достаточно больших значениях $M = \text{Mr } k^2$. В силу данного обстоятельства область неустойчивости ограничена сверху условием вида $M < C_+$ или $\text{Mr} < C_+ k^{-2}$. Напротив, для системы воздух — вода из (4.3) следует $\Lambda < 0$, так что колебательные возмущения нарастают при сколь угодно больших значениях $M = \text{Mr } k^2$ (нейтральная кривая при $\text{Mr} \rightarrow \infty$ не замыкается).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Smith K. A. On convective instability induced by surface-tension gradients // J. Fluid Mech. 1966. V. 24. № 2. P. 401–414.
2. Sternling C. V., Scriven L. E. Interfacial turbulence: hydrodynamic instability and the Marangoni effect // AIChE Journal. 1959. V. 5. № 4. P. 514–523.
3. Непомнящий А. А., Симоновский И. Б. Термокапиллярная конвекция в двухслойной системе // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. № 4. С. 825–827.
4. Непомнящий А. А., Симоновский И. Б. О колебательной конвективной неустойчивости равновесия двухслойных систем при наличии термокапиллярного эффекта // ПМТФ. 1985. № 1. С. 62–65.
5. Garcia-Ybarra P. L., Velarde M. G. Oscillatory Marangoni – Bernard interfacial instability and capillary – gravity waves in single- and two-component liquid layers with or without Soret thermal diffusion // Phys. Fluids. 1987. V. 30. № 6. P. 1649–1655.
6. Chu X.-L., Velarde M. G. Onset of KdV solutions in Marangoni – Benard convection // Nonlinear world. Proc. IV Int. Workshop on Nonlinear and Turbulent Processes in Physics. V. 2. Kiev: Naukova Dumka. 1989. P. 73–82.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

Пермь

Поступила в редакцию
18.IV.1990